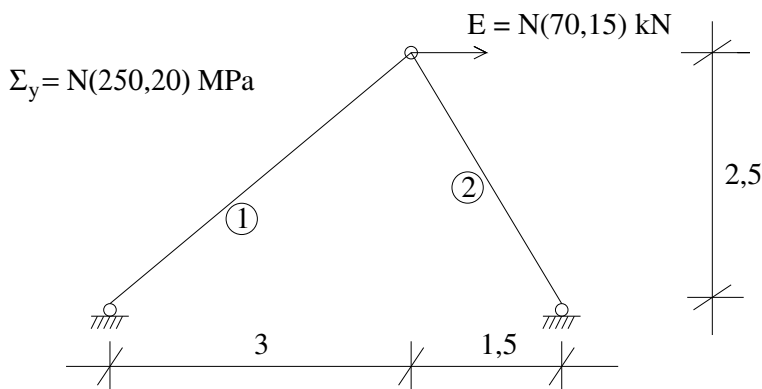


Určete spolehlivost dané ocelové konstrukce zatížené podle schématu 1.



Obrázek 1: Schéma konstrukce

Pruty dané konstrukce jsou duté ocelové trubky o vnějším průměru d_e a tloušťce stěny t , viz tabulka 1.

Číslo prutu	d_e [mm]	t [mm]
1	32	4,5
2	70	4

Tabulka 1: Parametry prutů konstrukce

Konstrukce je zatížena silou E , která je definovaná jako náhodná veličina s normálním rozdělením, jehož střední hodnota je $\mu_E = 70\text{kN}$ a směrodatná odchylka je $\sigma_E = 15\text{kN}$. Oba pruty konstrukce jsou ze stejného typu ocele, jejíž mez kluzu Σ_y je opět náhodná veličina s normálním rozdělením, tentokrát však se střední hodnotou $\mu_\Sigma = 250\text{MPa}$ a směrodatnou odchylkou $\sigma_\Sigma = 20\text{MPa}$.

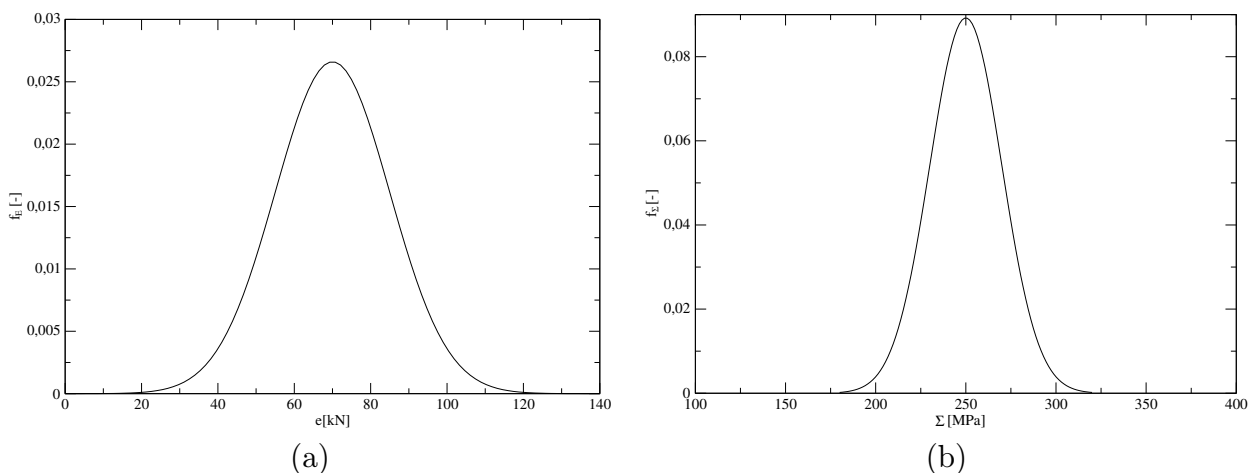
Spolehlivost dané konstrukce lze obecně vyjádřit vztahem (1)

