SMO1 – 4. cvičení

MOMENT SÍLY K BODU

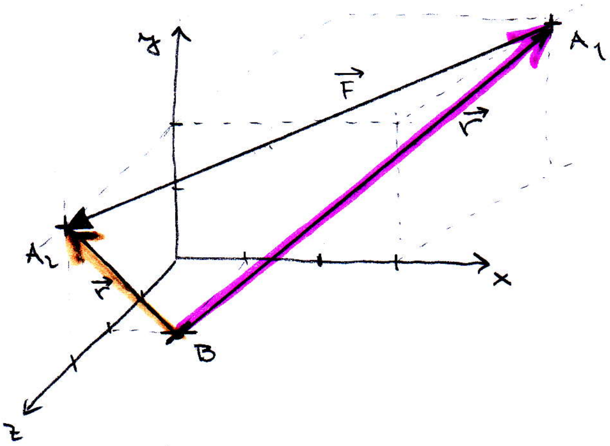
STATICKÝ MOMENT $\vec{M}_S$ SÍLY $\vec{F}$ K BODU S VYJADŘUJE OTÁČIVÝ ÚČINEK SÍLY $\vec{F}$ KOLEM BODU S.

JEDNOTKOVÉ VEKTORY VE SMĚRU KLADNÝCH POLOOS S.S.

$$\vec{M}_S = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{e}_x (F_z \cdot r_y - F_y \cdot r_z) + \vec{e}_y (F_x \cdot r_z - F_z \cdot r_x) + \vec{e}_z (F_y r_x - F_x \cdot r_y) =$$

$$= \vec{e}_x \cdot M_{Sx} + \vec{e}_y \cdot M_{Sy} + \vec{e}_z M_{Sz}$$

Př. Určete statický moment síly $\vec{F}$ k bodu B. Síla $\vec{F}$ je určena velikostí $F = 10$ kN a prochází body $A_1[3,2,-5]$ a $A_2[0,2,3]$. Souřadnice bodu B jsou $[1,0,2]$.



VEKTOR $\vec{F}$ začíná u bodě B a končí kdekoliv na paprsku síly $\vec{F}$.

VARIANTA I

VARIANTA II

(1) Složky síly $\vec{F}$:

směrový vektor $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z) = (A_{x2}-A_{x1}, A_{y2}-A_{y1}, A_{z2}-A_{z1}) =$
$= (0-3, 2-2, 3-(-5)) = (-3, 0, 8)$

jeho velikost $|\vec{l}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 8^2} = \sqrt{9+64} = \sqrt{73}$

směrové cosiny:

$$\cos\alpha = \frac{l_x}{|l|} = \frac{-3}{\sqrt{73}} = -0{,}35112 \quad , \cos\beta = \frac{l_y}{|l|} = 0$$

$$\cos\gamma = \frac{l_z}{|l|} = \frac{8}{\sqrt{73}} = 0{,}93633$$

kontrola: $(-0{,}35112)^2 + 0{,}93633^2 \doteq 1$ ok ✓

$\boxed{F_x} = F \cdot \cos\alpha = 10 \cdot (-0{,}35112) = \boxed{-3{,}5112 \text{ kN}}$

$\boxed{F_y} = F \cdot \cos\beta = 10 \cdot 0 = \boxed{0 \text{ kN}}$

$\boxed{F_z} = F \cdot \cos\gamma = 10 \cdot 0{,}93633 = \boxed{9{,}3633 \text{ kN}}$

2.

VARIANTA I:

(2) Složky vektoru $\vec{r}$:

$$\vec{r} = (A_{1x} - B_x,\ A_{1y} - B_y,\ A_{1z} - B_z) = (3-1,\ 2-0,\ -5-2) = (2,\ 2,\ -7)$$

(3) STATICKÝ MOMENT:

$$\vec{M}_S = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 2 & -7 \\ -3{,}51 & 0 & 9{,}36 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_1 (9{,}36 \cdot 2 - 0 \cdot (-7)) + \vec{e}_2 ((-3{,}51) \cdot (-7) - 9{,}36 \cdot 2) + \vec{e}_3 (0 \cdot 2 - (-3{,}51) \cdot 2) =$$

$$= \underbrace{18{,}72}_{M_{Bx}} \vec{e}_1 + \underbrace{5{,}85}_{M_{By}} \vec{e}_2 + \underbrace{7{,}02}_{M_{Bz}} \vec{e}_3 \quad [\text{kNm}]$$

VARIANTA II:

(ZÁROVEŇ SLOUŽÍ JAKO KONTROLA, NEZKONTROLUJE OVŠEM SYSTEMATICKÉ CHYBY TYPU PŘEHOZENÍ BODŮ VE VÝPOČTU VEKTORU $\vec{r}$ ATP.)

