

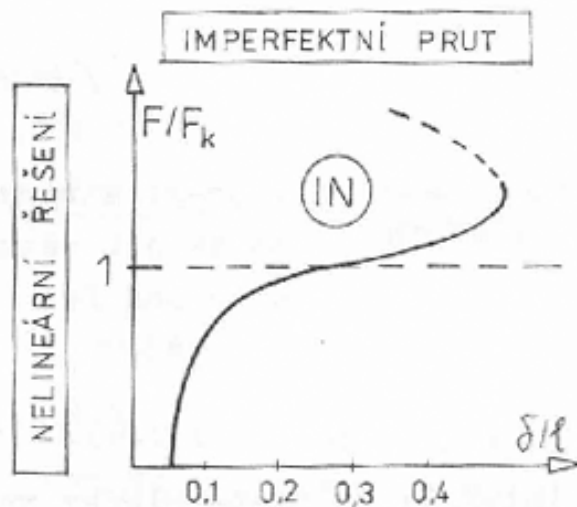
# Lineární stabilita a teorie II. řádu

- Sestavení podmínek rovnováhy na **deformované konstrukci**
- Konstrukce **s** a **bez** počáteční imperfekce
- Výpočet **s malými** vs. **s velkými** deformacemi

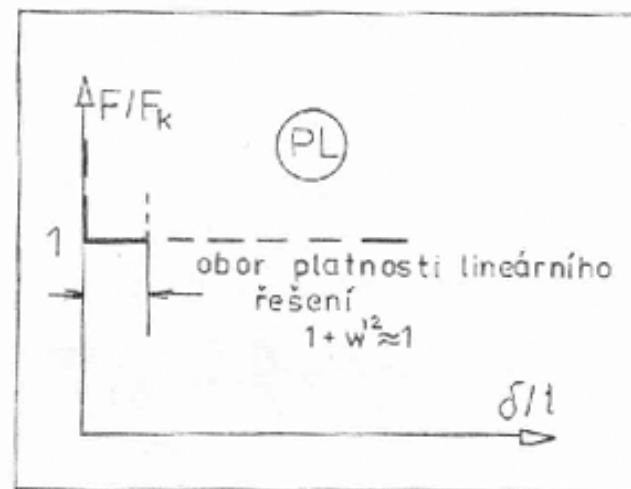
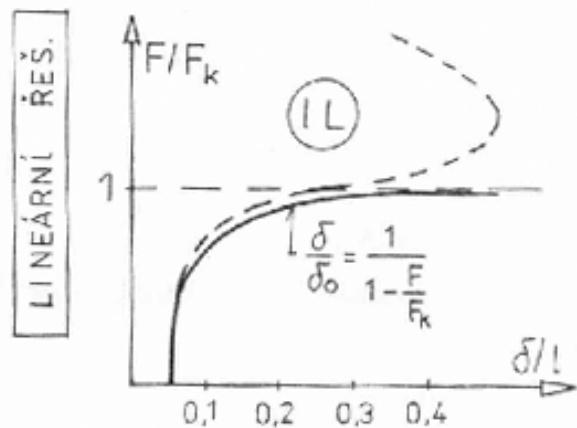
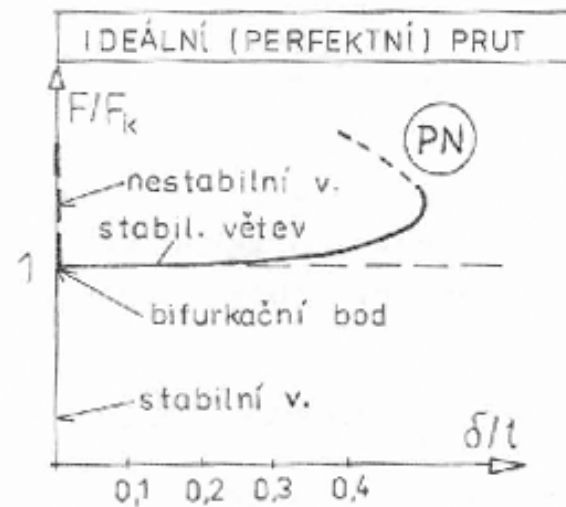
$$\frac{1}{\rho} \cong -w''$$

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{w''}{(1+w'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

# Zatěžovací dráhy [Šejnoha, Bittnarová, 2003]



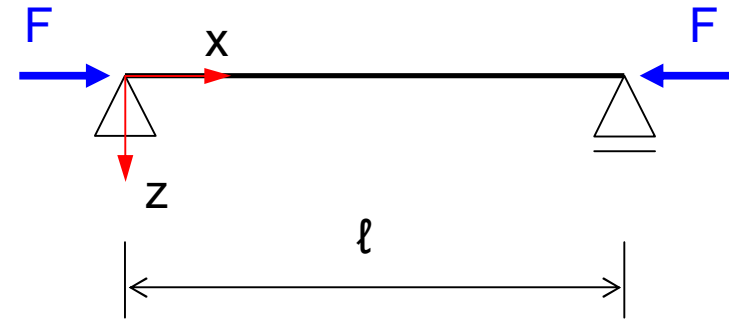
$$\delta_0/l$$



# Teorie ideálního prutu

- Vycházíme z diferenciální rovnice ohybové čáry:

$$EIw'' = -M = -F \cdot w(x)$$



Aproximace:  $w(x) = A \sin \frac{\pi x}{l} \Rightarrow w''(x) = -A \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}$