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_{R1}(\alpha_1 e))(1 - F_{R2}(\alpha_2 e)) f_E(x) dx, \quad (1)$$

kde S označuje spolehlivost, f_E je hustota pravděpodobnosti zatížení e , F_{Ri} je distribuční funkce únosnosti i -tého prutu a α_i je příčinkový součinitel. Příčinkový součinitel α_i je roven hodnotě osové síly v i -tém prutu při zatížení $e = 1$. Slouží tedy ke snadnému výpočtu osové síly N_i při libovolném zatížení e ze vztahu $N_i = \alpha_i e$. Pro konstrukci na schématu 1 je $\alpha_1 = 0,8679$ a $\alpha_2 = -0,6479$. Únosnost prutu číslo 1 je dána jako $R_1 = A_1 \Sigma_y$ a únosnost prutu číslo 2 je dána jako $R_2 = \chi A_2 \Sigma_y$. A_1 , resp. A_2 jsou průřezové plochy prutů, χ je součinitel vzpěru zohledňující fakt, že prut číslo 2 bude namáhán tlakem, jeho hodnota je $\chi = 0,43$.

Hustota pravděpodobnosti normálně rozdělené veličiny je popsána Gaussovou křivkou, která je dána vztahem (2) a pro konkrétní veličinu – zatížení je její průběh vynesena na Obrázku 2a, pro mez kluzu pak na Obrázku 2b. Je to křivka, jejíž maximum je v bodě odpovídající střední hodnotě náhodné veličiny a její plochost je ovlivněna hodnotou směrodatné odchylky. Významnou vlastností této křivky je, že $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (2)$$

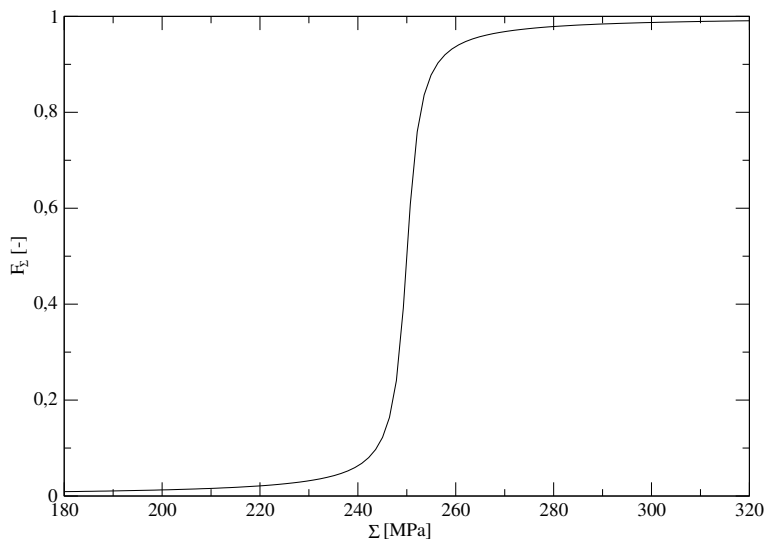


Obrázek 2: Hustota pravděpodobnosti: (a) zatížení, (b) meze kluzu

Distribuční funkce F_x náhodné veličiny x je odvozená jako primitivní funkce k hustotě pravděpodobnosti f_x dané veličiny, tzn.

$$F_x(x) = \int f_x(x) dx \quad (3)$$

Náčrtek distribuční funkce pro mez kluzu je zobrazen na Obrázku 3. Všimněme si, že distribuční funkce je křivka, jejíž hodnota se v $-\infty$ blíží nule, v ∞ se blíží k hodnotě 1 a její inflexní bod je právě místě, které odpovídá střední hodnotě hustoty pravděpodobnosti.



Obrázek 3: Náčrtek distribuční funkce meze kluzu F_Σ

Vzhledem k výpočtovým obtížím při analytickém řešení spolehlivosti dané vztahem (1) je lepší přejít k diskretizovanému vztahu ve tvaru

$$S = \sum_{i=1}^n (1 - F_{R1}(\alpha_1 e)) (1 - F_{R2}(\alpha_2 e)) p_{Ei}, \quad (4)$$

kde n je počet možných realizací diskrétní náhodné veličiny e a p_{Ei} jsou její pravděpodobnosti výskytu. Spojité náhodné veličiny je tedy nutné diskretizovat a to následujícím

způsobem:

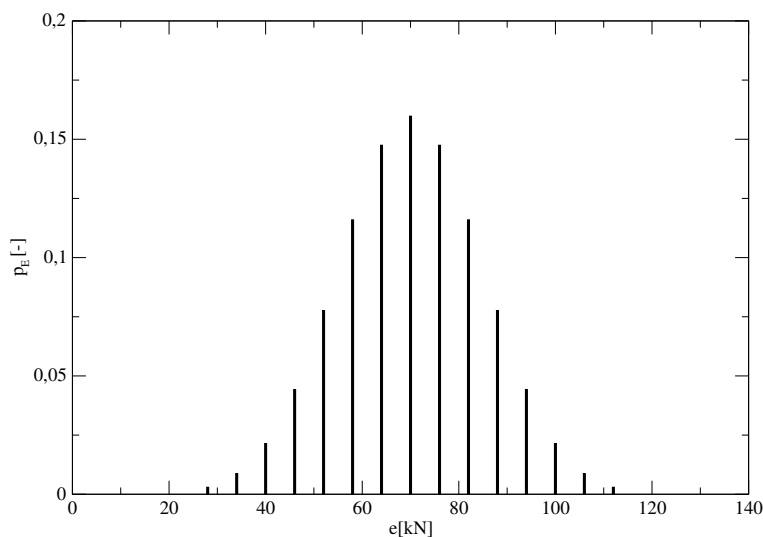
- reálnou spojitou veličinu nabývajících hodnot od $-\infty$ do ∞ omezíme na interval $\langle \mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma \rangle$, v němž leží normálně rozdělená náhodná veličina s pravděpodobností 0,9973;
- tento interval dále rozdělíme na n identických podintervalů (pro zatížení $n = 15$, pro mez kluzu $n = 6$), středy těchto podintervalů x_i pak uvažujeme jako realizace diskrétní veličiny;
- pravděpodobnost výskytu p_i jednotlivých diskrétních hodnot vypočteme ze vztahu $\tilde{p}_i = f(x_i)\Delta x_i$, kde Δx_i je délka podintervalu;
- protože pravděpodobnosti výskytu \tilde{p}_i nesplňují podmínku

$$\sum_{i=1}^n \tilde{p}_i = s = 1, \quad (5)$$

ale platí, že $s < 1$, dopustili jsme se tedy chyby $d = 1 - s$. Opravené hodnoty pravděpodobnosti výskytu p_i získáme ze vztahu

$$p_i = \tilde{p}_i \left(1 + \frac{d}{s} \right). \quad (6)$$

Hodnoty zatížení omezíme tedy při diskretizaci na interval $\langle 25; 115 \rangle$ kN a budeme ho diskretizovat na 15 různých realizací, tzn. že uvedený interval rozdělíme na 15 identických podintervalů, přičemž každý z nich bude délky $\Delta e_i = (115 - 25)/15 = 6$ kN. V Tabulce 2 jsou uvedeny středové hodnoty těchto podintervalů e_i , odpovídající hodnoty četností výskytu \tilde{p}_{Ei} , jejich opravené četnosti výskytu p_{Ei} a také odpovídající hodnoty osových sil v obou prutech N_{1i} a N_{2i} . Diskretizace výskytu zatížení je také zobrazena na Obrázku 4.



Obrázek 4: Četnosti výskytu p_{Ei} jednotlivých realizací zatížení e_i

Podobně budeme diskretizovat i mez kluzu použité oceli. Hodnoty meze kluzu omezíme tedy při diskretizaci na interval $\langle 190; 310 \rangle$ MPa a budeme ji diskretizovat na 6 různých

e_i	\tilde{p}_{Ei}	p_{Ei}	$N_{1i} = \alpha_1 e_i$	$N_{2i} = \alpha_2 e_i$
28	3.166181e-03	3.174203e-03	24.299	18.141
34	8.957812e-03	8.980510e-03	29.505	22.028
40	2.159639e-02	2.165111e-02	34.712	25.915
46	4.436833e-02	4.448076e-02	39.919	29.803
52	7.767442e-02	7.787124e-02	45.126	33.690
58	1.158766e-01	1.161702e-01	50.333	37.577
64	1.473081e-01	1.476813e-01	55.540	41.465
70	1.595769e-01	1.599813e-01	60.746	45.352
76	1.473081e-01	1.476813e-01	65.953	49.239
82	1.158766e-01	1.161702e-01	71.160	53.126
88	7.767442e-02	7.787124e-02	76.367	57.014
94	4.436833e-02	4.448076e-02	81.574	60.901
100	2.159639e-02	2.165111e-02	86.781	64.788
106	8.957812e-03	8.980510e-03	91.987	68.676
112	3.166181e-03	3.174203e-03	97.194	72.563
s = 9.974725e-01		s = 1.000000e+00		