(2) Složky vektoru $\vec{r}$:

$$\vec{r} = (A_{2x} - B_x,\ A_{2y} - B_y,\ A_{2z} - B_z) = (0-1,\ 2-0,\ 3-2) = (-1,\ 2,\ 1)$$

(3) STATICKÝ MOMENT:

$$\vec{M}_S = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3{,}51 & 0 & 9{,}36 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_1 (9{,}36 \cdot 2 - 0 \cdot 1) + \vec{e}_2 ((-3{,}51) \cdot 1 - 9{,}36 \cdot (-1)) + \vec{e}_3 (0 \cdot (-1) - (-3{,}51) \cdot 2) =$$

$$= 18{,}72 \vec{e}_1 + 5{,}85 \vec{e}_2 + 7{,}02 \vec{e}_3 \quad [\text{kNm}]$$

(4) VELIKOST MOMENTU A SMĚROVÉ ÚHLY:

$$|\vec{M}_B| = M_B = \sqrt{M_{Bx}^2 + M_{By}^2 + M_{Bz}^2} = \sqrt{18{,}72^2 + 5{,}85^2 + 7{,}02^2} = 20{,}83 \text{ kNm}$$

$$\cos\alpha = \frac{M_{Bx}}{M_B} = \frac{18{,}72}{20{,}83} = 0{,}8987 \longrightarrow \alpha = 26{,}01^\circ$$

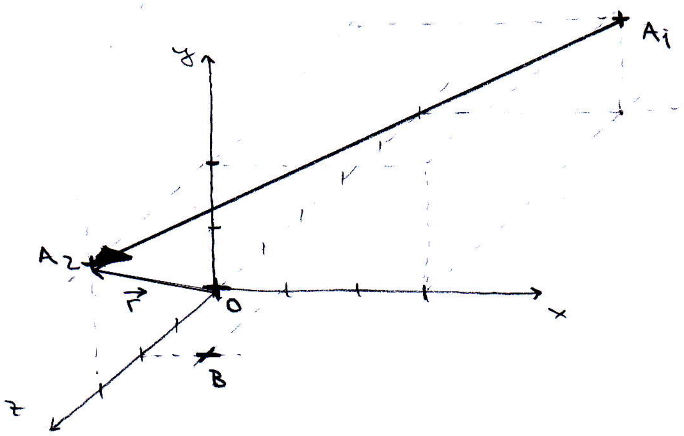
$$\cos\beta = \frac{M_{By}}{M_B} = \frac{5{,}85}{20{,}83} = 0{,}2808 \longrightarrow \beta = 73{,}69^\circ$$

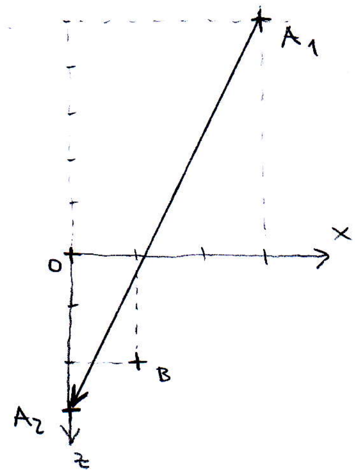
$$\cos\gamma = \frac{M_{Bz}}{M_B} = \frac{7{,}02}{20{,}83} = 0{,}3370 \longrightarrow \gamma = 70{,}30^\circ$$

kontrola: $0{,}8987^2 + 0{,}2808^2 + 0{,}3370^2 \doteq 1$ ok

3.

