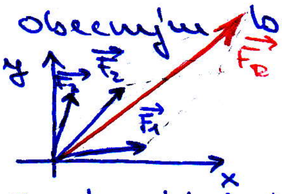
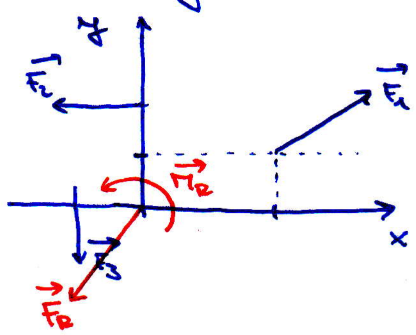
3MO1 – 3. cvičení

OBECNÁ SOUSTAVA SIL

V předchozích cvičeních pouze svazek sil procházející jedním bodem (počátkem nebo obecným bodem)
→ pouze silová výslednice $\vec{F}_R$



V obecné soustavy sil vzniká kromě silové výslednice ještě momentová výslednice, která kompenzuje otáčivý účinek soustavy



2D: $\vec{F}_R = \{F_{Rx}, F_{Ry}\}$
$\vec{M}_{oR} = \{M_{oz}\}$
rovina xy

3D: $\vec{F}_R = \{F_{Rx}, F_{Ry}, F_{Rz}\}$
$\vec{M}_{oR} = \{M_{ox}, M_{oy}, M_{oz}\}$

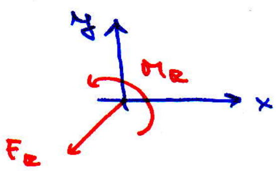
$$M_{ox} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \cdot y_i - F_{iy} \cdot z_i$$

$$M_{oy} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \cdot z_i - F_{iz} \cdot x_i$$

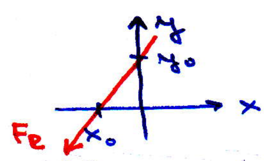
$$M_{oz} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \cdot x_i - F_{ix} \cdot y_i$$

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Redukci k počátku



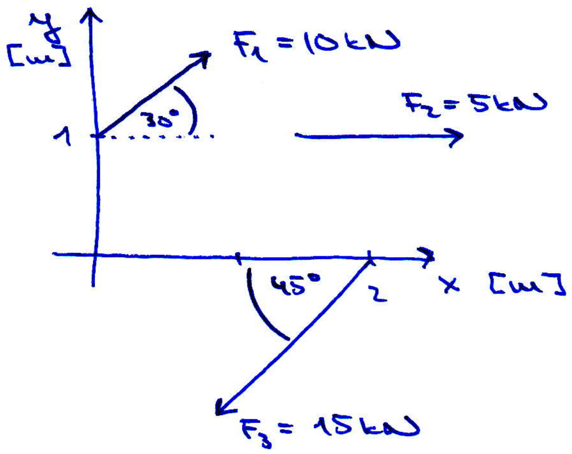
pomocí silové a momentové výslednice lze přepočítat na náhradu jedinou silou pomocí rovnice $R_y \cdot x - R_x \cdot y = M_R$, kde vyhledám průsečíky s jednotlivými osami:
1) $x = 0$: $y_0 = -\frac{M_R}{R_x}$,
2) $y = 0$: $x_0 = \frac{M_R}{R_y}$.



Velikost síly $\vec{F}_R$ zůstává stejná, pouze sílu $\vec{F}_R$ posouvám tak, aby způsobovala stejný otáčivý účinek jako M_R.

2.

Př. Pro danou soustavu sil určete redukci k počátku.