Rovnice  $\left( -\frac{\pi^2}{l^2} EI + F \right) A \sin \frac{\pi x}{l} = 0$

má netriviální řešení pro

$$F = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = F_{crit}$$

**Eulerovo kritické břemeno**

# Teorie ideálního prutu

- Hledání kritického břemene přímého prutu je z matematického hlediska problémem vlastních čísel:

$$EIw'' = -F \cdot w$$

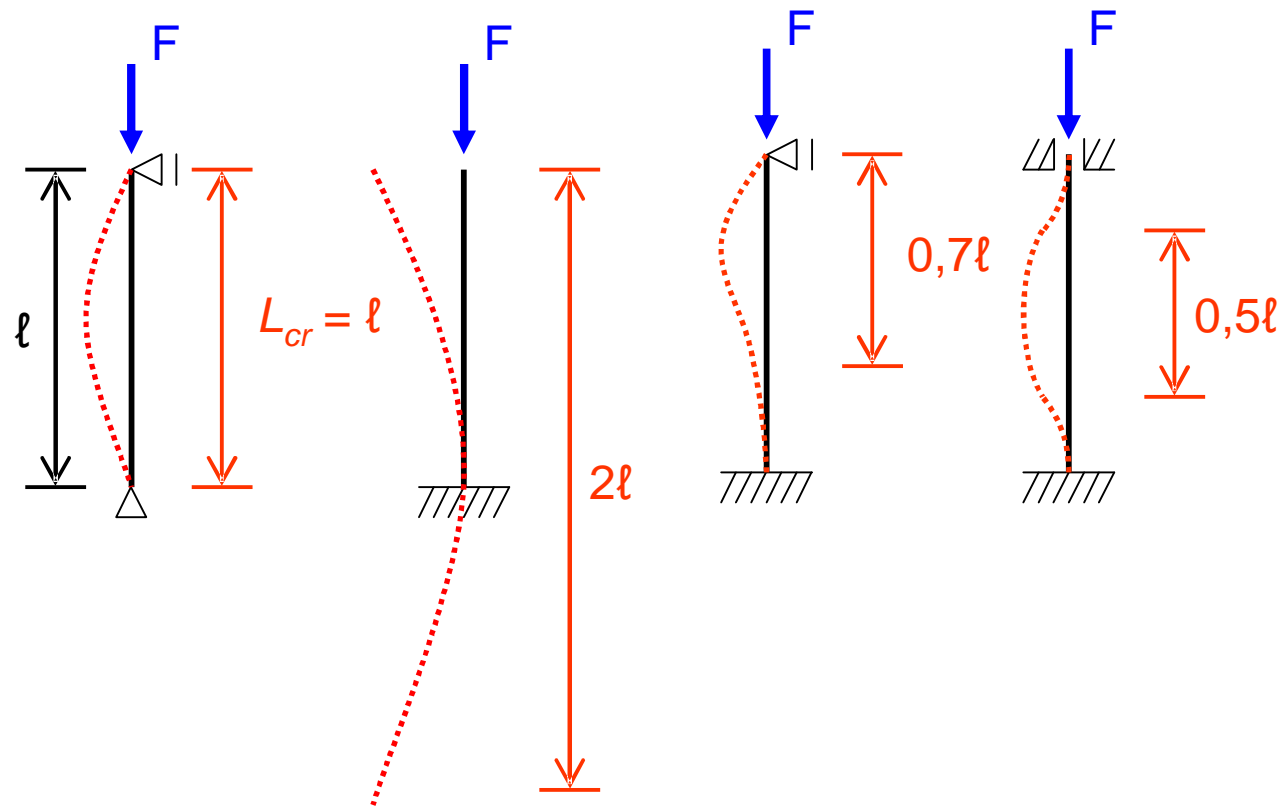
$$w'' + \frac{F}{EI} w = 0$$

$$w'' + \alpha^2 w = 0$$

Řešení tohoto problému je nekonečně mnoho, nás však zajímá nejmenší hodnota  $F_{crit}$  při níž dojde ke ztrátě stability konstrukce