Př. Sílu $\vec{F}$ z předchozího příkladu použijte pro výpočet statického momentu k počátku. Poté moment posuňte do bodu B.
$(|\vec{F}| = 10\,kN$, $A_1[3,2,-5]$, $A_2[0,2,3]$; $B[1,0,2])$





(1) Složky síly $\vec{F}$:

$F_x = -3{,}5112\ kN$

$F_y = 0\ kN$

$F_z = 9{,}3633\ kN$

(2) Složky vektoru $\vec{r}$:

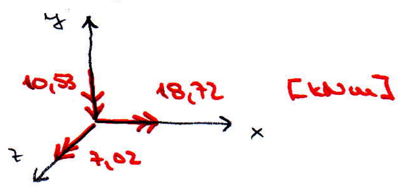
$$\vec{r} = (A_{2x} - O_x,\ A_{2y} - O_y,\ A_{2z} - O_z) = (0, 2, 3)$$

(3) Statický moment:

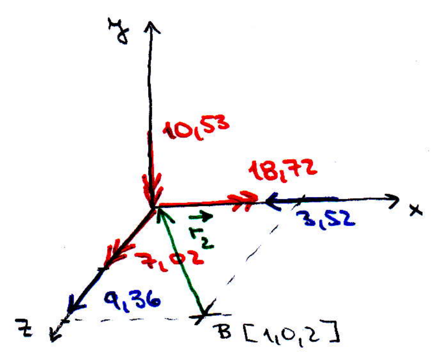
$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -3{,}51 & 0 & 9{,}36 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_1(9{,}36\cdot 2 - 0\cdot 3) + \vec{e}_2((-3{,}51)\cdot 3 - 0\cdot 9{,}36) + \vec{e}_3(0 - (-3{,}51)\cdot 2) =$$

$$= \underbrace{18{,}72\vec{e}_1}_{M_{0x}} \underbrace{- 10{,}53\vec{e}_2}_{M_{0y}} + \underbrace{7{,}02\vec{e}_3}_{M_{0z}} \quad [kNm]$$



(4) Posunutí do bodu B:



$$\vec{r}_2 = (O_x - B_x,\ O_y - B_y,\ O_z - B_z) =$$
$$= (0-1,\ 0-0,\ 0-2) = (-1, 0, -2)$$

$$\vec{M}_B = \vec{M}_0 + \vec{r}_2 \times \vec{F} = [M_{0x}\ M_{0y}\ M_{0z}] \begin{Bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ r_{x2} & r_{y2} & r_{z2} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= 18{,}72\vec{e}_1 - 10{,}53\vec{e}_2 + 7{,}02\vec{e}_3 + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3{,}51 & 0 & 9{,}36 \end{vmatrix} =$$

$$= 18{,}72\vec{e}_1 - 10{,}53\vec{e}_2 + 7{,}02\vec{e}_3 + \vec{e}_1(9{,}36\cdot 0 - 0\cdot 2) + \vec{e}_2\big((-3{,}51)(-2) - 9{,}36\cdot(-1)\big)$$
$$+ \vec{e}_3\big(0\cdot(-1) - (-3{,}51)\cdot 0\big) =$$

$$= 18{,}72\vec{e}_1 - 10{,}53\vec{e}_2 + 7{,}02\vec{e}_3 + 0\cdot\vec{e}_1 + 16{,}38\cdot\vec{e}_2 + 0\,\vec{e}_3 =$$

$$= \underbrace{18{,}72}_{M_{Bx}}\vec{e}_1 + \underbrace{5{,}85}_{M_{By}}\vec{e}_2 + \underbrace{7{,}02}_{M_{Bz}}\vec{e}_3$$

VÝSLEDEK POROVNEJTE S PŘEDCHOZÍM PŘÍKLADEM.

Poznámka: Statický moment síly $\vec{F}$ k počátku a k bodu B se liší pouze ve svých y složkách, protože síla $\vec{F}$ je zadána v rovině rovnoběžné s rovinou xz (složka y bodu A_1 a A_2 je stejná). Pokud by síla $\vec{F}$ byla zadána více obecně, pak by se statické momenty síly $\vec{F}$ k počátku i bodu $\vec{B}$ lišily ve všech třech složkách.