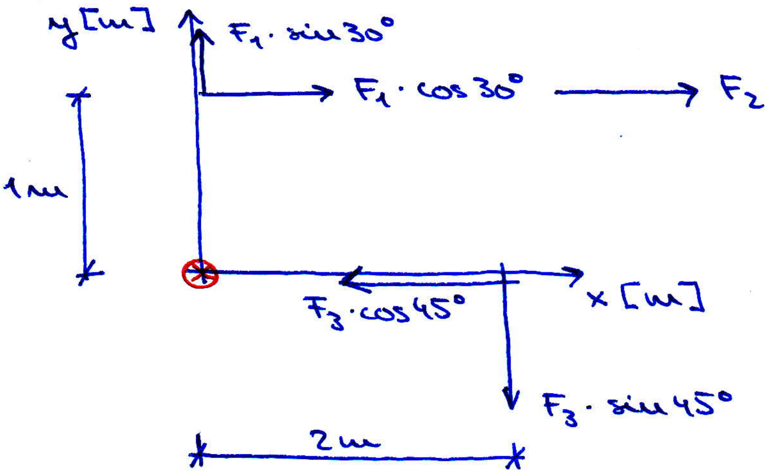


VARIANTA VÝPOČTU č.1

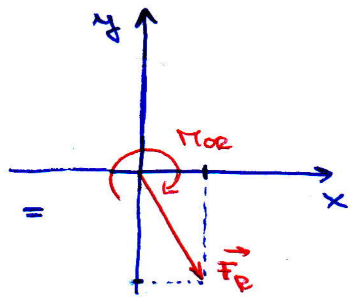
$\rightarrow$: $F_{Rx} = F_1 \cdot \cos 30° + F_2 - F_3 \cdot \cos 45° =$
$= 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 - 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{3{,}0537\,kN}}$

$\uparrow$: $F_{Ry} = F_1 \cdot \sin 30° - F_3 \cdot \sin 45° = 10 \cdot \frac{1}{2} - 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{-5{,}6066\,kN}}$

$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Rz}^2} = \sqrt{3{,}0537^2 + (-5{,}6066)^2} = \underline{\underline{6{,}3843\,kN}}$



Pravidlo pravé ruky určuje kladný směr momentu ↺ M.



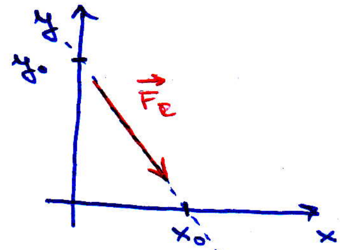
$M_{oR} = -F_1 \cdot \cos 30° \cdot 1 - F_2 \cdot 1 - F_3 \cdot \sin 45° \cdot 2 =$
$= -10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 5 - 15 \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = \underline{\underline{-34{,}873\,kNm}}$

Náhrada jedinou silou:

$M_{oR} = F_{Ry} \cdot x - F_{Rx} \cdot y \Rightarrow y = \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \cdot x - \frac{M_{oR}}{F_{Rx}}$

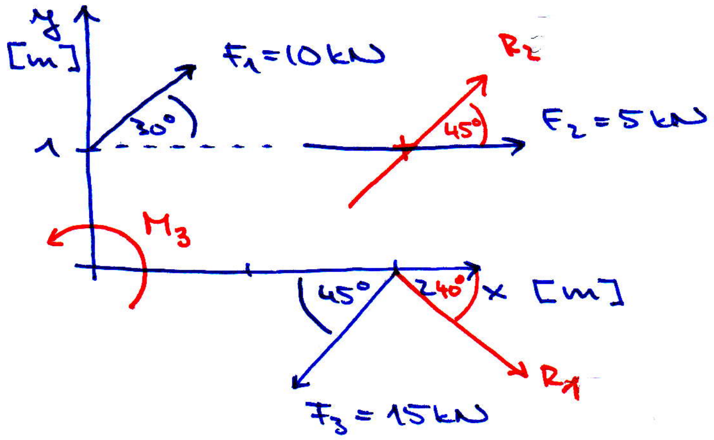
$y = \frac{-5{,}6066}{3{,}0537} \cdot x + \frac{34{,}873}{3{,}0537} \longrightarrow x_0 = 6{,}220\,m$

