Úvod do spolehlivosti konstrukcí

Zápočtové testy

- Čt 6. 1. 2011 od 13:00 B280, B286
- Čt 13. 1. 2011 od 13:00 B280, B286

- Z toho vyplývá posun poslední termín odevzdání seminární práce na St 12.1.2011

Úvod do spolehlivosti konstrukcí

B. Teplý, D. Novák: Spolehlivost stavebních konstrukcí, VUT, 1998

M. Holický: Zásady ověřování spolehlivosti a životnosti staveb, ČVUT, 1998

D. Jarušková: Matematická statistika, ČVUT, 1990

Úvod do teorie pravděpodobnosti

Náhodný jev: jev, jehož výsledek není jednoznačně určen předepsanými podmínkami.

Deterministický jev: jev, jehož výsledek je jednoznačně určen předepsanými podmínkami.

Náhodná veličina: veličina popisující náhodný jev.

Dva druhy náhodných veličin: diskrétní a spojité.

Označení: X je náhodná veličina, x je hodnota náhodné veličiny

Diskrétní náhodné veličiny

Diskrétní náhodná veličina nabývá konečného množství hodnot. Ty ji definují.

$$X \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Každé hodnotě x_i odpovídá pravděpodobnost výskytu p_i. Diskrétní náhodná veličina může být definována tabulkou

x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Diskrétní náhodné veličiny

Pozor:

$$\forall i : 0 \leq p_i \leq 1$$

$$\sum_{i}^{n} p_i = 1$$

Pravděpodobnost, že náhodná veličina X nabývá hodnoty x se označuje $P(X = x)$. V případě diskrétní náhodné veličiny platí

$$P(X = x_i) = p_i$$

Příklad

náhodný jev: hod hrací kostkou

náhodná veličina: výsledek hodu

Tabulka definující náhodnou veličinu

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

□

Parametry

Střední hodnota diskrétní náhodné veličiny

$$EX = \sum_{i}^{n} x_i p_i$$

Rozptyl diskrétní náhodné veličiny

$$VarX = \sum_{i}^{n} (x_i - EX)^2 p_i$$

Směrodatná odchylka diskrétní náhodné veličiny

$$\sigma = \sqrt{VarX} = \sqrt{\sum_{i}^{n} (x_i - EX)^2 p_i}$$

Poznámka

- Směrodatná odchylka

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \overline{x}^2},$$

- Výběrová směrodatná odchylka
  - Pro skutečný výpočet **odhadu** směrodatné odchylky na empiricky zjištěné řadě čísel

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}.$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\overline{x}^2\right)}$$

[Wikimedia]

Příklad

náhodný jev: hod hrací kostkou

náhodná veličina: výsledek hodu

střední hodnota

$$EX = 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{1}{6} + 3.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 5.\frac{1}{6} + 6.\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3,5$$

Příklad

rozptyl

$$
\begin{aligned}
VarX &= (1-3,5)^2.\frac{1}{6} + (2-3,5)^2.\frac{1}{6} + (3-3,5)^2.\frac{1}{6} + \\
&+ (4-3,5)^2.\frac{1}{6} + (5-3,5)^2.\frac{1}{6} + (6-3,5)^2.\frac{1}{6} = \\
&= \frac{17,5}{6} = 2,91666666
\end{aligned}
$$

směrodatná odchylka

$$
\sigma = \sqrt{VarX} = \sqrt{\frac{17,5}{6}} = \sqrt{2,91666666} = 1,707825
$$

$\square$

Distribuční funkce

Distribuční funkce náhodné veličiny je definována

$$F(x) = P(X < x)$$

Slovy: distribuční funkce náhodné veličiny vypočtená pro určitou hodnotu x je rovna pravděpodobnosti, že náhodná veličina je menší než použitá hodnota x.

Vlastnosti distribuční funkce

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

Příklad

náhodný jev: hod hrací kostkou

náhodná veličina: výsledek hodu

distribuční funkce

Příklad

$$x \in (-\infty, 1\rangle \qquad F(x) = 0$$

$$x \in (1, 2\rangle \qquad F(x) = \tfrac{1}{6}$$

$$x \in (2, 3\rangle \qquad F(x) = \tfrac{2}{6}$$

$$x \in (3, 4\rangle \qquad F(x) = \tfrac{3}{6}$$

$$x \in (4, 5\rangle \qquad F(x) = \tfrac{4}{6}$$

$$x \in (5, 6\rangle \qquad F(x) = \tfrac{5}{6}$$

$$x \in (6, \infty) \qquad F(x) = \tfrac{6}{6} = 1$$

Např. $F(2,76) = P(X < 2,76) = \frac{2}{6}$: pravděpodobnost, že padne číslo menší než $2,76$, je $\frac{2}{6}$, protože podmínce vyhovuje výsledek hodu 1, nebo 2.

$\square$

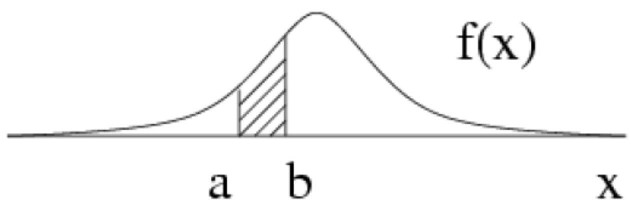
Spojité náhodné veličiny

Spojitá náhodná veličina nabývá nekonečného množství hodnot.

Výčet hodnot nemá smysl. Definuje se hustota pravděpodobnosti $f(x)$.

Pravděpodobnost, že náhodná veličina X leží v intervalu (a, b)

$$P(X \in (a,b)) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



Z předchozího vztahu plyne, že

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$

U spojitých veličin nemá smysl zkoumat pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá konkrétní hodnoty. Zkoumá se pravděpodobnost, že náhodná veličina leží v intervalu (a, b).

Spojité náhodné veličiny

Střední hodnota spojité náhodné veličiny

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x$$

Rozptyl spojité náhodné veličiny

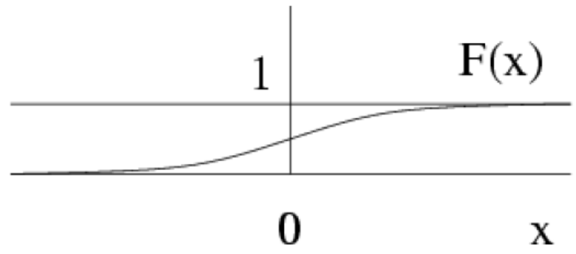
$$VarX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) \mathrm{d}x$$

Směrodatná odchylka spojité náhodné veličiny

$$\sigma = \sqrt{VarX} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) \mathrm{d}x}$$