MOMENT SÍLY K OBECNÉ OSE

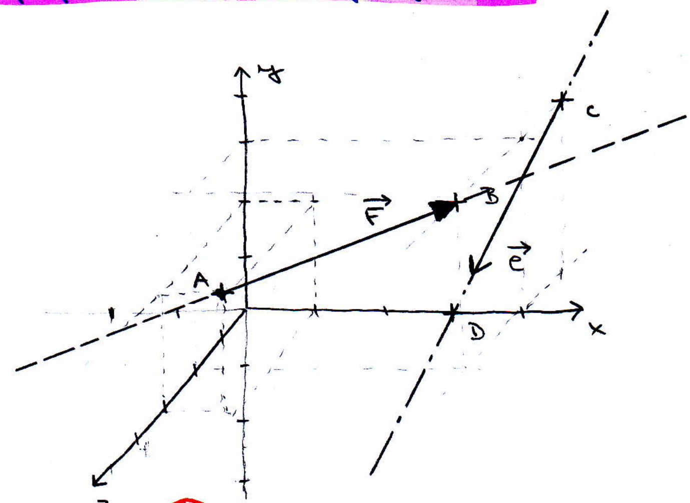
STATICKÝ MOMENT M_e SÍLY $\vec{F}$ K OSE $\vec{e}$ VYJADŘUJE OTÁČIVÝ ÚČINEK SÍLY $\vec{F}$ KOLEM OSY $\vec{e}$. JE DEFINOVÁN SMÍŠENÝM SOUČINEM. SKALÁR.

$$M_e = \vec{e} \cdot (\vec{r} \times \vec{F})$$

↳ $\vec{r}$ VEKTOR S POČÁTKEM KDEKOLIV NA OSE $\vec{e}$ A KONCEM KDEKOLIV NA PAPRSKU SÍLY $\vec{F}$.

↳ $\vec{e}$ JEDNOTKOVÝ VEKTOR VE SMĚRU OSY $\vec{e}$

Př. Určete statický moment síly $\vec{F}$ k ose $\vec{e}$, $F = 10\,kN$ a prochází body A[1,2,3] a B[4,3,2]. Osa $\vec{e}$ je určena body C[4,3,-1] a D[3,0,0].



VARIANTA VÝPOČTU I.

(1) Složky síly $\vec{F}$:

směrový vektor $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z) = (B_x - A_x, B_y - A_y, B_z - A_z) =$
$= (4-1, 3-2, 2-3) = (3, 1, -1)$

- jeho velikost $|\vec{l}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$

směrové cosiny:

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{11}} = 0{,}90453$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{11}} = 0{,}30151$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{11}} = -0{,}30151$$

kontrola: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
$0{,}90453^2 + 0{,}30151^2 + (-0{,}30151)^2 \doteq 1$ ok ✓

$$\boxed{F_x} = F \cdot \cos\alpha = 10 \cdot 0{,}90453 = \boxed{9{,}0453\ kN}$$

$$\boxed{F_y} = F \cdot \cos\beta = 10 \cdot 0{,}30151 = \boxed{3{,}0151\ kN}$$

$$\boxed{F_z} = F \cdot \cos\gamma = 10 \cdot (-0{,}30151) = \boxed{-3{,}0151\ kN}$$

kontrola: $\overbrace{F = 10}^{\text{ZE ZADÁNÍ}} \overset{?}{=} \sqrt{9{,}0453^2 + 3{,}0151^2 + (-3{,}0151)^2} \doteq 10\ kN$ ✓ ok

6

(2) Složky jednotkového vektoru $\vec{e}$:

směrový vektor: $\vec{h} = (h_x, h_y, h_z) = (D_x - C_x, D_y - C_y, D_z - C_z) =$
$= (3-4, 0-3, 0-(-1)) = (-1, -3, 1)$

velikost vektoru $\vec{h}$: $|\vec{h}| = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

složky jednotkového vektoru $\vec{e}$:

$\boxed{e_x} = \frac{h_x}{h} = \frac{-1}{\sqrt{11}} = \boxed{-0{,}30151}$

$\boxed{e_y} = \frac{h_y}{h} = \frac{-3}{\sqrt{11}} = \boxed{-0{,}90453}$

$\boxed{e_z} = \frac{h_z}{h} = \frac{1}{\sqrt{11}} = \boxed{0{,}30151}$

kontrola: velikost jednotkového vektoru je rovna 1.

