

Optimalizace – obecný úvod

- Motivace optimalizačních úloh
[proč optimalizovat?]
- Formalizace problému
[jak obecně popsat optimalizační úlohu?]
- Klasifikace optimalizačních problémů
[existují podobné problémy?]
- Třídy optimalizačních algoritmů
[existují algoritmy na řešení mého problému?]
- Příklady

Motivace optimalizačních úloh

Jak se nejlevněji najíst?

- Cíl: Z daného seznamu potravin sestavit *nejlevnější* jídlo
- Omezení: Výsledné jídlo musí mít *dostatečnou nutriční* hodnotu
- Poprvé zkoumáno v 40. letech minulého století pro armádní účely

Položka	Cena [Kč/1kg]	Nutriční hodnota [Cal/100g]
Vepřová pečeně s kostí	120,10	273
Kuře	51,49	331
Brambory rané	8,39	93
Chléb konzumní kmínový	15,56	260
...		

Motivace optimalizačních úloh

Jak nejbezpečněji uložit peníze?

- Cíl: Uložit peníze do vybraných akcií s *nejmenším rizikem*
- Omezení: Dosáhnout *alespoň* předepsaného výnosu
- Základní problém Managementu portfolia [3]

Akcie	Cena [Kč]				
	2001	2002	2003	2004	2005
Komerční banka	1000	2000	2250	3100	3450
ČEZ	850	990	140	330	700
Unipetrol	45	40	60	80	225
Philip Morris ČR	8000	1100	15000	17500	19000
...					

Motivace optimalizačních úloh

Jak nejúspěšněji cestovat?

- Cíl: Vykonat co *nejkratší* okružní jízdu po vybraných městech
- Omezení: Každé město navštívit *alespoň* jednou
- Úloha obchodního cestujícího, poprvé uvedená v roce 1930
- Aplikace v návrhu spojů, automatické výrobě ...

	Praha	Brno	Ostrava	Cheb
Praha	0 km	205	381	176
Brno	207	0 km	180	381
Ostrava	380	181	0 km	550
Cheb	176	384	556	0 km

Vzdálenosti mezi vybranými městy

Motivace optimalizačních úloh

Jaký počítač si vybrat?

- Cíl: Nakoupit *nejvhodnější* notebook
- *Kritéria* výběru: Cena, výkon, velikost paměti, disku, úhlopříčka . . .
- Typický příklad hledání *kompromisního řešení* [teorie rozhodování]

Typ	Cena [Kč]	Úhlopříčka ["]	Disk [GB]	Váha [kg]
AMILO Pro V2035	14 999	15,4	60	2,9
Aspire 9814WKMi	65 996	20	240	7,5
Qosmio G30-194	93 210	17	320	4,5
Lifebook Q2010 U1400	105 743	12	80	0,9

Vybrané parametry notebooků (prosinec 2006)

Formalizace optimalizačních úloh

- Obecná formulace: Najdi $\mathbf{x}_{opt} \in \mathcal{O}$, které splňuje

$$f(\mathbf{x}_{opt}) \stackrel{\mathcal{H}}{\preceq} f(\mathbf{x}) \quad \text{pro všechna } \mathbf{x} \in \mathcal{O}$$

- „ \mathbf{x} “ – *proměnné* vystupující v [matematické] formulaci problému
- „ \mathcal{O} “ – množina přípustných řešení (odpovídá *omezení*)
- „ f “ – *cílová* funkce [$f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{H}$]
- „ \mathcal{H} “ – obor hodnot cílové funkce
- „ $\stackrel{\mathcal{H}}{\preceq}$ “ – [částečné] uspořádání oboru hodnot cílové funkce – umožňuje určit, které řešení je „lepší“
- „ \mathbf{x}_{opt} “ – *optimální* řešení úlohy

Formalizace optimalizačních úloh

Optimální dieta

- N různých potravin
- Neznámé – hmotnost jednotlivých potravin v kg: $x_i \in \mathcal{R}, x_i \geq 0$

- Cílová funkce

$$f(\mathbf{x}) = x_1c_1 + x_2c_2 + \dots x_Nc_N,$$

kde c_i je cena za 1 kg i -té potraviny

- Obor hodnot $\mathcal{H} = \mathcal{R}_0^+, \overset{\mathcal{H}}{\preceq}$ odpovídá $<$