# Vzpěrné délky

- Zavádíme tzv. **vzpěrnou délku**  $L_{cr}$

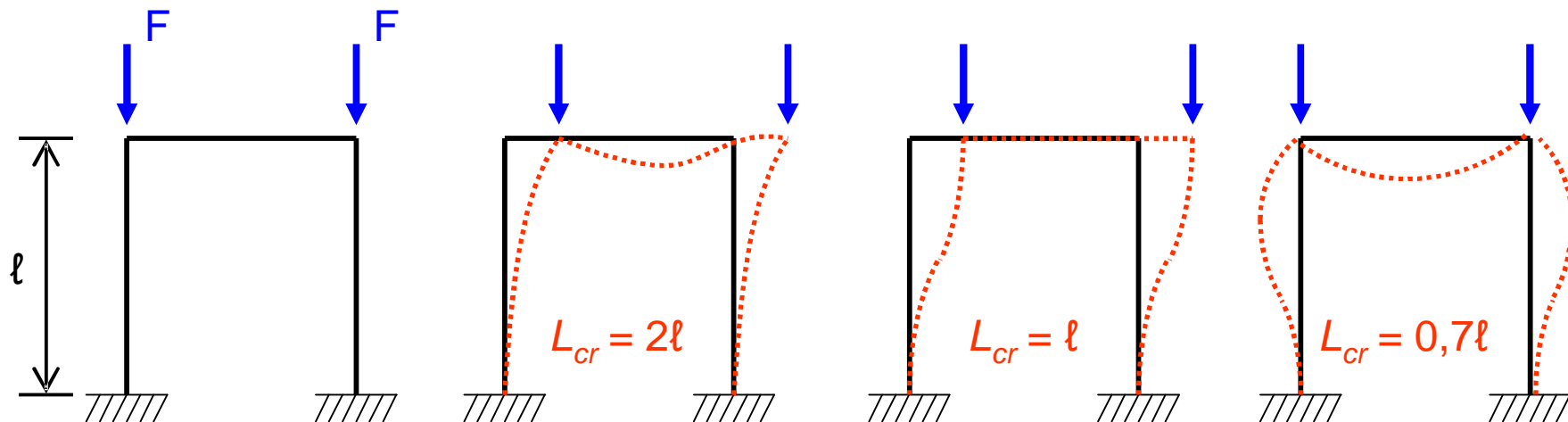


$$F_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{L_{cr}^2}$$

$$L_{cr} = \pi \sqrt{\frac{EI}{F_{crit}}}$$

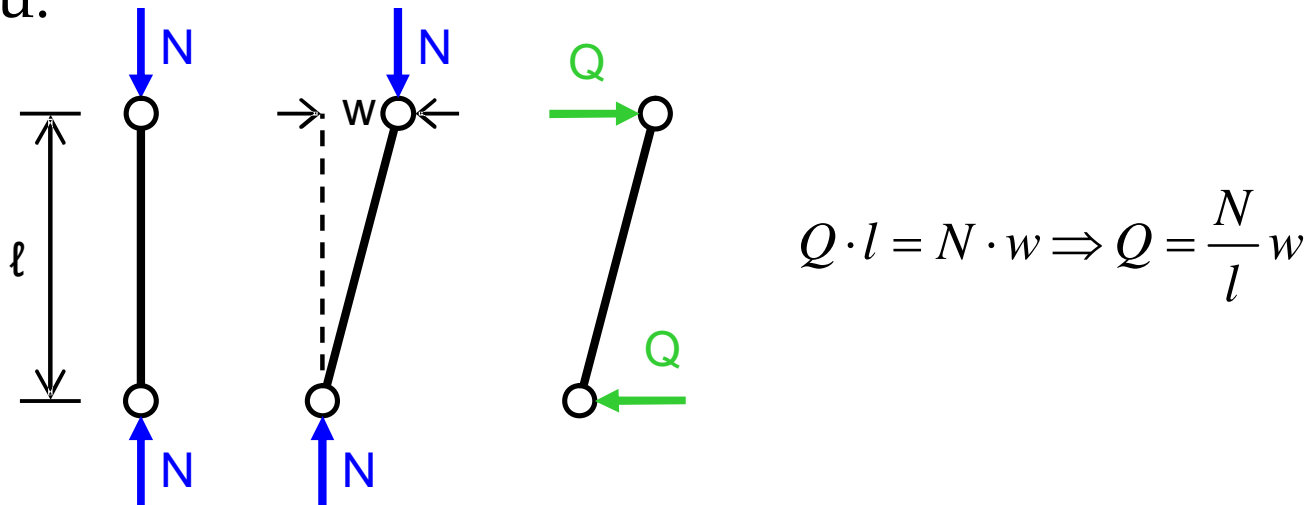
# Lineární stabilita

- Rozšíření hledání kritického břemene na celou konstrukci
- Výpočet vzpěrných délek jednotlivých prutů v konstrukci a jejich namáhání
- Kritické zatížení je dáno  $\lambda$ -násobek zadaného referenčního zatížení
- Různé tvary vybočení téže konstrukce při stejném zatížení - hledáme tvar s nejnižším kritickým břemenem



# Výpočet součinitele kritického zatížení

Vycházíme z rovnováhy na elementu deformovaného prutu:

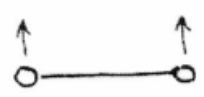


Příčné síly  $Q$  závisí na osově síle  $N$ . Protože  $N = \lambda N_{\text{ref}}$ , je i velikost  $Q$  funkcí součinitele  $\lambda$ .

Tyto doplňkové příčné síly se přičtou do *matice tuhosti* prutu  $\mathbf{K}$ .

$$[\mathbf{K}^l] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

Matice tuhosti  
prutu v ohybu  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K}_\sigma = -\frac{N}{\lambda} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$


Matice geometrické tuhosti  $\mathbf{K}_G$   
(matice počátečních napětí  $\mathbf{K}_\sigma$ )

Rovnici rovnováhy potom píšeme ve tvaru:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_G) \mathbf{r} = 0$$

Tato soustava s nulovou pravou stranou má netriviální řešení pouze pokud je singulární, tedy když je její determinant roven nule:

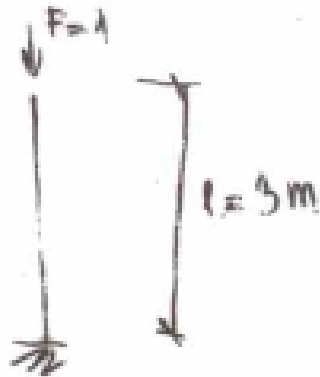
$$\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_G) = 0$$

Tento výraz je polynom proměnné  $\lambda$ , jeho nejmenší kořen je součinitel kritického zatížení.