$|e| = \sqrt{(-0{,}30151)^2 + (-0{,}90453)^2 + 0{,}30151} \doteq 1$ ✓ ok

(3) Složky vektoru $\vec{r}$:

Volím počátek vektoru $\vec{r}$ v bodě C [4, 3, −1] (leží na ose) a konec vektoru $\vec{r}$ v bodě A [1, 2, 3].
↳ leží na paprsku síly

$\boxed{r_x} = A_x - C_x = 1 - 4 = \boxed{-3}$

$\boxed{r_y} = A_y - C_y = 2 - 3 = \boxed{-1}$

$\boxed{r_z} = A_z - C_z = 3 - (-1) = \boxed{4}$

(4) MOMENT SÍLY $\vec{F}$ K OSE $\vec{e}$

$$M_e = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0{,}302 & -0{,}905 & 0{,}302 \\ -3 & -1 & 4 \\ 9{,}0453 & 3{,}0151 & -3{,}0151 \end{vmatrix} =$$

$= (-3{,}0151)(-1)(-0{,}302) + 4 \cdot (-0{,}905) \cdot 9{,}0453 + 3{,}0151 \cdot (-3) \cdot 0{,}302 -$
$- 9{,}0453 \cdot (-1) \cdot 0{,}302 - (-3)(-0{,}905)(-3{,}0151) - 3{,}0151 \cdot 4 \cdot (-0{,}302) =$
$= \underline{\underline{-21{,}826 \text{ kNm}}}$

VARIANTA VÝPOČTU (II.) (VÝPOČET STATICKÉHO MOMENTU K BODU NA OSE $\vec{e}$ A SKAL.SOUČIN S JEDNOTKOVÝM VEKTOREM)

VOLÍM BOD NA OSE $\vec{e}$: např. D A SPOČÍTÁM K NĚMU MOMENT:

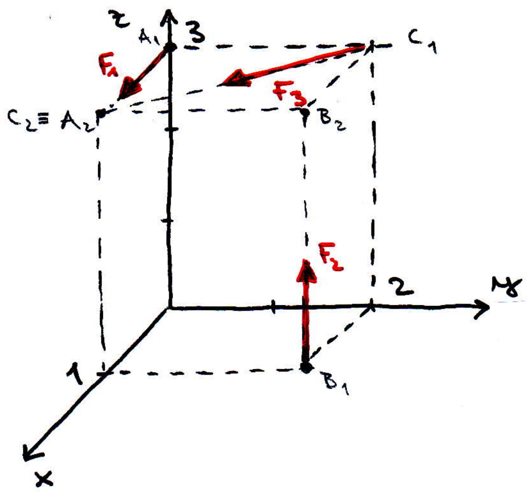
$\vec{r}_2 = (B_x - D_x, B_y - D_y, B_z - D_z) = (4-3, 3-0, 2-0) = (1, 3, 2)$

$$\vec{M}_D = \vec{r}_2 \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 9{,}0453 & 3{,}0151 & -3{,}0151 \end{vmatrix} = \vec{e}_1(-3{,}0151 \cdot 3 - 3{,}0151 \cdot 2) + \vec{e}_2(9{,}0453 \cdot 2 - 1 \cdot (-3{,}0151)) +$$
$$+ \vec{e}_3(3{,}0151 \cdot 1 - 9{,}0453 \cdot 3) = -15{,}0755\vec{e}_1 + 21{,}1057\vec{e}_2$$
$$= -15{,}0755\vec{e}_1 + 21{,}1057\vec{e}_2 - 24{,}1208\vec{e}_3 = [-15{,}0755,\ 21{,}1057,\ -24{,}1208]^T$$

$$M_e = \vec{e} \cdot \vec{M}_D = [-0{,}30151\ \ -0{,}90453\ \ 0{,}30151] \begin{Bmatrix} -15{,}0755 \\ 21{,}1057 \\ -24{,}1208 \end{Bmatrix} = \underline{\underline{-21{,}82 \text{ kNm}}}$$

OBECNÁ SOUSTAVA SIL V PROSTORU

Př. Proveďte redukci zadané soustavy sil k počátku.