- Omezení

$$x_1k_1 + x_2k_2 + \dots x_Nk_N \geq K,$$

kde k_i je nutriční obsah i -té potraviny a K požadovaný nutriční obsah

- \mathcal{O} odpovídá poloprostoru v \mathcal{R}^N

Formalizace optimalizačních úloh

Nákup počítače

- Neznámá – pořadové číslo notebooku $x \in \mathcal{N}$
- Cílová funkce: M různých kritérií

$$\mathbf{f}(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)], \quad \mathcal{H} \in \mathcal{R}^M$$

- Porovnání dvou řešení

$$x_1 \stackrel{\mathcal{H}}{\preceq} x_2 \equiv \begin{cases} f_1(x_1) \leq f_1(x_2) \\ f_2(x_1) \geq f_2(x_2) \\ f_3(x_1) \geq f_3(x_2) \\ f_4(x_1) \leq f_4(x_2) \end{cases}$$

- Optimální portfolio → cvičení
- Obchodní cestující → přednáška č. 6

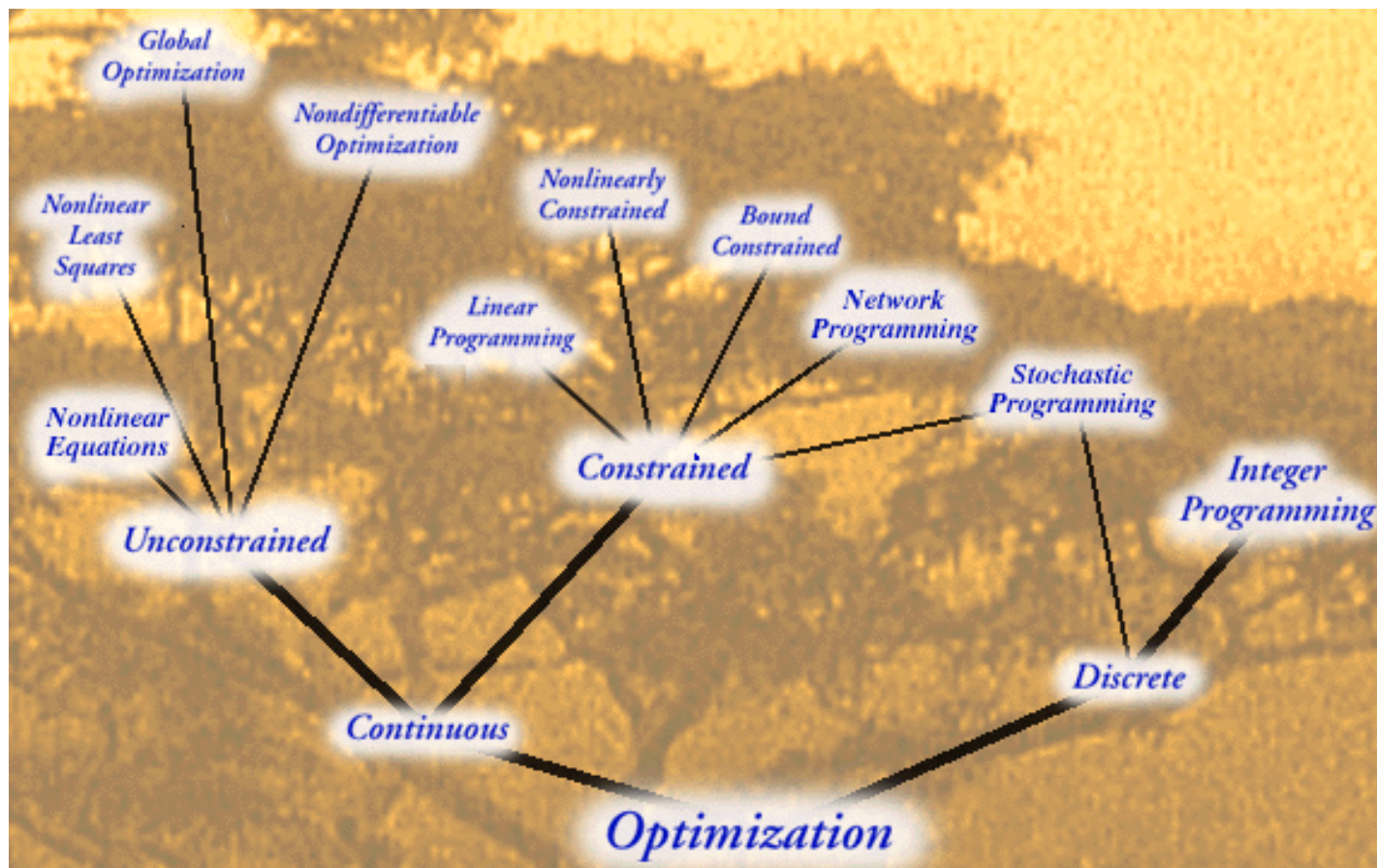
Základní klasifikace optimalizačních úloh