$y_0 = 11{,}420\,m$



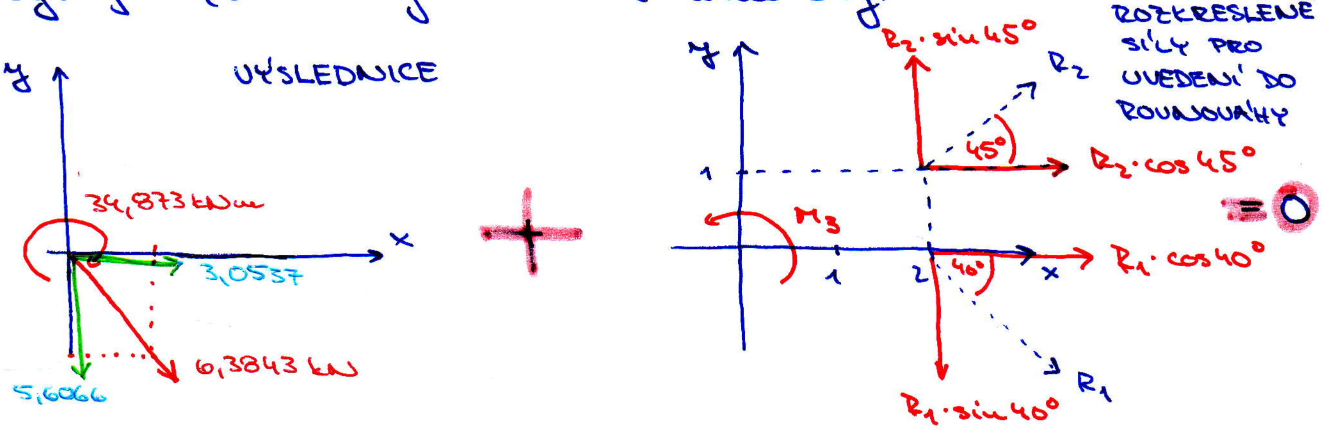
3.

Př. Uveďte danou soustavu sil $\{\vec{F_i}\}$ do rovnováhy silami $\{\vec{R_i}\}$ a momentem M_3.



$$\boxed{\{\vec{F_i}\} + \{\vec{R_i}\} = \vec{0}}$$

Z předchozího příkladu využijeme výpočtu výslednice. Musíme si ale být jistí, že ve výslednici nemáme chybu!



$\rightarrow$: $|F_{Rx}| + R_1 \cdot \cos 40° + R_2 \cdot \cos 45° = 0$

$3{,}0537 + R_1 \cdot 0{,}76604 + R_2 \cdot 0{,}70711 = 0$

$\uparrow$: $-|F_{Ry}| - R_1 \cdot \sin 40° + R_2 \cdot \sin 45° = 0$

$-5{,}6066 - R_1 \cdot 0{,}64279 + R_2 \cdot 0{,}70711 = 0$

$\circlearrowleft o$: $-|M_{oR}| - R_1 \cdot \sin 40° \cdot 2 - R_2 \cdot \cos 45° \cdot 1 + R_2 \cdot \sin 45° \cdot 2 + M_3 = 0$

$-34{,}873 - R_1 \cdot 0{,}64279 \cdot 2 - R_2 \cdot 0{,}70711 + R_2 \cdot 0{,}70711 \cdot 2 + M_3 = 0$

$-34{,}873 - R_1 \cdot 1{,}2856 + R_2 \cdot 0{,}70711 + M_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0{,}76604 & 0{,}70711 & 0 \\ -0{,}64279 & 0{,}70711 & 0 \\ -1{,}2856 & 0{,}70711 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3{,}0537 \\ 5{,}6066 \\ 34{,}873 \end{Bmatrix}$$