Tabulka 2: Diskretizace zatížení

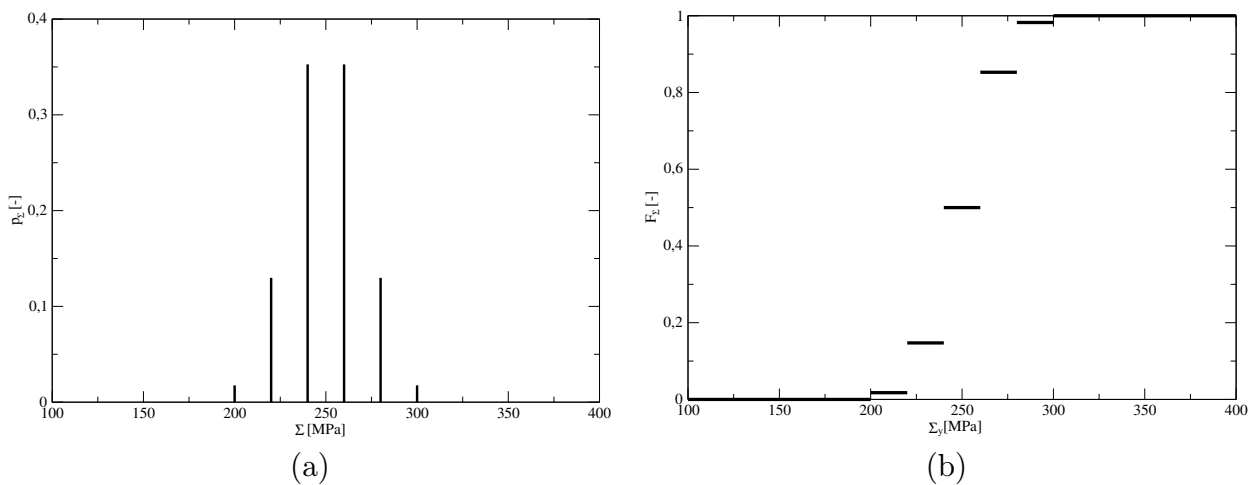
realizací. Uvedený interval tedy rozdělíme na 6 identických podintervalů, přičemž každý z nich bude délky $\Delta\Sigma_i = (310 - 190)/6 = 20\text{kN}$. V Tabulce 3 jsou uvedeny středové hodnoty těchto podintervalů Σ_i , odpovídající hodnoty četností výskytu \tilde{p}_{Σ_i} , jejich opravené četnosti výskytu p_{Σ_i} a také odpovídající hodnoty únosnosti obou prutů R_{1i} a R_{2i} . Diskretizace výskytu meze kluzu je také zobrazena na Obrázku 5a.

Abychom mohli spočítat spolehlivost konstrukce, je třeba ještě vyjádřit hodnoty distribučních funkcí únosnosti prutů. Nejprve ale začneme sestavením distribuční funkce meze kluzu oceli. Jelikož distribuční funkce je primitivní funkcí k hustotě pravděpodobnosti, získáme její hodnotu $F(\Sigma_a) = \int_{-\infty}^{\Sigma_a} f(\Sigma)d\Sigma$, resp. pokud jsme $f(\Sigma)$ diskretizovali do několika realizací Σ_i , pak platí, že $F(\Sigma_a)$ získáme jako součet všech četností p_{Σ_i} , pro které platí $\Sigma_i < \Sigma_a$. Hodnoty diskretizované distribuční funkce meze kluzu oceli jsou uvedené posledním sloupci Tabulky 3 a její průběh je vykreslen na Obrázku 5b.