- *Dimenze* problému N – počet [nezávislých] složek x
- Jak roste počet operací potřebných k získání x_{opt} s dimenzí?
 - $\approx CN^k$ – *Polynomiální* problém (P)
[dieta, portfolio, volba notebooku]
 - $\approx 2^N$ – *Exponenciální* problém (E)
 - *Nedeterministický Polynomiální* problém (NP) – problém řešitelný pomocí polynomiálního počtu kroků, ale jen pomocí stochastického počítače, který „umí uhádnout správnou variantu“ [2]
[obchodní cestující]

$$P \stackrel{?}{=} NP \prec E$$

- „?“ má cenu 1 mil USD

Praktičtější klasifikace optimalizačních úloh

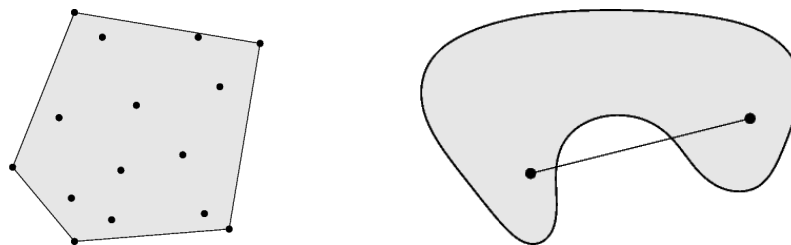


Příklad „optimalizačního stromu“

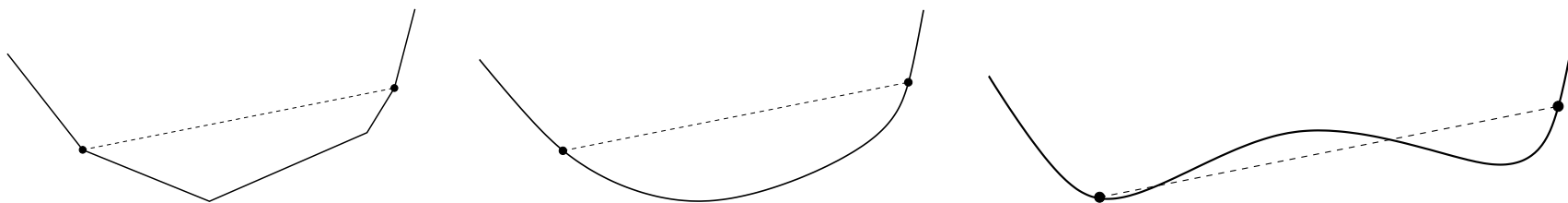
<http://www-fp.mcs.anl.gov/otc/Guide/OptWeb>

Jaká je souvislost mezi předchozími přístupy?

- Konvexní množina



- [Ostře] konvexní funkce



$$\mathcal{O} \text{ konvexní} + f \text{ konvexní} = P$$

- [Ostře] konvexní funkce na konvexní množině má *právě jedno* minimum
- Efektivní metody *matematického programování* [1]

Shrnutí

- Optimalizační úloha:
 - [Matematický] model problému
 - Optimalizační proměnné x
 - Cílová funkce f
 - Definiční obor \mathcal{O}
 - Obor hodnot \mathcal{H} + metodika porovnávání
- Metody řešení
 - Konvexní úloha $\rightarrow P \rightarrow$ matematické programování
 \rightarrow přednášky 2–3
 - Nekonvexní úloha $\rightarrow NP/E \rightarrow$ heuristické metody
 \rightarrow přednášky 4+

Reference

- [1] S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2004, <http://www.stanford.edu/~boyd/cvxbook>.
- [2] K. Devlin, *Problémy pro třetí tisíciletí: Sedm největších nevyřešených otázek matematiky*, Edice Atelier, vol. 24, Nakladatelství Dokořán a Argo, Praha, 2005.
- [3] J. Veselá, *Analýza trhu cenných papírů. I. Díl*, Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta financí a účetnictví, 1999.

□

Prosba. V případě, že v textu objevíte nějakou chybu nebo budete mít námět na jeho vylepšení, ozvěte se prosím na zemanj@cml.fsv.cvut.cz.