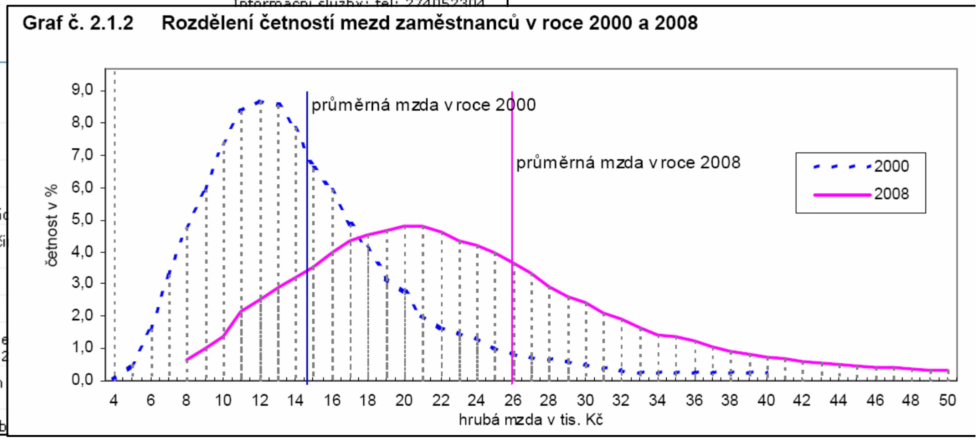
Distribuční funkce

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \mathrm{d}t$$



Slovy: distribuční funkce v bodě x se rovná obsahu plochy pod hustotou pravděpodobnosti od $-\infty$ do x.

Další parametry - příklad



Tab. č. 2.1.3 Ukazatele mzdové diferenciace a kvantily za roky 2000 až 2008

Ukazatel		2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
průměrná mzda (Kč)		**15 187**	**16 353**	**18 133**	**19 510**	**20 545**	**21 674**	**22 908**	**24 604**	**26 349**
minimální mzda (Kč)		4 250	5 000	5 700	6 200	6 700	7 185	7 763	8 000	8000
první decil	D1	7 953	8 508	9 247	9 814	10 240	10 675	11 299	12 139	12 805
první kvartil	Q1	10 172	10 951	11 946	12 729	13 430	14 062	14 728	15 775	16 854
medián	**M**	**13 100**	**14 139**	**15 542**	**16 707**	**17 706**	**18 589**	**19 512**	**20 908**	**22 217**
třetí kvartil	Q3	17 094	18 370	20 138	21 725	23 071	24 421	25 636	27 516	29 368
devátý decil	D9	23 046	24 661	27 281	29 416	31 004	33 063	35 083	37 721	40 332
decilový poměr	D9/D1	2,90	2,90	2,95	3,00	3,03	3,10	3,10	3,11	3,15
kvartilový poměr	Q3/Q1	1,68	1,68	1,69	1,71	1,72	1,74	1,74	1,74	1,74
variační koeficient	VK	72,5	73,2	79,9	79,3	79,3	77,9	83,3	83,3	85,7

Pramen: MPSV

Normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti

Nejznámější a nejpoužívanější rozdělení pravděpodobnosti.

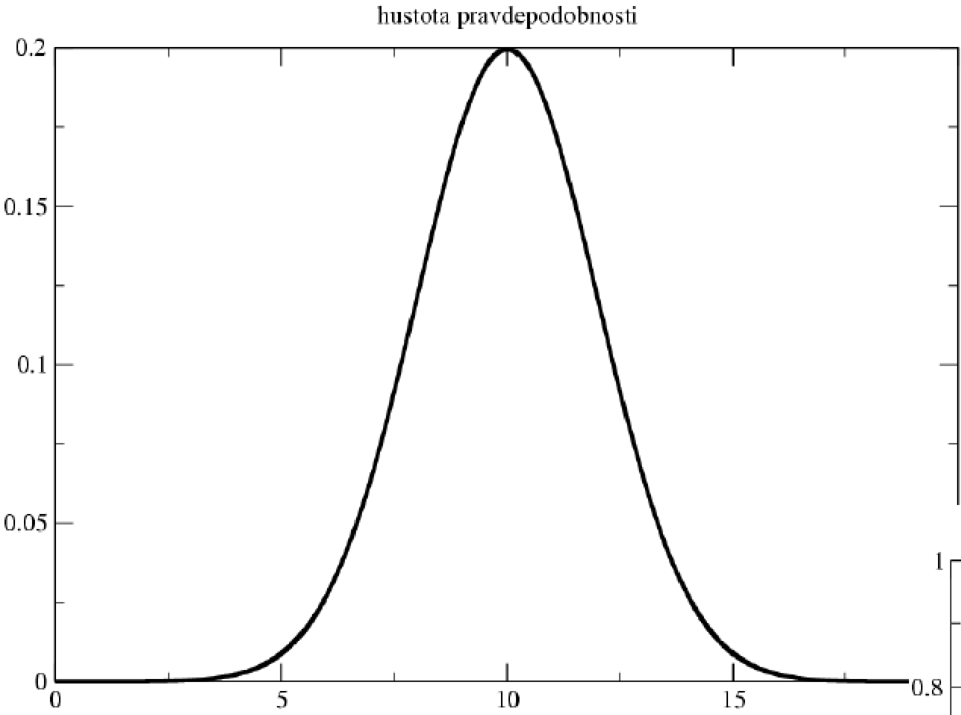
Hustota pravděpodobnosti

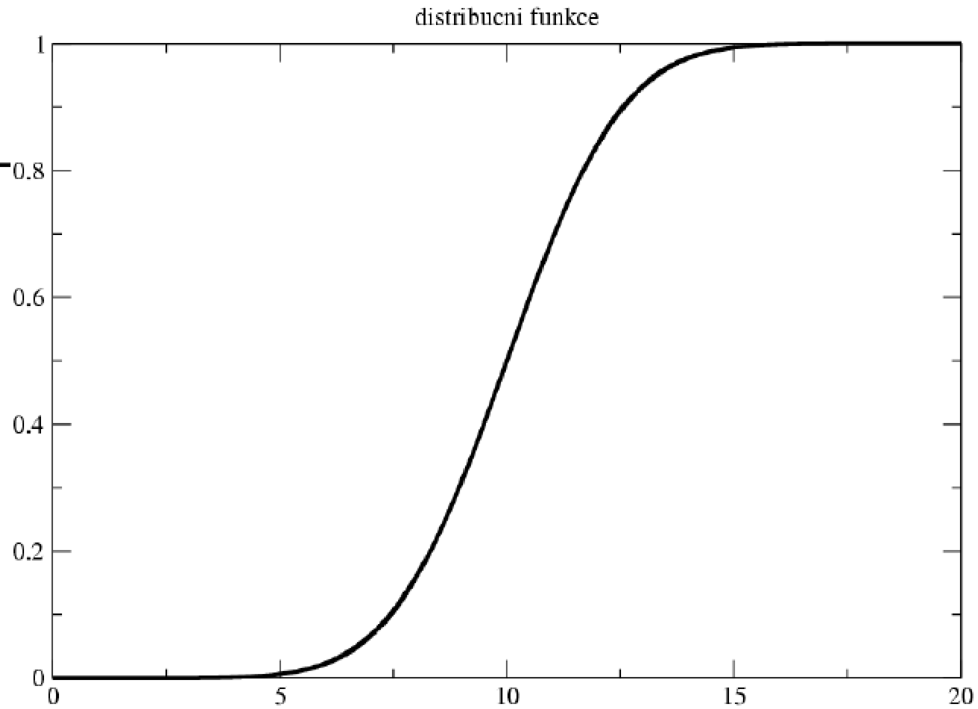
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\mu = EX$ je střední hodnota náhodné veličiny