Reálně se řeší iterativně jako zobecněný problém vlastních čísel

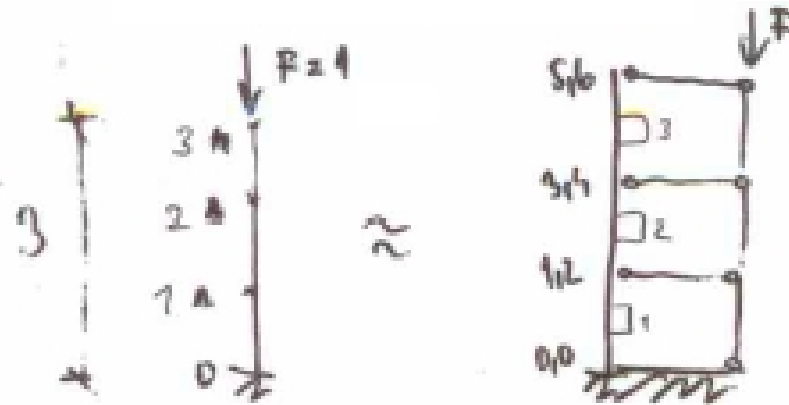


# Příklad ①



$$E = 21e+7 \text{ kPa}$$

$$I = 85 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$



$$(K - \lambda K_G) r = 0$$

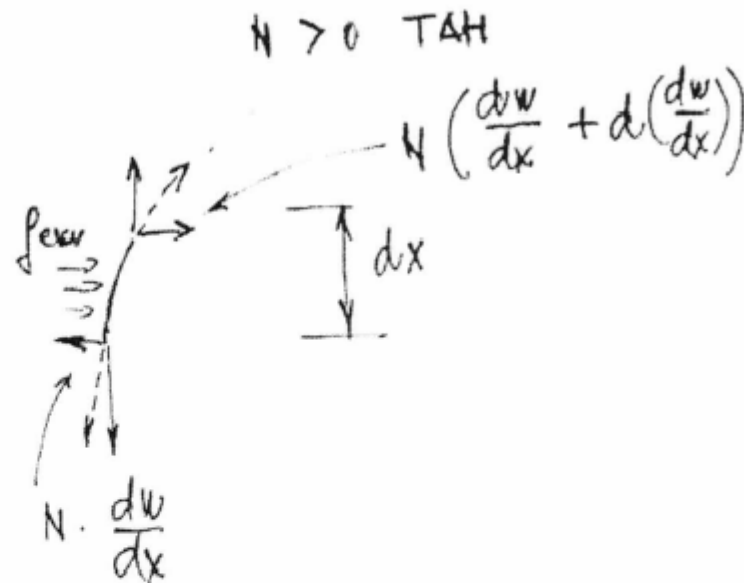
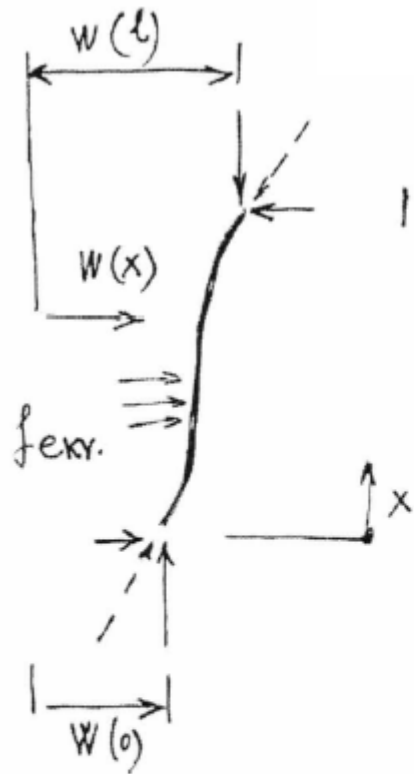
$$K_G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{cr} = 0.49999 \cdot 10^4$$

Euler:

$$\lambda_{cr} = EI \cdot \frac{\pi^2}{l^2} = EI \cdot \frac{\pi^2}{(2l)^2} = \underline{4893}$$

# Konzistentní $K\sigma$



PODM. EKUIVALENCE :

$$f_{exr} \cdot dx + N \left( \frac{dw}{dx} + d\left(\frac{dw}{dx}\right) \right) - N \frac{dw}{dx} = 0$$

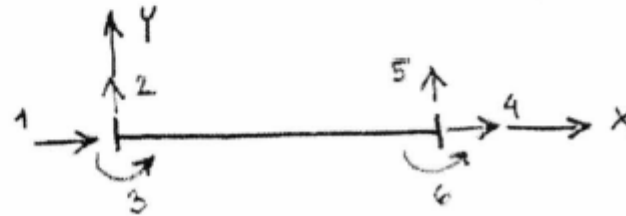
$$f_{exr} = - N \frac{d^2 w}{dx^2}$$

# Konzistentní $K\sigma$

$$K_{\alpha} = -\frac{N}{30l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 3l & 0 & -36 & 3l & 0 \\ 4l^2 & 0 & -3l & -l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 3l & 0 & -36 & 3l & 0 \\ 4l^2 & 0 & -3l & -l^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

N > 0  
TAH!

sym.



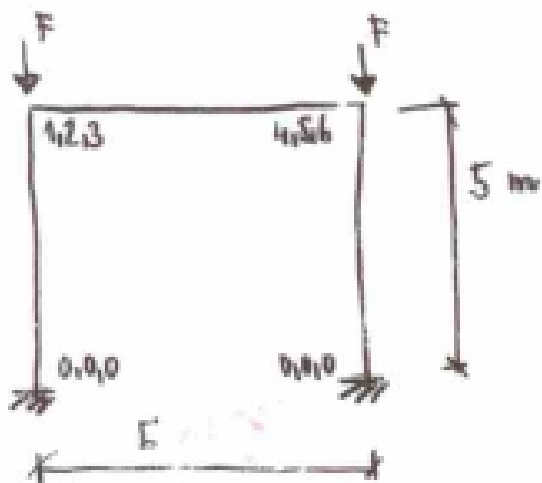
$$\lambda_{cr} = 4894,2$$

Euler:

$$P_{cr} = EI \cdot \frac{\pi^2}{l^2} = EI \frac{\pi^2}{(2l)^2} = 4893$$

# Příklad ②

②



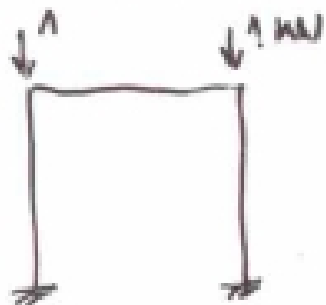
$$E = 240 \text{ 780 MPa}$$

$$I = 85 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

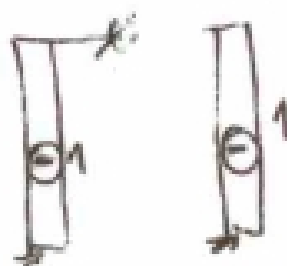
$$A = 514 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Uvažovaná konfigurace:



②



Pozn: 0 matice poč. napětí se předpokládá, že je pozitivně (negativně) definitivní. (nepřipouští se 0 prvky na diagonále. Tento požadavek může někdy splnit, proto je ko. stabilizována pomocí "malých", vhodně zvolených čísel.  
⇒ r prvky s 0 osobou silou ji třeba "malou" zavést (1/1000 ostatních)

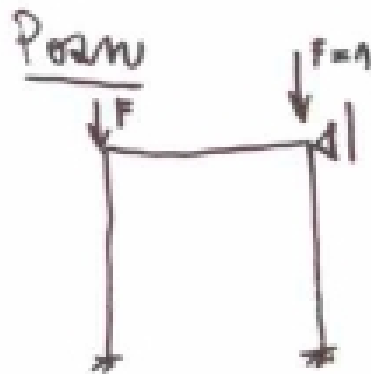
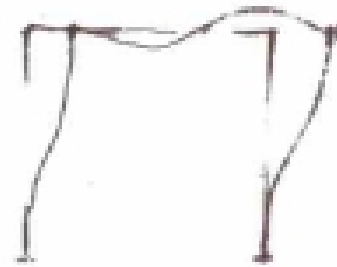
$$\lambda_1 = 5295$$

$$(\lambda_2 = 32086)$$

Tvor. yzobrazu

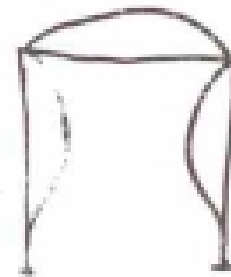
$$n = \{ 1, 1184; 0,65 \cdot 10^{-2}; -0,175; 1,1488; 0,65 \cdot 10^{-2};$$