Zvýrazněnou soustavu lze vyřešit jako první a poté dosadit do třetí rovnice

$$\begin{aligned} 0{,}76604\,R_1 &+ 0{,}70711\,R_2 = -3{,}0537 \\ +0{,}64279\,R_1 &\overset{-}{+} 0{,}70711\,R_2 = -5{,}6066 \quad \Big| \cdot(-1) \end{aligned}$$

$$1{,}4088\,R_1 = -8{,}6603$$

$$\underline{\underline{R_1 = -6{,}1473\ \mathrm{kN}}}$$

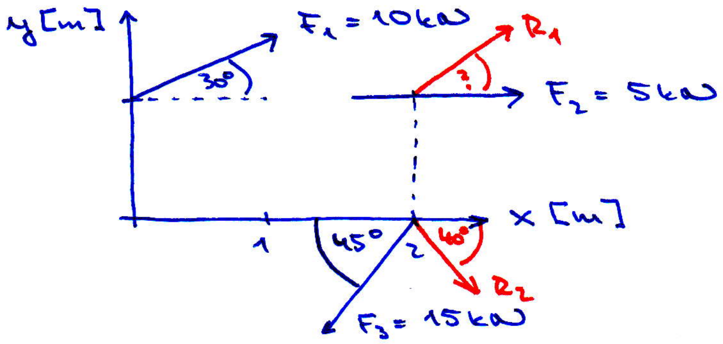
$$0{,}76604\cdot(-6{,}1473) + 0{,}70711\,R_2 = -3{,}0537$$

$$\underline{\underline{R_2 = 2{,}3410\ \mathrm{kN}}}$$

$$-1{,}2856\cdot(-6{,}1473) + 0{,}70711\cdot 2{,}3410 + M_3 = 34{,}873$$

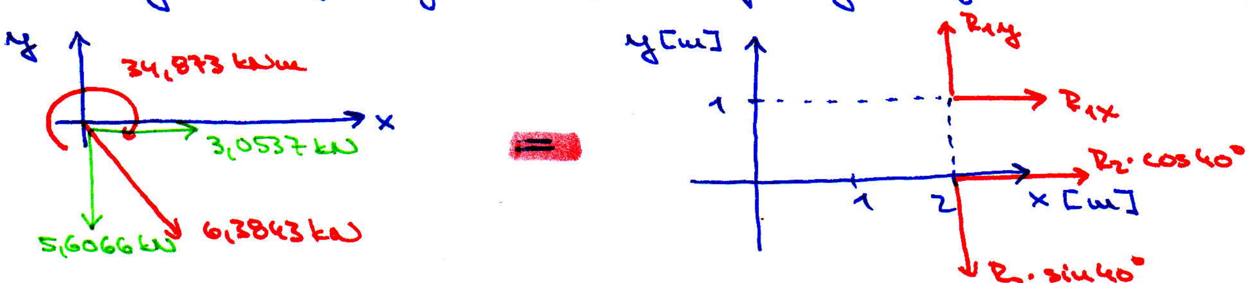
$$\underline{\underline{M_3 = 25{,}315\ \mathrm{kNm}}}$$

Př. **Nahraďte soustavu sil $\{\vec{F}_i\}$ jinou soustavou sil $\{\vec{R}_i\}$.**



$$\boxed{\{\vec{F}_i\} = \{\vec{R}_i\}}$$

Opět s výhodou použijeme spočítaný výsledný účinek sil $\{\vec{F}_i\}$.