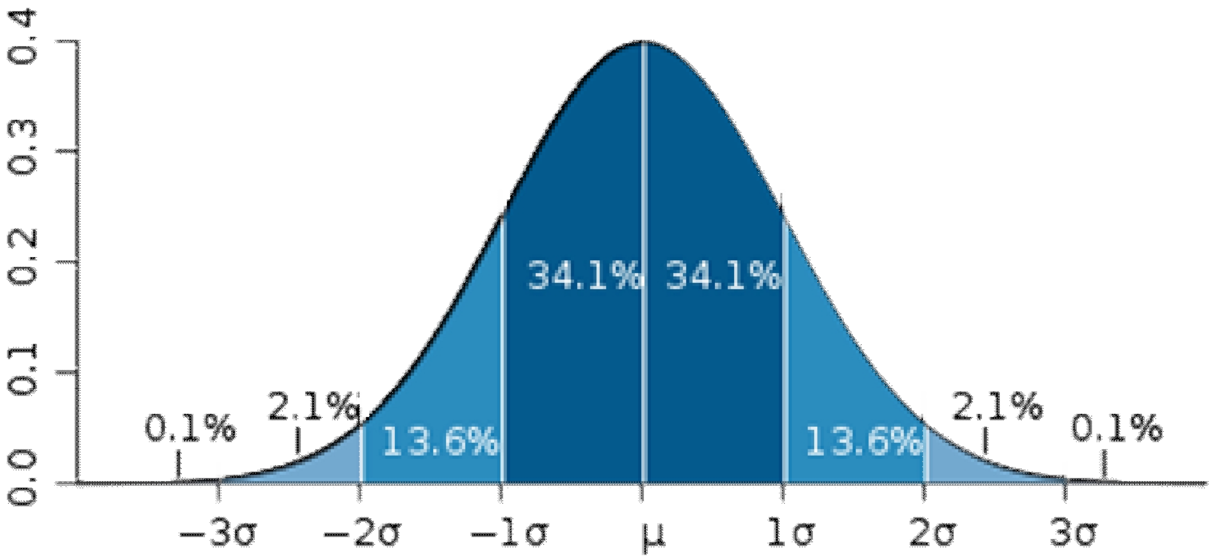
σ je směrodatná odchylka náhodné veličiny

Normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti





Normální (Gaussovo) rozdělení pravděpodobnosti



[Wikimedia]

Standardní normální rozdělení pravděpodobnosti

Normální rozdělení pravděpodobnosti, jehož střední hodnota je rovna 0 a směrodatná odchylka je rovna 1, se nazývá standardní normální rozdělení pravděpodobnosti.

Je-li X normálně rozdělená náhodná veličina, je X' standardně normálně rozdělená náhodná veličina, právě tehdy když

$$X' = \frac{X - EX}{\sigma_x}$$

Úvod do teorie spolehlivosti

Základní pojmy

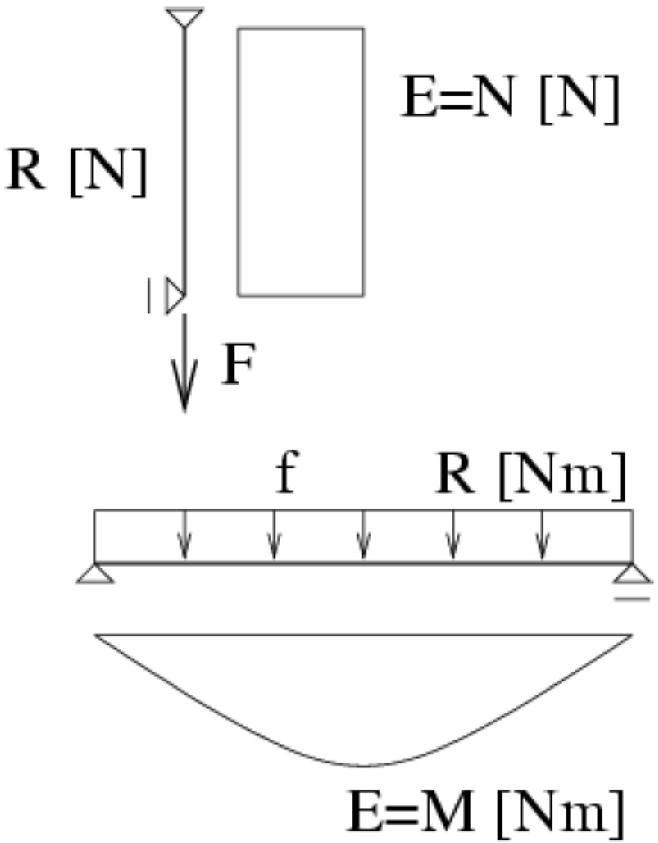
Kvalita systému: souhrn vlastností, které charakterizují užitkové vlastnosti systému.

Provoz systému: cílové působení systému, ale také souhrn všech ostatních operací, počínaje vyrobením až do montáže nebo demolice.

Ztráta kvality: může nastat nejen během funkční činnosti systému, ale také již při montáži nebo dopravě prvků systému. Ztráta kvality může být dílčí nebo úplná.

Spolehlivost: vlastnost systému, která má za následek zachování kvality po celou dobu provozu; je to stabilita kvality systému vzhledem ke všem možným poruchám.

Index spolehlivosti



Index spolehlivosti

účinek zatížení E (náhodná veličina)

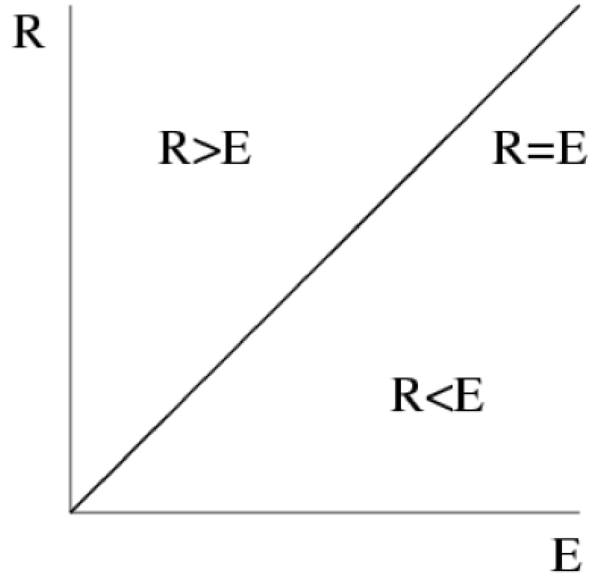
odolnost konstrukce R (náhodná veličina)

systém funguje $R > E$

systém nefunguje $R < E$

hranice poruchy $R = E$

hranice spolehlivosti



Rezerva spolehlivosti

jsou-li odolnost konstrukce a účinek zatížení normálně rozdělené náhodné veličiny, definuje se rezerva spolehlivosti $Z = R - E$