$$-0,175 \}$$

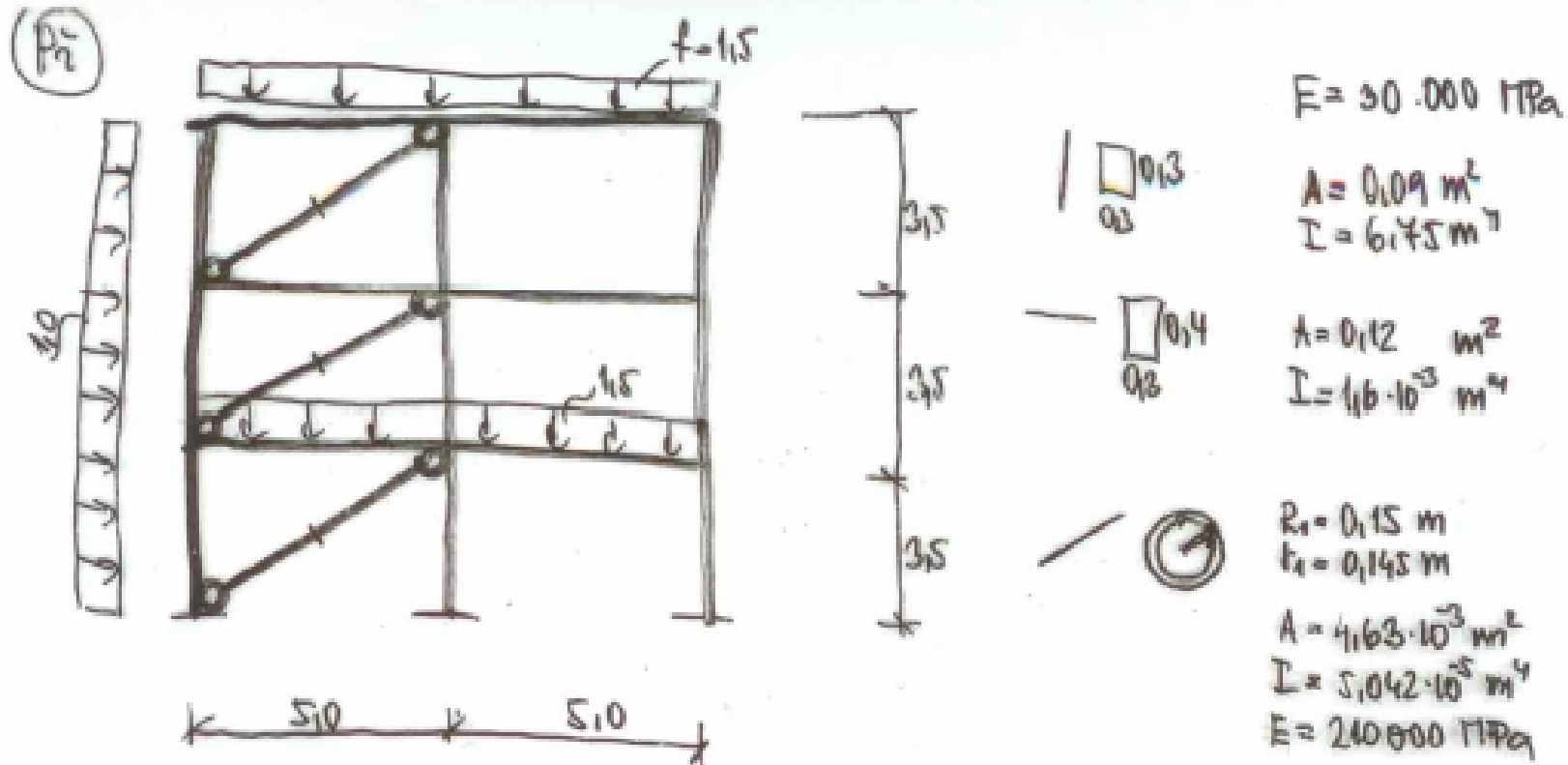


$$\lambda_{cr} = 32086$$

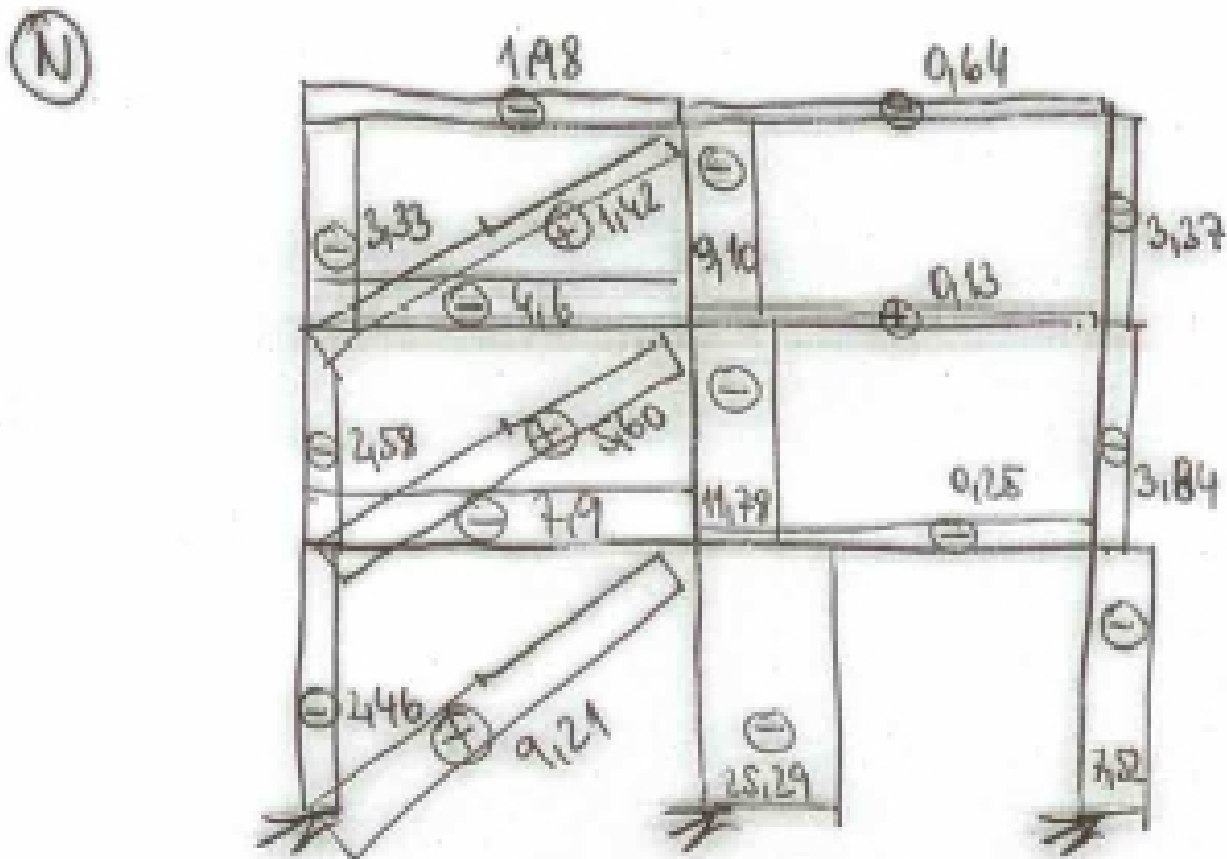
Tvor. yzobrazu



# Příklad ③



# Lineární statika





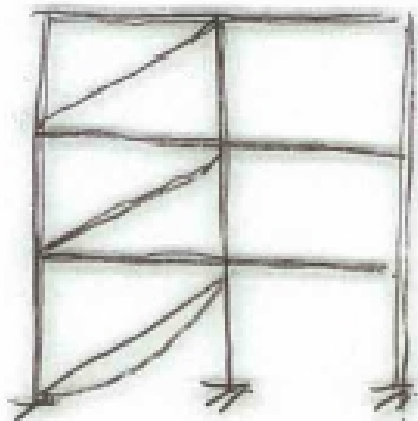
# Lineární stabilita

Výsledky řešení:

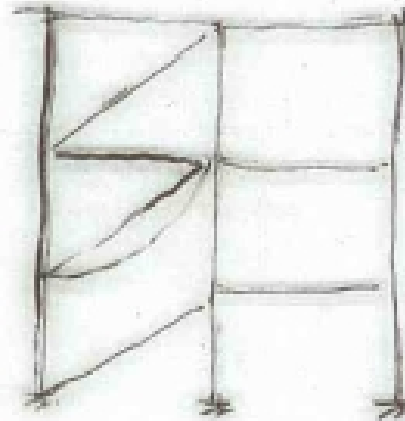
$$e = \{ -0,551 \cdot 10^9; \dots; -504; -306,9; 4147,3; 7114,1; \dots \}^T$$

tepelná vl. čísla vyjadřují fakt, že zatížení působí obráceně

$$\lambda_1 = -306,9$$

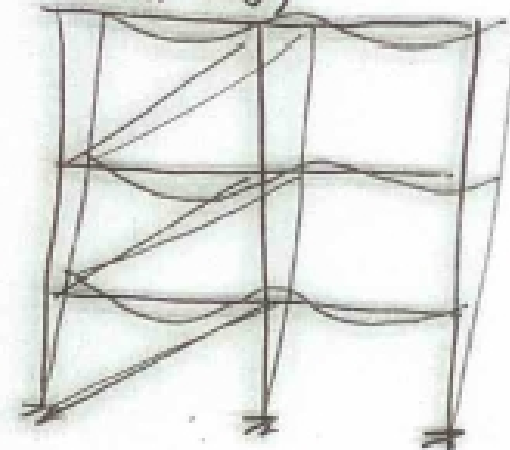


$$\lambda_2 = -504$$



$$\lambda_i = 4147,3$$