$$\rightarrow:\ 3{,}0537 = R_{1x} + R_2\cdot \overset{0{,}76604}{\cos 40^\circ}$$

$$\uparrow:\ -5{,}6066 = R_{1y} - R_2\cdot \overset{0{,}64279}{\sin 40^\circ}$$

$$\circlearrowleft:\ -34{,}873 = -R_{1x}\cdot 1 + R_{1y}\cdot 2 - R_2\cdot \overset{0{,}64279}{\sin 40^\circ}\cdot 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}76604 \\ 0 & 1 & -0{,}64279 \\ -1 & 2 & -1{,}2856 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3{,}0537 \\ -5{,}6066 \\ -34{,}873 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0{,}76604 & 3{,}0537 \\ 0 & 1 & -0{,}64279 & -5{,}6066 \\ -1 & 2 & -1{,}2856 & -34{,}873 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0{,}76604 & 3{,}0537 \\ 0 & 1 & -0{,}64279 & -5{,}6066 \\ 0 & 2 & -0{,}51956 & -31{,}819 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid\cdot(-2) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ (2)+(3) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0{,}76604 & 3{,}0537 \\ 0 & -2 & 1{,}2856 & 11{,}213 \\ 0 & 0 & 0{,}76604 & -20{,}606 \end{array}\right)$$

$$R_2 = \frac{-20{,}606}{0{,}76604} = \underline{\underline{-26{,}899\ \text{kN}}}$$

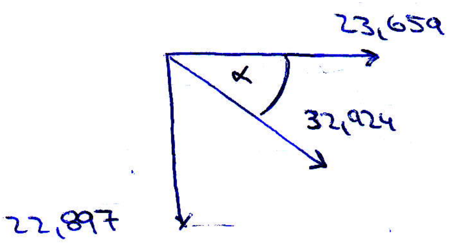
$$-2 \cdot R_{1y} + 1{,}2856 \cdot (-26{,}899) = 11{,}213$$

$$\underline{\underline{R_{1y} = -22{,}897\ \text{kN}}}$$

$$R_{1x} + 0{,}76604 \cdot (-26{,}899) = 3{,}0537$$

$$\underline{\underline{R_{1x} = 23{,}659\ \text{kN}}}$$

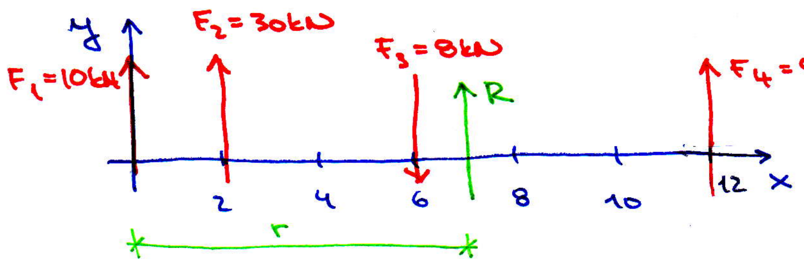
$$R_1 = \sqrt{R_{1x}^2 + R_{1y}^2} = \sqrt{23{,}659^2 + (-22{,}897)^2} = \underline{\underline{32{,}924\ \text{kN}}}$$



$$\cos\alpha = \frac{R_{1x}}{R_1} = \frac{23{,}659}{32{,}924} = 0{,}71859$$

$$\alpha = 44{,}061°$$

Př. Uveďte zadanou soustavu sil do rovnováhy.



$$\{\vec{F_i}\} + \vec{R} = \vec{0}$$

Máme 2 neznámé: sílu R a její vzdálenost od počátku r.
Je potřeba sestavit svislou a momentovou podmínku rovnováhy.

$$\uparrow: \; F_1 + F_2 - F_3 + F_4 + R = 0$$

$$10 + 30 - 8 + 8 + R = 0$$

$$\underline{\underline{R = -40 \text{ kN}}}$$

$$\circlearrowleft o: \; F_2 \cdot 2 - F_3 \cdot 6 + F_4 \cdot 12 + R \cdot r = 0$$

$$30 \cdot 2 - 8 \cdot 6 + 8 \cdot 12 - 40 \cdot r = 0$$

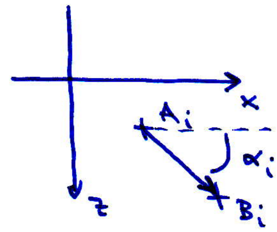
$$\underline{\underline{r = 2{,}7 \text{ m}}}$$

Př. Pro danou obecnou soustavu sil určete redukci k počátku!