střední hodnota odolnosti konstrukce	μ_R
směrodatná odchylka odolnosti konstrukce	σ_R
střední hodnota účinku zatížení	μ_E
směrodatná odchylka účinku zatížení	σ_E
střední hodnota rezervy spolehlivosti	$\mu_Z = \mu_R - \mu_E$
směrodatná odchylka rezervy spolehlivosti	$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}$

vztahy pro parametry rezervy spolehlivosti jsou známy jen výjimečně

Rezerva spolehlivosti

hustota pravděpodobnosti odolnosti konstrukce

$$f_R(r) = \frac{1}{\sigma_R\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{(r-\mu_R)^2}{2\sigma_R^2}}$$

hustota pravděpodobnosti účinku zatížení

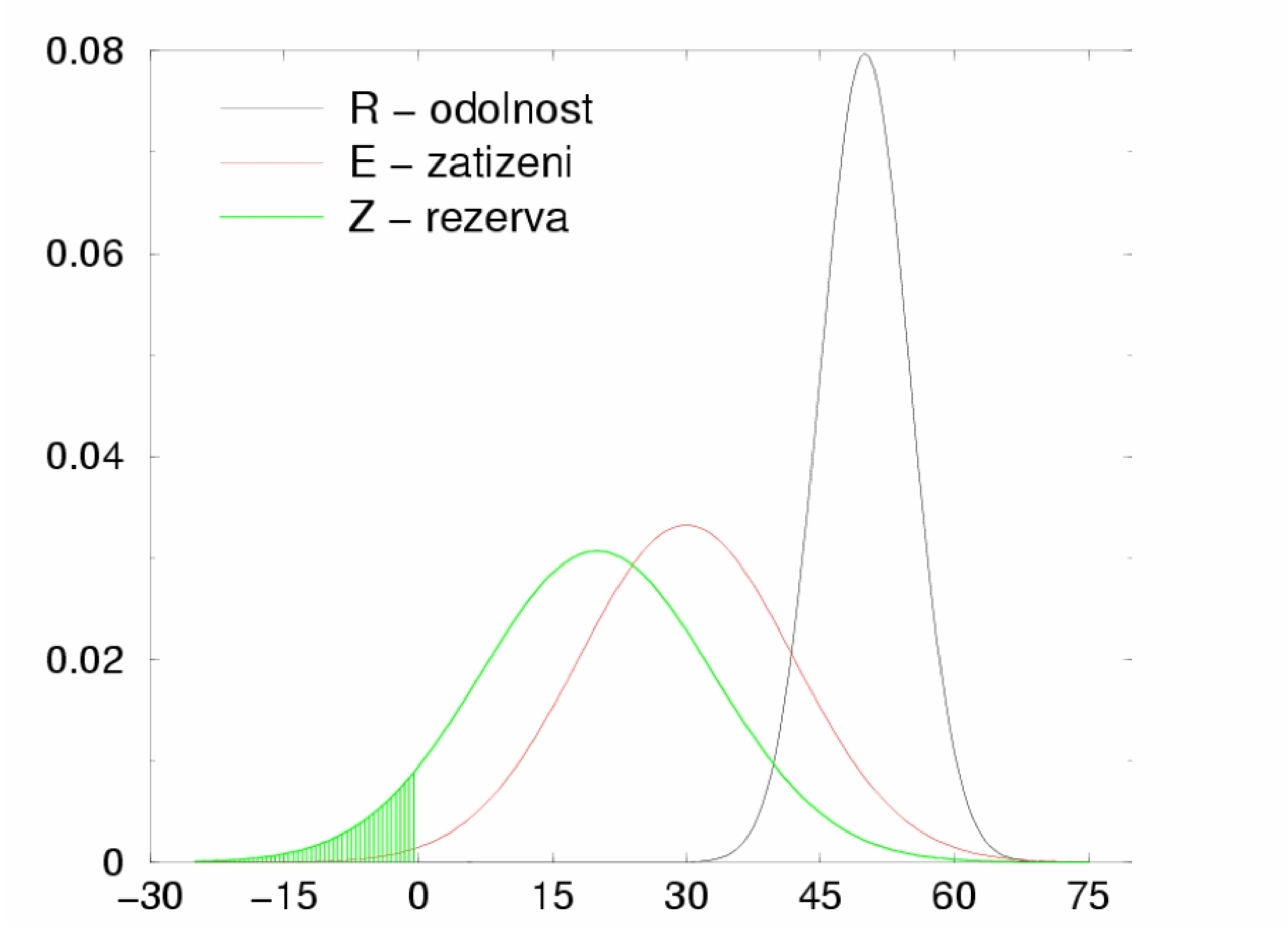
$$f_E(e) = \frac{1}{\sigma_E\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{(e-\mu_E)^2}{2\sigma_E^2}}$$

[eurokód označuje účinek zatížení E, e, což se překrývá s označením Eulerova čísla $e = 2,71828182..$, hustotu pravděpodobnosti lze psát ve tvaru $f_E(e) = \frac{1}{\sigma_E\sqrt{2\pi}} \; exp(-\frac{(e-\mu_E)^2}{2\sigma_E^2})$]

hustota pravděpodobnosti rezervy spolehlivosti

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma_Z\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{(z-\mu_Z)^2}{2\sigma_Z^2}}$$

Rezerva spolehlivosti



Index spolehlivosti

Konstrukce je spolehlivá, pokud $Z > 0$

Pravděpodobnost, že $Z > 0$ se určí z hustoty pravděpodobnosti

$$P(Z > 0) = \int_0^\infty f_Z(z)\mathrm{d}z$$

transformace na standardní normální rozdělení $z' = \dfrac{z - \mu_Z}{\sigma_Z}$

$$P(Z > 0) = \int_{-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}}^\infty f_{Z'}(z')\mathrm{d}z'$$

index spolehlivosti $\beta = \dfrac{\mu_Z}{\sigma_Z}$

$$P(Z > 0) = \int_{-\beta}^\infty f_{Z'}(z')\mathrm{d}z' = F(\infty) - F(-\beta) = F(\beta)$$

Distribuční funkce standardního normálního rozdělení

Pro x<0 užijte vztahu: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

Pro kvantily norm. normálního rozdělení platí: $x_p = -x_{1-p}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839

[M. Jarošová: Web: Stochastické metody modelování]

Distribuční funkce standardního normálního rozdělení

Výpočet na počítači

[editovat]

Různé matematické programy obvykle umožňují výpočet hustoty pravděpodobnosti i distribuční funkce. V následujícím textu jsou uvedeny dva často používané programy: tabulkový kalkulátor Microsoft Excel a matematický software Matlab (respektive open-source klon GNU Octave).