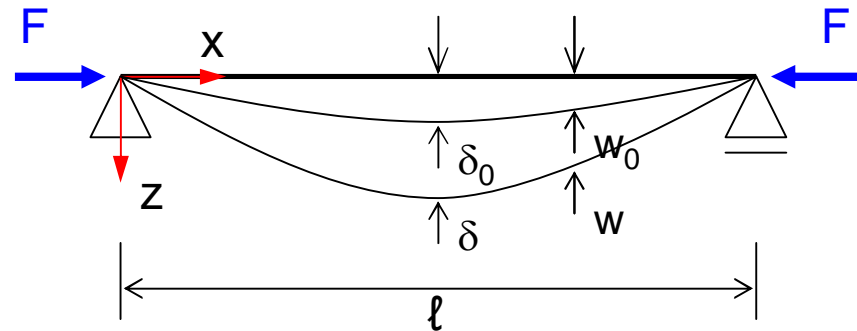
(první > 0)



**Neplatí superpozice!**

# Imperfektní prut

- Počáteční stav  $w_0$  – imperfektní tvar, vnitřní síly nulové
- Pro moment platí
- Diferenciální rovnice ohybové čáry ve tvaru:



$$EIw'' + Fw = EIw_0''$$

Zvětšení vnitřních sil a průhybů vlivem stability:

$$w = w_0 \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda}}$$

„stabilitní zvětšení“

$$\lambda = \frac{F_{crit}}{F}$$

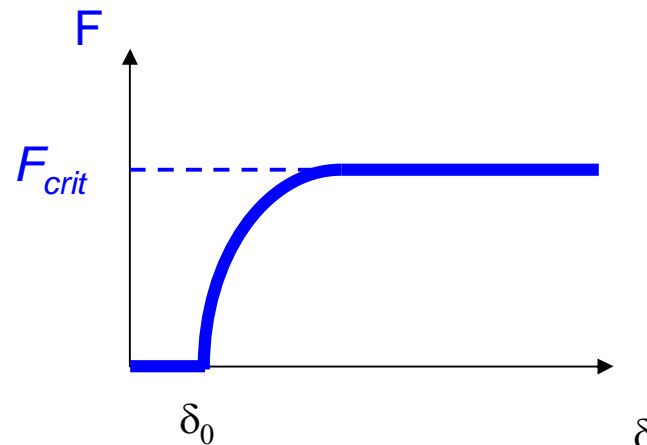
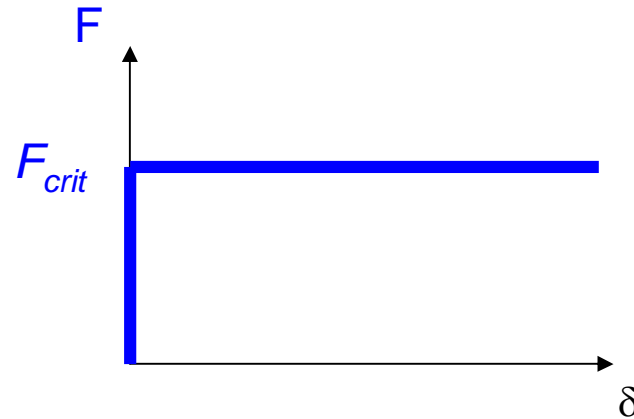
$\lambda < 4(5)$  - konstrukce je nebezpečně štíhlá