$F_1 = 10\ kN \qquad A_1 = [-5, 6] \qquad B_1 = [-2, 2]$

$F_2 = 15\ kN \qquad A_2 = [4, 2] \qquad \alpha_2 = 125°$

$F_3 = 25\ kN \qquad A_3 = [5, -2] \qquad B_3 = [2, -4]$



VARIANTA VÝPOČTU č.2 (viz minulá hodina, 3D svazky sil)

Nalezení směrových cosinů:

1. pro sílu F_1:

směrový vektor $\vec{l_1} = (\overrightarrow{A_1B_1}) = (B_{1x} - A_{1x}, B_{2x} - A_{2x}) =$

$= (-2-(-5), 2-6) = (3, -4)$

$|\vec{l_1}| = \sqrt{l_{1x}^2 + l_{2x}^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$\cos\alpha_1 = \dfrac{l_{1x}}{l_1} = \dfrac{3}{5} = 0{,}6 \quad ; \quad \cos\gamma_1 = \dfrac{l_{1z}}{l_1} = \dfrac{-4}{5} = -0{,}8$

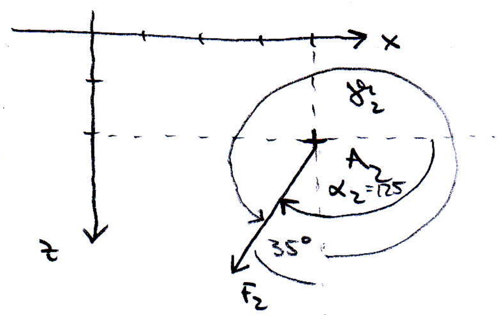
jedná se o směrový cosinus, proto dosazuji včetně znaménka

2. pro sílu F_2: (zadáno α_2)

$\cos\alpha_2 = \cos 125° = -0{,}57358$

$\cos\gamma_2 = \cos(360° - 35°) = 0{,}81915 =$

$= \sin\alpha_2 = \sin 125° = 0{,}81915$



3. pro sílu F_3:

$\vec{l_3} = (\overrightarrow{A_3B_3}) = (B_{3x} - A_{3x}, B_{3z} - A_{3z}) = (2-5, -4-(-2)) =$

$= (-3, -2)$

$|\vec{l_3}| = \sqrt{l_{3x}^2 + l_{3z}^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$\cos\alpha_3 = \dfrac{l_{3x}}{l_3} = \dfrac{-3}{\sqrt{13}} = -0{,}83205 \quad , \quad \cos\gamma_3 = \dfrac{l_{3z}}{l_3} = \dfrac{-2}{\sqrt{13}} = -0{,}55470$

Silová výslednice:

$\rightarrow: F_{Rx} = \sum_{i=1}^{3} F_{ix} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2 + F_3 \cos\alpha_3 =$

$= 10 \cdot 0{,}6 + 15 \cdot (-0{,}57358) + 25 \cdot (-0{,}83205) =$

$= \underline{\underline{-23{,}405\ kN}}$

$\downarrow: F_{Rz} = \sum_{i=1}^{3} F_{iz} = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} = F_1 \cdot \cos \gamma_1 + F_2 \cos \gamma_2 + F_3 \cos \gamma_3 =$