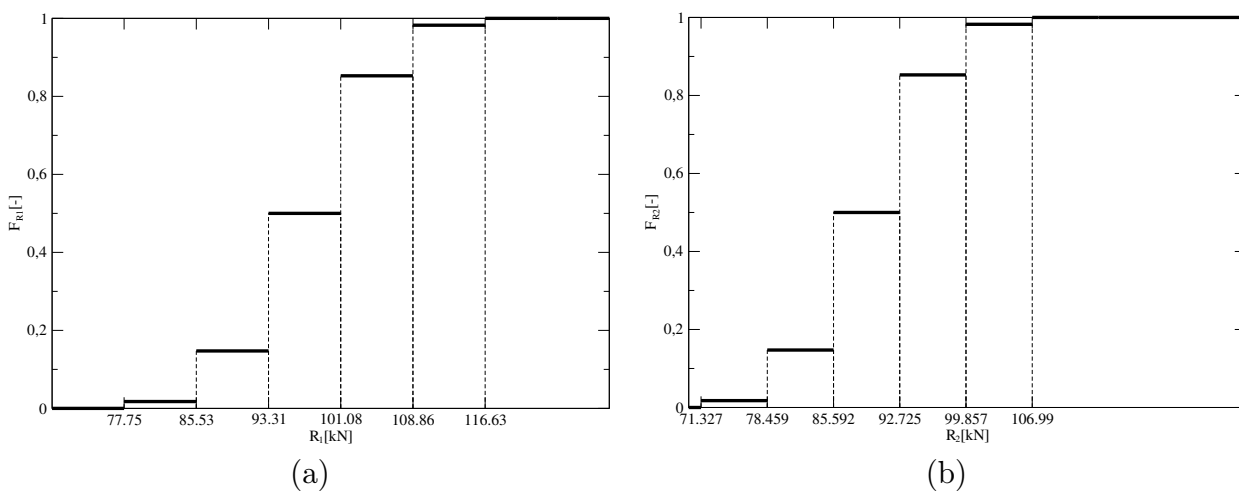
Σ_i	\tilde{p}_{Σ_i}	p_{Σ_i}	$R_{1i} = A_1 \Sigma_i$	$R_{2i} = A_2 \Sigma_i \chi$	F_{Σ_i}
200	1.752830e-02	1.755951e-02	77.754	71.327	1.755951e-02
220	1.295176e-01	1.297482e-01	85.530	78.459	1.473077e-01
240	3.520653e-01	3.526923e-01	93.305	85.592	5.000000e-01
260	3.520653e-01	3.526923e-01	101.081	92.725	8.526923e-01
280	1.295176e-01	1.297482e-01	108.856	99.857	9.824405e-01
300	1.752830e-02	1.755951e-02	116.632	106.990	1.000000e+00
s = 9.982224e-01		s = 1.000000e+00			

Tabulka 3: Diskretizace meze kluzu

Průběh distribuční funkce meze kluzu můžeme snadno transformovat na průběh distribuční funkce únosnosti jednotlivých prutů a to tak, že vodorovnou osu budeme transformovat z hodnot napětí do hodnot odpovídajících únosností. Pro oba pruty tak dostaneme distribuční funkce, které jsou vykresleny na Obrázku 6.



Obrázek 5: (a) Četnosti výskytu p_{Ei} jednotlivých realizací meze kluzu Σ_i zatížení, (b) Diskretizovaná distribuční funkce meze kluzu



Obrázek 6: Diskretizovaná distribuční funkce únosnosti (a) prutu 1 (b) prutu 2

Na závěr sestavíme tabulku 4, ve které vyčíslíme jednotlivé sčítance ve vztahu 4. Spolehlivost konstrukce $S = \sum_{i=1}^{n=15} s_i = 0.987945279$.

e_i	$N_{1i} = \alpha_1 e_i$	$N_{2i} = \alpha_2 e_i$	$F_{R1i}(N_{1i})$	$F_{R2i}(N_{2i})$	p_{Ei}	s_i
28	24.299	18.141	0	0	3.174203e-03	3.174203e-03
34	29.505	22.028	0	0	8.980510e-03	8.980510e-03
40	34.712	25.915	0	0	2.165111e-02	2.165111e-02
46	39.919	29.803	0	0	4.448076e-02	4.448076e-02
52	45.126	33.690	0	0	7.787124e-02	7.787124e-02
58	50.333	37.577	0	0	1.161702e-01	1.161702e-01
64	55.540	41.465	0	0	1.476813e-01	1.476813e-01
70	60.746	45.352	0	0	1.599813e-01	1.599813e-01
76	65.953	49.239	0	0	1.476813e-01	1.476813e-01
82	71.160	53.126	0	0	1.161702e-01	1.161702e-01
88	76.367	57.014	0.01756	0	7.787124e-02	7.650359e-02
94	81.574	60.901	0.01756	0	4.448076e-02	4.369991e-02
100	86.781	64.788	0.14731	0.01756	2.165111e-02	1.813741e-02
106	91.987	68.676	0.5	0.01756	8.980510e-03	4.411156e-03
112	97.194	72.563	0.5	0.14731	3.174203e-03	1.353219e-03

$s = 0.987945279$

Tabulka 4: Výpočet spolehlivosti konstrukce, $s_i = (1 - F_{R1i}(\alpha_1 e_i))(1 - F_{R2i}(\alpha_2 e_i))p_i$