$4(5) < \lambda < 10$  - uplatnění stabilitního zvětšení

$\lambda > 10$  - konstrukce není náchylná ke ztrátě stability

# Imperfektní prut

- Průhyb ideálního prutu se při zatěžování nemění, po dosažení  $F_{crit}$  skokem zdeformuje nade všechny meze
- Deformace imperfektního prutu při zatěžování vzrůstá, při dosažení hodnoty  $F_{crit}$  také nekontrolovatelně vzroste



# Řešení odezvy konstrukcí pomocí teorie 2. řádu

Řešíme soustavu rovnic ve tvaru  $(\mathbf{K} - \mathbf{K}_G)\mathbf{r} = 0$

Tato soustava není lineární, protože  $\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_G(N)$  a  $N = N(\mathbf{r})$ , tedy matice soustavy je funkcí řešení. Soustavu musíme řešit iterativně.

Vydeme z tvaru  $\mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{f} + \mathbf{f}_{ekv}; \mathbf{f}_{ekv} = \mathbf{K}_G\mathbf{r}$

Iterace:  $\mathbf{K}\mathbf{r}^{i+1} = \mathbf{f} + \mathbf{K}_G^i\mathbf{r}^i$

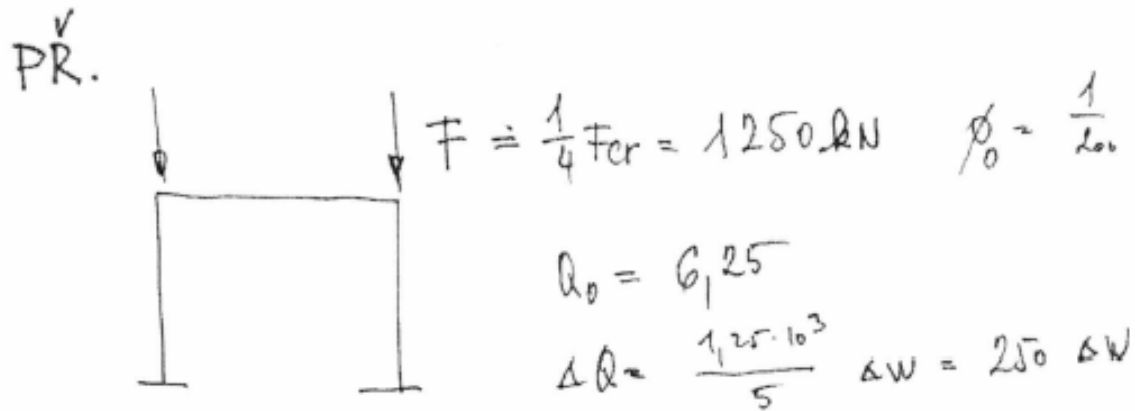
Postup výpočtu: 1)  $\mathbf{K}\mathbf{r}^0 = \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{r}^0, N^0, \mathbf{K}_G^0$

2)  $\mathbf{K}\mathbf{r}^{i+1} = \mathbf{f} + \mathbf{K}_G^i\mathbf{r}^i, \mathbf{K}_G^i = \mathbf{K}_G(\mathbf{r}^i) = \mathbf{K}_G(N^i(\mathbf{r}^i))$

3)  $\|\mathbf{r}^{i+1} - \mathbf{r}^i\| < \varepsilon$  Konvergenční kritérium

4)  $i = i + 1$  Zpět na začátek

# Příklad ④

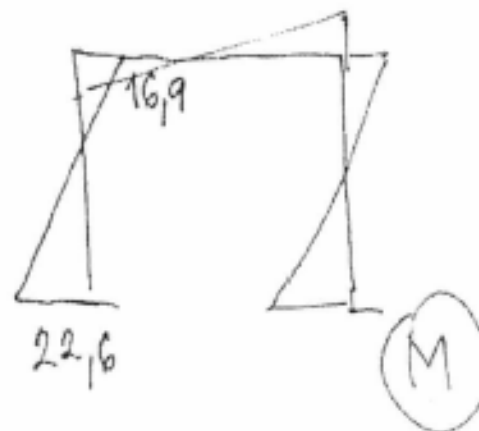


$i$	$Q_{i-1}$	$\Delta W_i \text{ (m)}$	$Q_i = Q_0 + N \cdot \frac{\Delta W_i}{l} \text{ (kN)}$
1	6,25	$0,52 \cdot 10^{-2}$	7,5
2	7,6	$0,63 \cdot 10^{-2}$	7,8
3	7,8	$0,65 \cdot 10^{-2}$	7,9
4	7,9	$0,66 \cdot 10^{-2}$	7,9