	Excel	Matlab
Hustota pravděpodobnosti $f(x)$	`= NORMDIST(x; μ; σ; NEPRAVDA)` [3]	`normpdf(x, μ, σ)` [4]
Distribuční funkce $F(x)$	`= NORMDIST(x; μ; σ; PRAVDA)` [5]	`normcdf(x, μ, σ)` [6]
Inverzní distribuční funkce $F^{-1}(x)$	`= NORMINV(x; μ; σ)` $0 < x < 1$ [7]	`norminv(x, μ, σ)` $0 \leq x \leq 1$ [8]

[Wikimedia]

Požadovaný index spolehlivosti

mezní stav	β pro návrhovou životnost	β pro jeden rok
únosnosti	3,8	4,7
únavy	1,5 - 3,8	-
použitelnosti	1,5	3,0

Obecný případ

① Sdružená hustota pravděpodobnosti

sdružená hustota pravděpodobnosti $f_{E,R}(e,r)$

$$P(R > E) = \int\int_{\Omega_S} f_{E,R}(e,r)\mathrm{d}e\mathrm{d}r = \int\int_{\Omega_S} f_E(e) f_R(r)\mathrm{d}e\mathrm{d}r$$

$$P(R > E) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{e}^{\infty} f_E(e) f_R(r)\mathrm{d}r\mathrm{d}e$$

distribuční funkce odolnosti konstrukce $F_R(r)$

$$P(R > E) = \int_{-\infty}^{\infty} (F_R(\infty) - F_R(e)) f_E(e)\mathrm{d}e$$

$$P(R > E) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_R(e)) f_E(e)\mathrm{d}e$$

diskretizace

$$P(R > E) = \sum_{i=1}^{i=n} (1 - F_R(e_i)) p_i$$

① Diskretizace spojité veličiny

1. dělení osy x na podintervaly
2. výpočet hodnot $x_i^{'}$
3. výpočet pravděpodobnosti

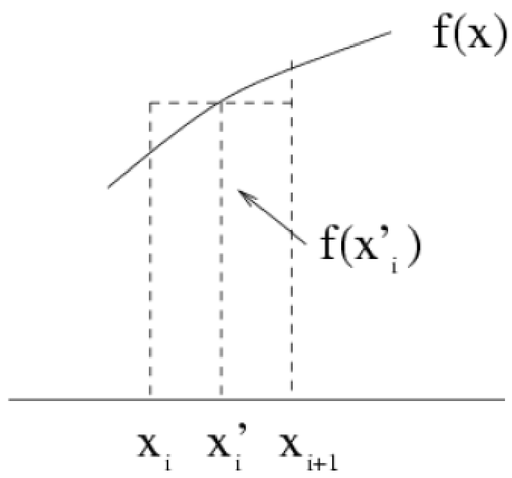
$$P(X \in (x_i, x_{i+1})) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_X(x)\mathrm{d}x$$

pro "malé" podintervaly lze počítat

$$P(X \in (x_i, x_{i+1})) \approx f_X(x_i^{'})(x_{i+1} - x_i)$$

4. pravděpodobnosti výskytu

$$P(X = x_i^{'}) = p_i = P(X \in (x_i, x_{i+1}))$$



viz příklad od A. Kučerové

② FORM

$$Z = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

$$g(X_1,\ldots,X_n) \approx g(\mu_1,\ldots,\mu_n) + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial g(\mu_1,\ldots,\mu_n)}{\partial X_i}(X_i - \mu_i),$$

$$\mu_Z = g(\mu_1,\ldots,\mu_n)$$

a směrodatná odchylka rezervy spolehlivosti

$$\sigma_Z = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial g(\mu_1,\ldots,\mu_n)}{\partial X_i} \right)^2 \sigma_{X_i}^2} \; .$$

Index spolehlivosti je opět definován rovnicí

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z}$$

a spolehlivost se vypočte ze vzorce

$$S = P(Z > 0) = F_{SNR}(\beta).$$

③ Odvození indexu spolehlivosti z geometrie (metoda AFOSM)

hranice poruchy $e = r$

transformace na standardní veličiny

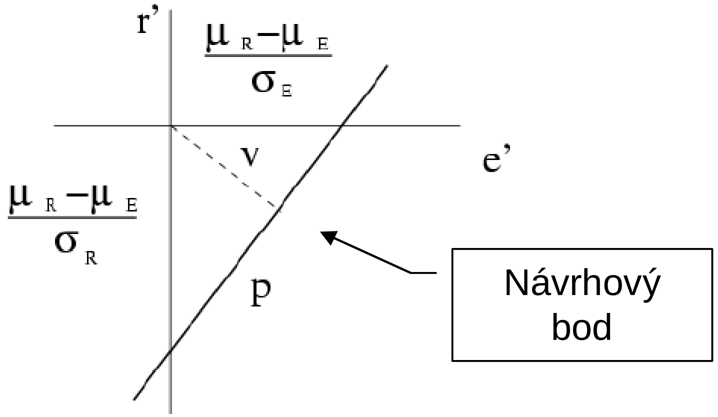
$$e' = \frac{e - \mu_E}{\sigma_E}, r' = \frac{r - \mu_R}{\sigma_R}$$

hranice po transformaci

$$\mu_R + \sigma_R r' = \mu_E + \sigma_E e'$$

rovnice přímky

$$r' = \frac{\sigma_E}{\sigma_R} e' + \frac{\mu_E - \mu_R}{\sigma_R}$$



③ Odvození indexu spolehlivosti z geometrie (metoda AFOSM)

přepona

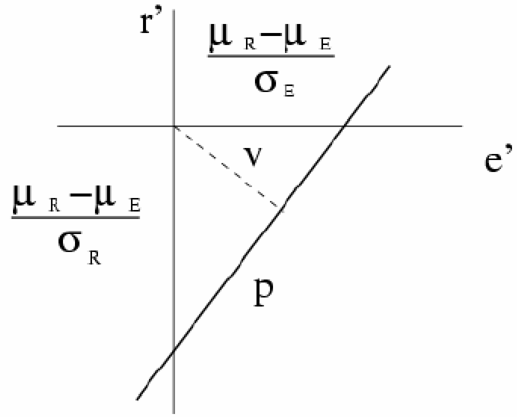
$$p = \sqrt{\left(\frac{\mu_R - \mu_E}{\sigma_R}\right)^2 + \left(\frac{\mu_R - \mu_E}{\sigma_E}\right)^2}$$

výpočet vzdálenosti přímky od počátku

$$\frac{1}{2}pv = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_R - \mu_E}{\sigma_R}\right)\left(\frac{\mu_R - \mu_E}{\sigma_E}\right)$$

výpočet vzdálenosti přímky od počátku

$$v = \frac{\mu_R - \mu_E}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}} = \beta$$