$= 10 \cdot (-0{,}8) + 15 \cdot 0{,}81915 + 25 \cdot (-0{,}55470) =$

$= \underline{\underline{-9{,}5803 \text{ kN}}}$

Momentová výslednice:

$$M_{OR} = \sum_{i=1}^{3} F_{ix} r_{iz} - F_{iz} \cdot r_{ix}$$

- potřebuji zjistit jednotlivé průvodiče a jejich složky r_{ix} a r_{iz}
- pozn. průvodič začíná v bodě, ke kterému dělám redukci, a končí na paprsku síly (resp. známém bodu paprsku síly)

$$\vec{r_1} = (\overrightarrow{OA_1}) = (A_{1x} - 0 \,,\, A_{1z} - 0) = (-5, 6)$$

$$\vec{r_2} = (\overrightarrow{OA_2}) = (A_{2x} - 0 \,,\, A_{2z} - 0) = (+4, 2)$$

$$\vec{r_3} = (\overrightarrow{OA_3}) = (A_{3x} - 0 \,,\, A_{3z} - 0) = (5, -2)$$

$M_{OR} = F_{1x} \cdot r_{1z} - F_{1z} \cdot r_{1x} + F_{2x} \cdot r_{2z} - F_{2z} \cdot r_{2x} + F_{3x} \cdot r_{3z} - F_{3z} \cdot r_{3x} =$

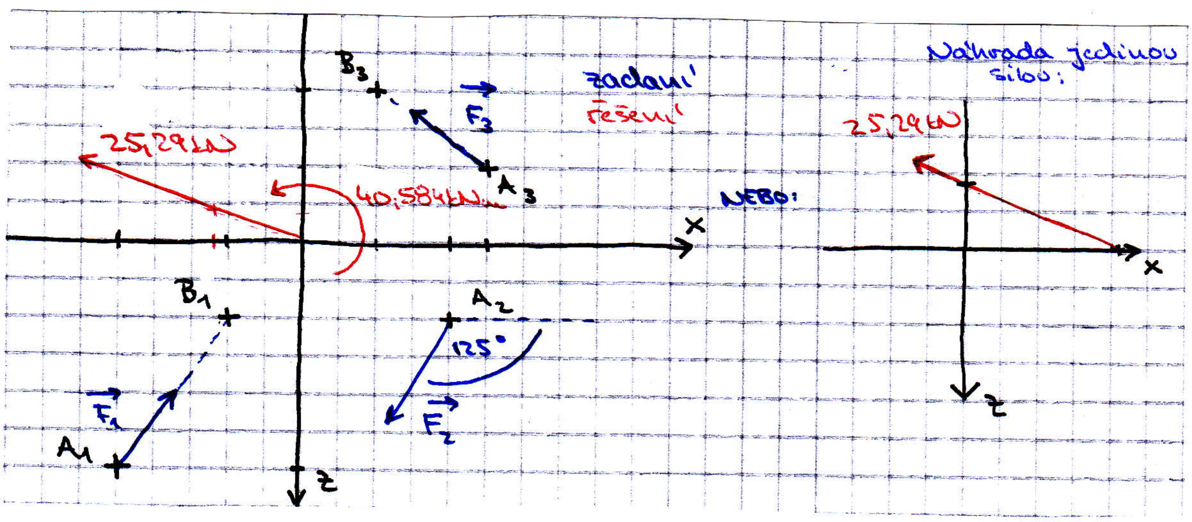
$= 10 \cdot 0{,}6 \cdot 6 - 10 \cdot (-0{,}8) \cdot (-5) +$

$+ 15 \cdot (-0{,}57358) \cdot 2 - 15 \cdot 0{,}81915 \cdot 4 +$

$+ 25 \cdot (-0{,}83205) \cdot (-2) - 25 (-0{,}55470) \cdot 5 =$

$= \underline{\underline{40{,}584 \text{ kNm}}}$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Rz}^2} = \sqrt{(-23{,}405)^2 + (-9{,}5803)^2} = \underline{\underline{25{,}290 \text{ kN}}}$$



Náhrada jedinou silou:

$$M_{OR} = F_{Rx} \cdot z - F_{Rz} \cdot x$$

$$40{,}584 = -23{,}405 \cdot z + (+9{,}5803) \cdot x$$

$z = 0 : x_0 = 4{,}236 \text{ m}$

$x = 0 : z_0 = -1{,}734 \text{ m}$