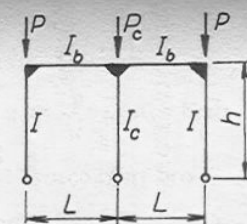
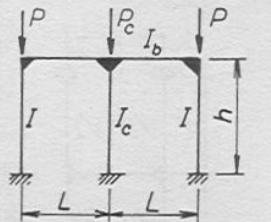
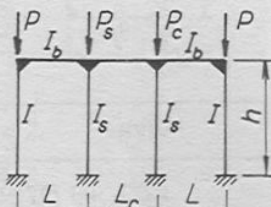
# Příklad ④

$$\frac{1}{1 - \frac{1250}{5265}} = 1,311$$

$$\Delta W_w = 1,311 \cdot 0,52 = 0,68 \cdot 10^{-2} \quad 3\% \text{ chyby}$$



# Stabilita pomocí tabulek (Dcv.)

12.3. VZPĚR RÁMŮ Tabulka C.84. Součinitele $\beta$ pro vzpěrné délky sloupů rámu	Rám	$\beta$	Poznámka
	<p>pro krajní sloupy <math>\frac{6 + 1,2\kappa}{3 + 0,1\kappa} \sqrt{\frac{2 + \psi}{2 + \eta}}</math></p> <p>pro střední sloup <math>\frac{6 + 1,2\kappa}{3 + 0,1\kappa} \sqrt{\frac{2 + \psi}{2 + \eta}} \sqrt{\frac{\eta}{\psi}}</math></p>	<p><math>\psi = \frac{P_c}{P}</math></p> <p><math>\eta = \frac{I_c}{I}</math></p> <p>Platí pro <math>\beta \leq 6</math></p>	
 	<p>do vzorců pro rámy v předchozích dvou případech místo <math>\frac{6 + 1,2\kappa}{3 + 0,1\kappa}</math> se dosadí <math>\frac{1 + 0,4\kappa}{1 + 0,2\kappa}</math></p>	<p><math>\psi = \frac{P_c}{P}</math></p> <p><math>\eta = \frac{I_c}{I}</math></p> <p>Platí pro <math>\beta \leq 3</math>, <math>0,5L &lt; L_c &lt; 2L</math></p>	

Vysvětlení k tab. C.84:  
 $\kappa = \frac{IL}{I_b h}$ ; vzorce platí pro  $\kappa \leq 10$ , pokud není v tabulce uvedeno jinak;  $\beta_1 = 0,7\sqrt{1 + P_1/P}$  pro  $0 < P_1 \lambda P$ ; jestliže je  $P_1$  tahem, dosazuje se  $P_1 = 0$ ;  $\nu = \frac{P_2}{P}$ , vzorce platí pro  $\nu \leq 10$ .

# Literatura

Byly použity slidy z přednášek a cvičení

[1] Doc. Dana Rypla z předmětu SM50

[2] Prof. Petra Konvalinky z předmětu ANKC-K

[3] Doc. Pavla Kuklíka z předmětu ANKC-C

a jeden obrázek ze skript PP20 [Šejnoha, Bittnarová, 2003]



# Pomůcky

| Czech Technical University | Faculty of Civil Engineering | Department of Mechanics |  
| Home | Teaching | Publications | Conferences | Lynx |

## SOUČASNÁ A MINULÁ VÝUKA

[Rozvrh](#) || [ANKC-C](#) || [MMO](#) || [MOM](#) || [Zajímaví vyučující](#) || [Studentská sekce](#) || [Učitelská sekce](#)

### ROZVRH

- [Osobní rozvrh](#)
- [Oficiální rozvrh](#)
- [Rozvrh fakulty stavební](#)
- [Časový plán akademického roku](#)
- [Časový plán akademického roku 2008/2009](#)

### ANKC-C

- Lineární stabilita a teorie II. řádu **New!**
  - STAVEBNÍ SOFTWARE FINE: [FIN 10 – Teoretická příručka: 1. FIN 2D, Fin 3D](#) - hezký úvod do problematiky ( Lokální kopie PDF )
  - [Zadání příkladů na lineární statiku a stabilitu PDF](#) a jejich řešení v Matlabu ZIP
- Literatura na příčinkové čáry
  - Stavební mechanika; O. Novák, A. Jílek, J. Havrančík, J. Sobota; monografie, 1965, Praha : SNTL  
Knihovna FSv, signatura: B 12420
  - Statika stavebních konstrukcí : Příklady staticky určitých konstrukcí; Václav Kufner, Pavel Kuklík; vysokoškolská skripta, 1995, Praha : ČVUT  
Knihovna FSv, signatura: S 2264
- Zajímavé odkazy
  - P. KONVALINKA: [Přednášky z ANKC-KM](#)
  - J. BITTNAROVÁ: [Slidy přednášek z PP20](#)
  - Z. VLK: [Prográmek na výpočet průřezových charakteristik](#)
  - P. ŘEŘIČHA: [Několik příkladů příčinkových čar v angličtině \(anonymní login "Guest"\)](#)

# Pomůcky



jazyk: english český español

[Home](#) [Produkty](#) [Podpora](#) [Obchod](#) [Ke stažení](#) [Reference](#) [O nás](#) Vyhledávání:  »

## KE STAŽENÍ / MANUÁLY

- > Demo
- > Aktualizace
- > **Manuály**
- > Produktové letáky
- > Freeware
- > Hardwarové klíče

### Program stálé podpory



Získejte neomezenou podporu a aktualizace pro vaše programy!

» [Více o Programu stálé podpory](#)

## Manuály

Praktické i teoretické manuály k našim programům jsou volně ke stažení.

### Manuály ve formátu PDF

#### GEO 5

[Geo 5 - Uživatelská příručka](#) CZ 25.03.2008 21,43 MB

#### FIN 10

[FIN 10 - Teoretická příručka](#)

1. [FIN 2D, Fin 3D](#) CZ 25.03.2008 0,69 MB

2. [Dřevo ČSN 73 1701 vč.změn 1-4/1998](#) CZ 25.03.2008 0,24 MB

3. [Dřevo EC5 ČSN P ENV 1995-1-1](#) CZ 25.03.2008 0,23 MB

4. [Ocel ČSN 73 1401/84](#) CZ 25.03.2008 0,53 MB

5. [Ocel ČSN 73 1401/98](#) CZ 25.03.2008 0,76 MB

6. [Ocel EC3 ČSN P ENV 1993-1-1](#) CZ 25.03.2008 0,74 MB

7. [Ocelová patka EC3 ČSN P ENV 1993-1-1](#) CZ 25.03.2008 0,84 MB

8. [Ocelové spoje EC3 ČSN P ENV 1993-1-1](#) CZ 25.03.2008 1,08 MB

**Prosba.** V případě, že v textu objevíte nějakou chybu nebo budete mít námět na jeho vylepšení, ozvěte se prosím na [matej.leps@fsv.cvut.cz](mailto:matej.leps@fsv.cvut.cz).

*Datum poslední revize: 24.11.2008*

*Verze: 001*