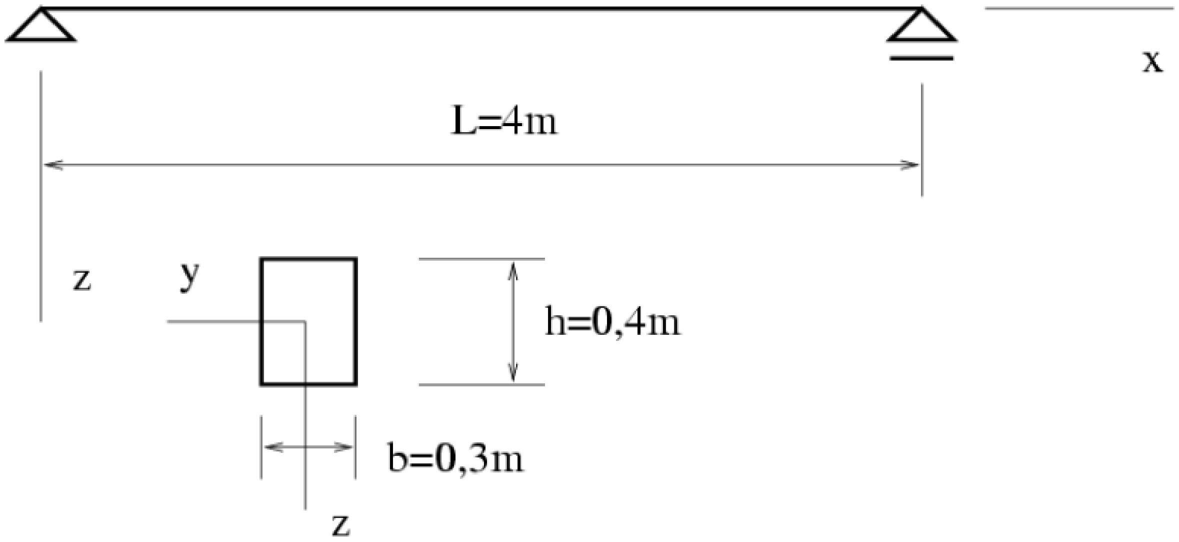


④ Simulační techniky

- Monte Carlo
- Quazi Monte Carlo – Metoda Latin Hypercube Sampling
- Importance Sampling

Úvodní příklad

Metodou dílčích součinitelů posuďte prostý nosník vyrobený ze železobetonu zatížený vlastní tíhou. Situace je znázorněna na obrázku.



Úvodní příklad

Rozhodující je v tomto případě ohybový moment

$$E_d = M = \frac{1}{8} f L^2 = \frac{1}{8} \rho b h g L^2$$

ρ je objemová hmotnost

b, h jsou rozměry příčného řezu

$g = 9.80665 \ ms^{-2}$ je tíhové zrychlení

L je rozpětí nosníku

$$E_d < R_d$$

R_d je odolnost průřezu, způsob výpočtu se dozvíte na katedře betonových konstrukcí

Úvodní příklad

Laboratorní výsledky - objemová hmotnost betonu [kg/m^3]

2293.33	2302.22	2322.96	2305.19	2287.41	2278.52
2142.22	2287.41	2308.15	2269.63	2287.41	2328.89
2305.19	2305.19	2287.41	2293.33	2337.78	2328.89
2263.70	2322.96	2367.41	2358.52	2284.44	2275.56
2334.81	2343.70	2272.59	2305.19	2308.15	2305.19
2278.52	2325.93	2322.96	2290.37	2317.04	2322.96
2299.26	2302.22	2234.07	2331.85	2302.22	2391.11
2317.04	**2547.73**	2314.07	2281.48	2302.22	2328.89
2281.48	2311.11	2370.37	2343.70	2242.96	2242.96

Úvodní příklad

podle laboratorních výsledků vychází zatížení

$$f_{min} = \rho_{min} bhg = 2142,22 \;.\; 0,3 \;.\; 0,4 \;.\; 9,80665 = 2520,96 \;\; N/m$$

$$f_{max} = \rho_{max} bhg = 2547,73 \;.\; 0,3 \;.\; 0,4 \;.\; 9,80665 = 2998,16 \;\; N/m$$

a ohybový moment

$$M_{min} = \frac{1}{8} f_{min} L^2 = \frac{1}{8} 2520,96 \;.\; 4^2 = 5041,92 \;\; Nm$$

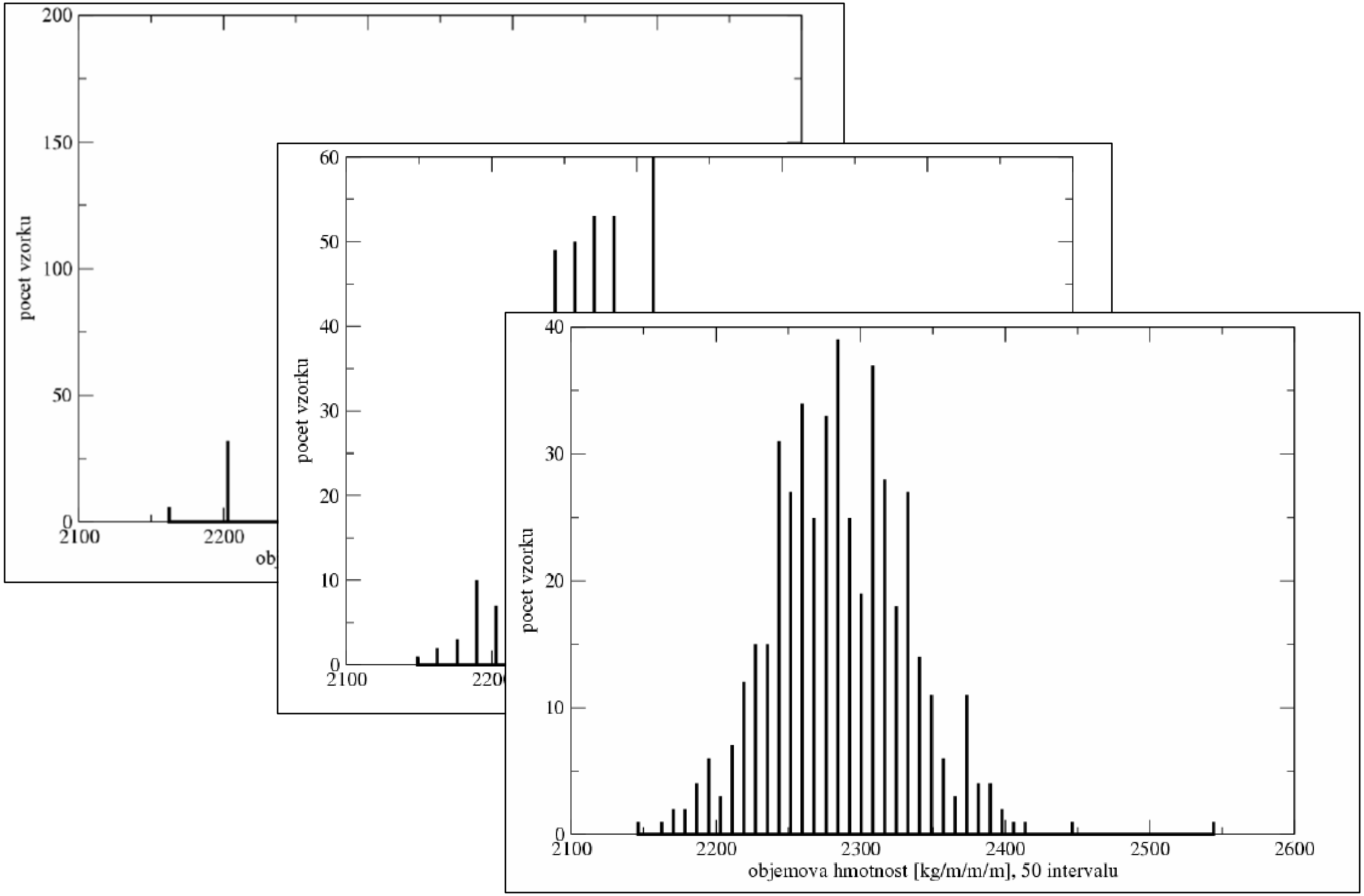
$$M_{max} = \frac{1}{8} f_{max} L^2 = \frac{1}{8} 2998,16 \;.\; 4^2 = 5996,32 \;\; Nm$$