$F_1 = 10\,kN$

$F_2 = 10\,kN$

$F_3 = 5\,kN$

(1) Složky síly F_1: $A_1[0,0,3]$, $A_2[1,0,3]$

$\vec{l_1} = (l_{x1}, l_{x2}, l_{x3}) = (1-0, 0-0, 3-3) = (1,0,0)$

$|\vec{l_1}| = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = 1$

$\cos\alpha_1 = 1$	$F_{x1} = 10\cdot 1 = 10\,kN$
$\cos\beta_1 = 0$	$F_{y1} = 0\,kN$
$\cos\gamma_1 = 0$	$F_{z1} = 0\,kN$

(2) Složky síly F_2: $B_1[1,2,0]$, $B_2[1,2,3]$

$\vec{l_2} = (l_{x2}, l_{y2}, l_{z2}) = (B_{2x}-B_{1x}, B_{2y}-B_{1y}, B_{2z}-B_{1z}) =$
$= (1-1, 2-2, 3-0) = (0,0,3)$

$|\vec{l_2}| = \sqrt{0^2+0^2+3^2} = 3$

$\cos\alpha_2 = 0$	$F_{x2} = 0\,kN$
$\cos\beta_2 = 0$	$F_{y2} = 0\,kN$
$\cos\gamma_2 = 1$	$F_{z2} = 10\cdot 1 = 10\,kN$

(3) Složky síly F_3: $C_1[0,2,3]$, $C_2[1,0,3]$

$\vec{l_3} = (l_{x3}, l_{y3}, l_{z3}) = (1-0, 0-2, 3-3) = (1,-2,0)$

$|\vec{l_3}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+0^2} = \sqrt{5}$

$\cos\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}44721$	$F_{x3} = 5\cdot 0{,}447 = 2{,}235\,kN$
$\cos\beta_3 = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -0{,}89443$	$F_{y3} = 5\cdot(-0{,}894) = -4{,}47\,kN$
$\cos\gamma_3 = 0$	$F_{z3} = 0\,kN$

(4) Silová výslednice $\vec{F_R}$:

$$\swarrow: F_{Rx} = \sum_{i=1}^{3} F_{xi} = 10 + 0 + 2{,}235 = \underline{\underline{12{,}235\ kN}}$$

$$\rightarrow: F_{Ry} = \sum_{i=1}^{3} F_{yi} = 0 + 0 + (-4{,}47) = \underline{\underline{-4{,}47\ kN}}$$

$$\uparrow: F_{Rz} = \sum_{i=1}^{3} F_{zi} = 0 + 10 + 0 = \underline{\underline{10\ kN}}$$

$$|\vec{F_R}| = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2} = \sqrt{12{,}235^2 + (-4{,}47)^2 + 10^2} = \underline{\underline{16{,}422\ kN}}$$

(5) Momentová výslednice $\vec{M_R}$:

(5a): Vektory $\vec{r_i}$: počátek vektoru v O, konec na paprsku síly F_i

$$\vec{r_1} = \vec{OA_1} = (0-0,\ 0-0,\ 3-0) = (0, 0, 3)$$
$$\vec{r_2} = \vec{OB_1} = (1-0,\ 2-0,\ 0-0) = (1, 2, 0)$$
$$\vec{r_3} = \vec{OC_1} = (0-0,\ 2-0,\ 3-0) = (0, 2, 3)$$

$$M_0 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$M_{0x} = \sum_{i=1}^{3} (F_{zi} \cdot r_{yi} - F_{yi} \cdot r_{zi}) =$$
$$= 0 \cdot 0 - 0 \cdot 3 + 10 \cdot 2 - 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 - (-4{,}47) \cdot 3 =$$
$$= 10 \cdot 2 + 4{,}47 \cdot 3 = \underline{\underline{33{,}41\ kNm}}$$

$$M_{0y} = \sum_{i=1}^{3} (F_{xi} \cdot r_{zi} - F_{zi} \cdot r_{xi}) =$$
$$= 10 \cdot 3 - 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 10 \cdot 1 + 2{,}235 \cdot 3 - 0 \cdot 0 =$$
$$= 10 \cdot 3 - 10 \cdot 1 + 2{,}235 \cdot 3 = \underline{\underline{26{,}705\ kNm}}$$