Úvodní příklad

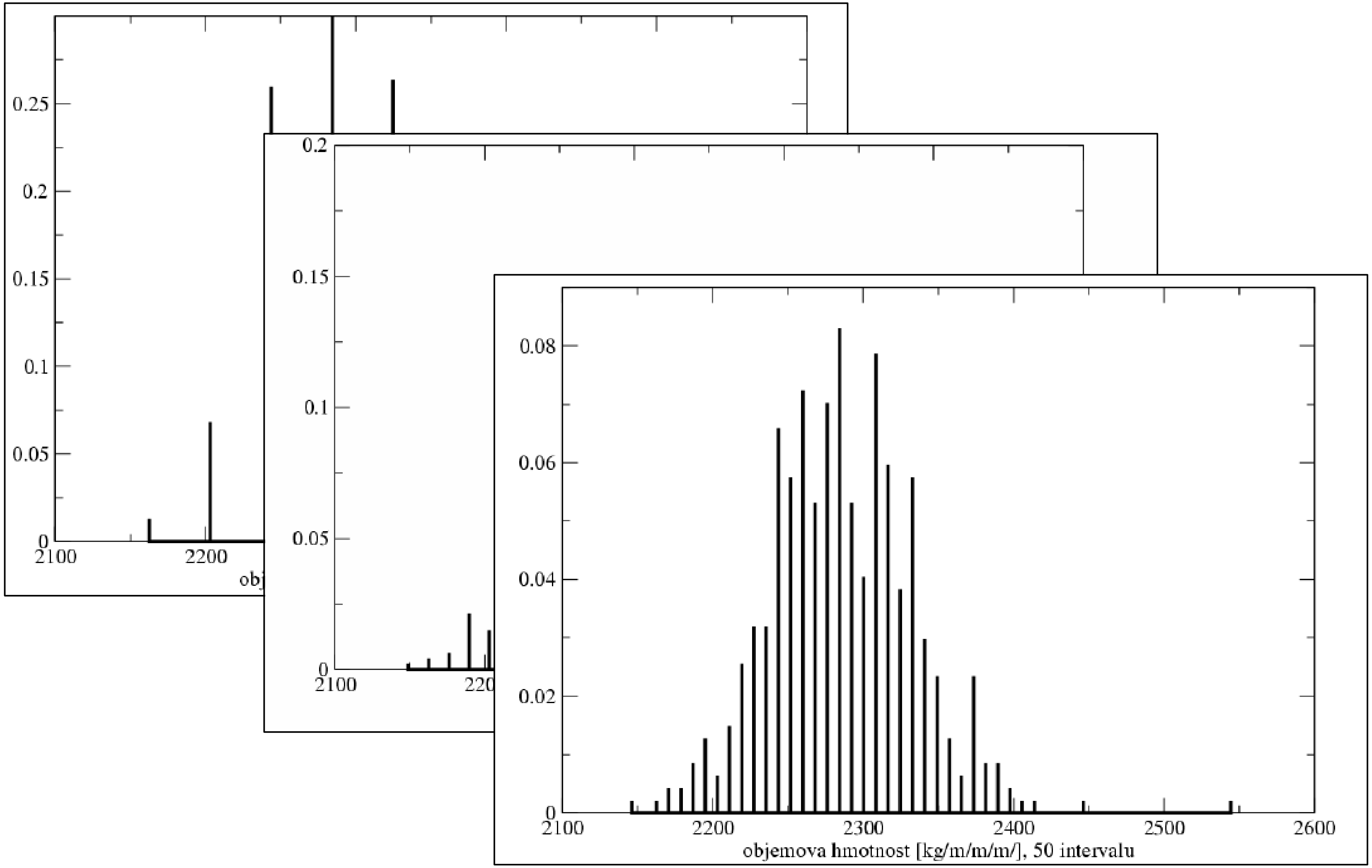
Charakteristické hodnoty zatížení

- **charakteristická hodnota stálého zatížení**: je-li variabilita G malá, použije se jediná hodnota G_k, je-li variabilita G velká, použijí se dvě hodnoty; horní $G_{k,sup}$ a dolní $G_{k,inf}$. Ve většině případů lze definovat G_k jako průměr, $G_{k,inf}$ jako 0,05 kvantil a $G_{k,sup}$ jako 0,95 kvantil.
- **charakteristická hodnota nahodilého zatížení**: horní hodnota s určenou pravděpodobností, že nebude přestoupena, nebo dolní hodnota s určenou pravděpodobností, že nebude podkročena během určité referenční doby. Není-li známé rozdělení pravděpodobnosti, stanoví se nominální hodnota

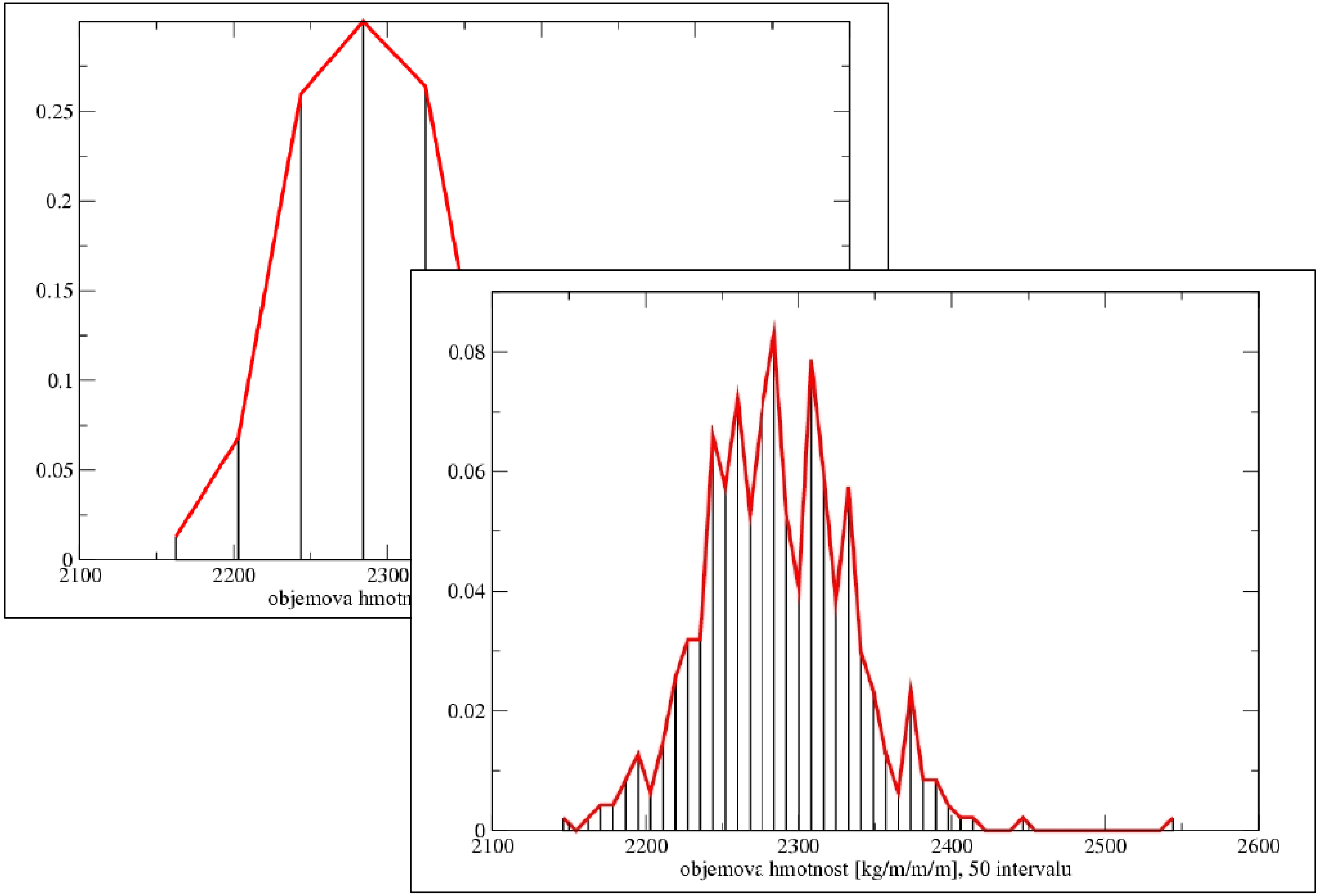
Úsečkový diagram, histogram (angl. histogram)



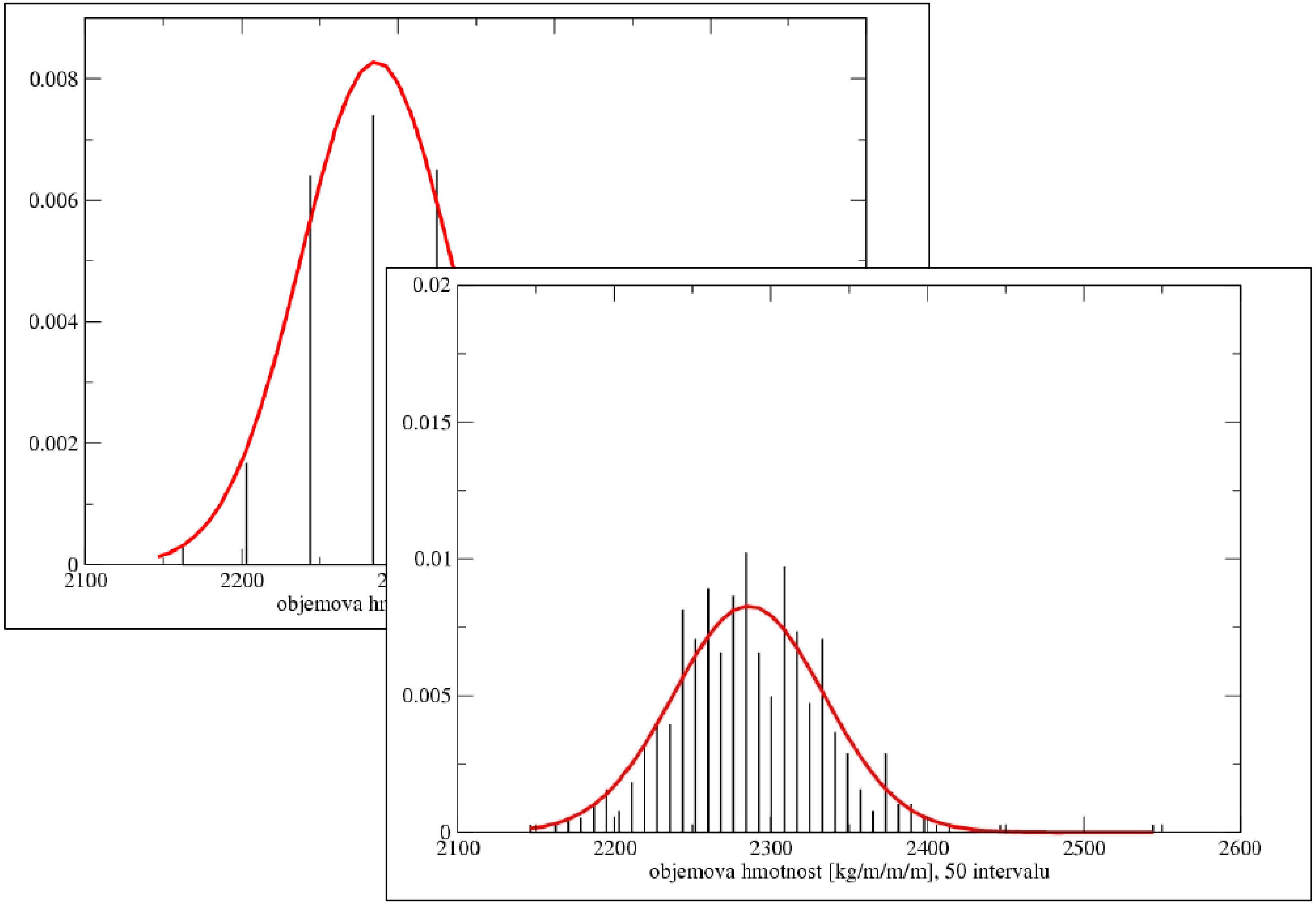
Pravděpodobnostní funkce (angl. frequency diagram, probability mass function)



Pravděpodobnostní funkce (angl. frequency diagram, probability mass function)



Hustota pravděpodobnosti (angl. probability density function)



Tento dokument je určen výhradně jako doplněk k přednáškám z předmětu Zatížení a spolehlivost pro studenty Stavební fakulty ČVUT v Praze. Dokument je průběžně doplňován, opravován a aktualizován a i přes veškerou snahu autora může obsahovat nepřesnosti a chyby.

Při přípravě této přednášky byla použita řada materiálů laskavě poskytnutých doc. Ing. Janem Zemanem, Ph.D., doc. Ing. Jaroslavem Kruisem, Ph.D. a doc. Ing. Petrem Fajmanem, CSc. ze Stavební fakulty ČVUT v Praze. Ostatní zdroje jsou ocitovány v místě použití.

Prosba. V případě, že v textu objevíte nějakou chybu nebo budete mít námět na jeho vylepšení, ozvěte se prosím na **matej.leps@fsv.cvut.cz**.

Datum poslední revize: 6.12.2010