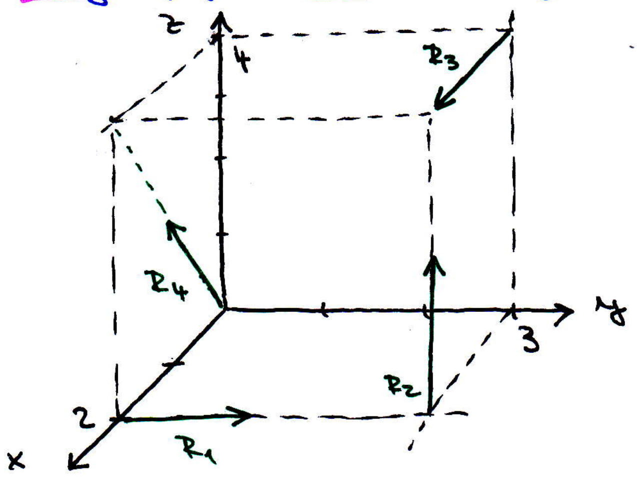
$$M_{0z} = \sum_{i=1}^{3} (F_{yi} \cdot r_{xi} - F_{xi} \cdot r_{yi}) =$$
$$= 0 \cdot 0 - 10 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 \cdot 2 + (-4{,}47) \cdot 0 - 2{,}235 \cdot 2 =$$
$$= -2{,}235 \cdot 2 = \underline{\underline{-4{,}47\ kNm}}$$

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2} = \sqrt{33{,}41^2 + 26{,}705^2 + (-4{,}47)^2} = \underline{\underline{43{,}00\ kNm}}$$

Pozn. Není nutno dosazovat do vzorců pro jednotlivé složky momentů. Výsledek je možné určit z obrázku. Palec strčíme do příslušné osy a prsty určují ⊕ směr otáčení. Poté stačí už jen dohledat příslušná ramena otáčení.

PRAVÉ RUKY !

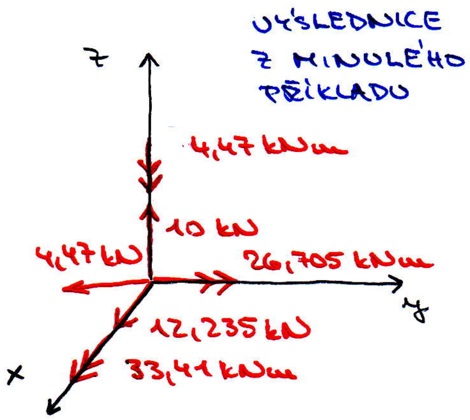
Př. Uveďte soustavu z minulého příkladu ($\vec{F}_1$ až $\vec{F}_3$) do rovnováhy silami $\vec{R}_1$ až $\vec{R}_5$. Síly $\vec{R}_1$ až $\vec{R}_4$ jsou zadány svým paprskem a síla $\vec{R}_5$ leží v rovině yz a prochází počátkem.



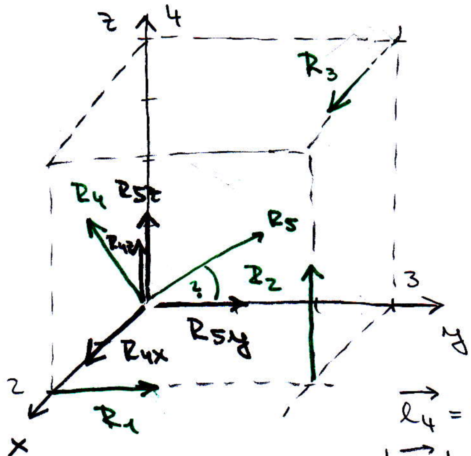
! Nezapomeň na sílu $\vec{R}_5$!

S výhodou využijeme spočtané výslednice z minulého příkladu.

$$\{\vec{F}_i\} + \{\vec{R}_i\} = \vec{0}$$
$$\{\vec{M}_{OF}\} + \{\vec{M}_{OR}\} = \vec{0}$$



$+$



$= \vec{0}$

$$\vec{r}_4 = (2, 0, 4)$$
$$|\vec{r}_4| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$$

(1) SILOVÉ PODMÍNKY ROVNOVÁHY:

$\swarrow$: $12{,}235 + R_3 + R_4 \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} = 0$

$\rightarrow$: $-4{,}47 + R_1 + R_{5y} = 0$

$\uparrow$: $10 + R_2 + R_{5z} + R_4 \cdot \frac{4}{\sqrt{20}} = 0$

(2) MOMENTOVÉ PODMÍNKY ROVNOVÁHY:

$\swarrow$: $33{,}41 + R_2 \cdot 3 = 0 \longrightarrow R_2 = \underline{\underline{-11{,}137\ \text{kN}}}$

$\twoheadrightarrow$: $26{,}705 - R_2 \cdot 2 + R_3 \cdot 4 = 0 \longrightarrow R_3 = \underline{\underline{-12{,}245\ \text{kN}}}$

$\uparrow$: $-4{,}47 + R_1 \cdot 2 - R_3 \cdot 3 = 0 \longrightarrow R_1 = \underline{\underline{-16{,}133\ \text{kN}}}$

a dosadím do silových podmínek rovnováhy:

$\swarrow$: $12{,}235 + (-12{,}245) + R_4 \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} = 0 \longrightarrow R_4 = \underline{\underline{-0{,}0224\ \text{kN}}}$

$\rightarrow$: $-4{,}47 + (-16{,}133) + R_{5y} = 0 \longrightarrow R_{5y} = \underline{\underline{20{,}603\ \text{kN}}}$

$\uparrow$: $10 + (-11{,}137) + R_{5z} + (-0{,}0224) \cdot \frac{4}{\sqrt{20}} = 0 \longrightarrow \underline{\underline{R_{5z} = 1{,}157\ \text{kN}}}$

$$|\vec{R_5}| = \sqrt{R_{5y}^2 + R_{5z}^2} = \sqrt{20{,}603^2 + 1{,}157^2} = \underline{\underline{20{,}635\ \text{kN}}}$$

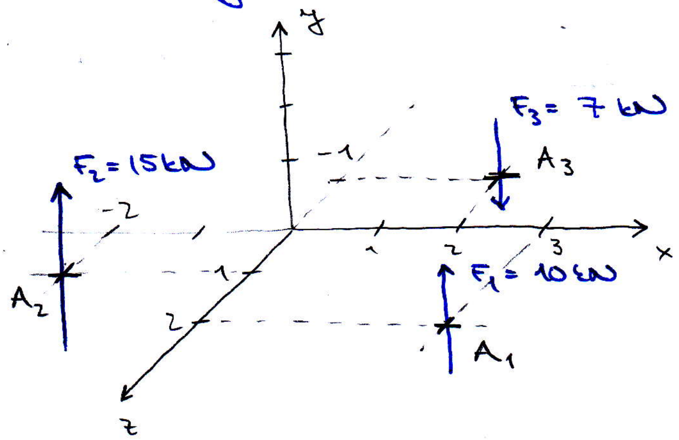
$$\cos\alpha_5 = \frac{R_{5x}}{R_5} = 0 \longrightarrow \alpha_5 = 0^\circ$$

$$\cos\beta_5 = \frac{R_{5y}}{R_5} = \frac{20{,}603}{20{,}635} = 0{,}998 \longrightarrow \beta_5 = 3{,}19^\circ \qquad \boxed{?}$$

$$\cos\gamma_5 = \frac{R_{5z}}{R_5} = \frac{1{,}157}{20{,}635} = 0{,}056 \longrightarrow \gamma_5 = 86{,}786^\circ$$

SOUSTAVA ROVNOBĚŽNÝCH SIL V PROSTORU

Př. Stanovte výslednici zadané soustavy sil.



$A_1\,[3, 0, 2]$

$A_2\,[-2, 0, 1]$

$A_3\,[2, 0, -1]$

$\uparrow$: $F_{Ry} = 10 + 15 - 7 = 18\,kN$

$\rightarrow, \swarrow$: $F_{Rx} = 0$, $F_{Rz} = 0$

$\twoheadrightarrow$: $M_{ORx} = -10 \cdot 2 - 15 \cdot 1 - 7 \cdot 1 = -42\,kNm$

$\upuparrows$: $M_{ORy} = 0$

$\swarrow\!\swarrow$: $M_{ORz} = -15 \cdot 2 + 10 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = -14\,kNm$

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{e_1}(F_z \cdot r_y - F_y \cdot r_z) + \vec{e_2}(F_x r_z - F_z \cdot r_x) + \vec{e_3}(F_y \cdot r_x - F_x \cdot r_y)$$

$$M_{ORx} = \cancelto{0}{F_z} \cdot r_y - F_y \cdot r_z$$

$$M_{ORx} = -F_{Ry} \cdot r_z \longrightarrow r_z = -\frac{M_{ORx}}{F_{Ry}} = -\frac{-42}{18} = 2{,}333\,m$$

$$M_{ORz} = F_y \cdot r_x - \cancelto{0}{F_x} \cdot r_y$$

$$M_{ORz} = F_y \cdot r_x \longrightarrow r_x = \frac{M_{ORz}}{F_{Ry}} = \frac{-14}{18} = -0{,}778\,m$$