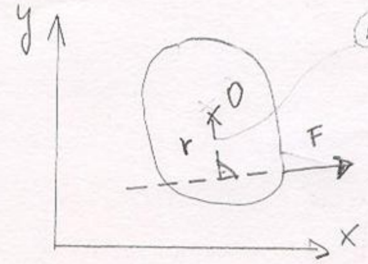
Moment síly

- v předchozích příkladech jsme předpokládali, že těleso může být považováno vždy za hmotný bod, který má 2 stupně volnosti – tzn. může se pohybovat ve směru os x a y (nebo x, y a z ve 3D)
- skutečná tělesa mohou také rotovat okolo libovolného bodu nebo osy, velikost takových těles není zanedbatelná

spíše tato síla převrhne kámen, přestože jsou obě síly stejně velké

- o rotaci (převrhnutí) nerozhoduje síla, ale moment $M = F \cdot r$ = síla · rameno

⇒ u těles záleží nejen na velikosti a směru síly, ale také na působišti



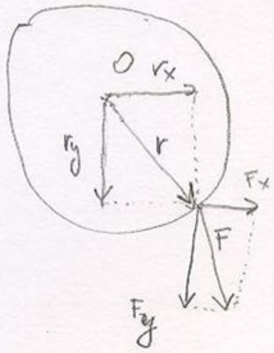
$\curvearrowleft M_0 = F \cdot r$

↳ pozitivní proti směru hodinových ručiček = pravidlo pravé ruky

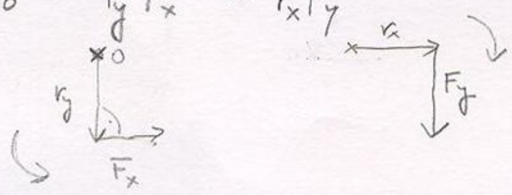
- těleso se může otáčet okolo jakékoliv osy (x, y, z) a proto lze moment také zapsat ve složkovém zápisu jako:

$$\underline{M} = M_x \underline{e_x} + M_y \underline{e_y} + M_z \underline{e_z} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \qquad [Nm]$$

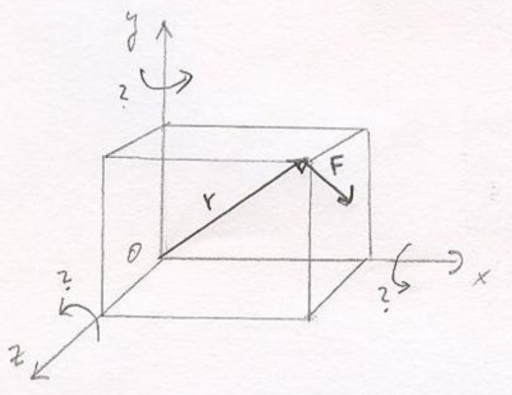
- podle pravidla pravé ruky je moment M_o (z obrázku) kolmý na plochu (x-y), ve které leží bod O a síla F



- po rozložení ramene a síly do složek je snadné moment spočítat
- složka r_x je kolmá na F_y a r_y je kolmá na F_x
- $M_o = r_y F_x - r_x F_y$



- ve 3D je to složitější a pracujeme s obecným zápisem



rameno: $\underline{r} = r_x \underline{e_x} + r_y \underline{e_y} + r_z \underline{e_z}$

síla: $\underline{F} = F_x \underline{e_x} + F_y \underline{e_y} + F_z \underline{e_z}$

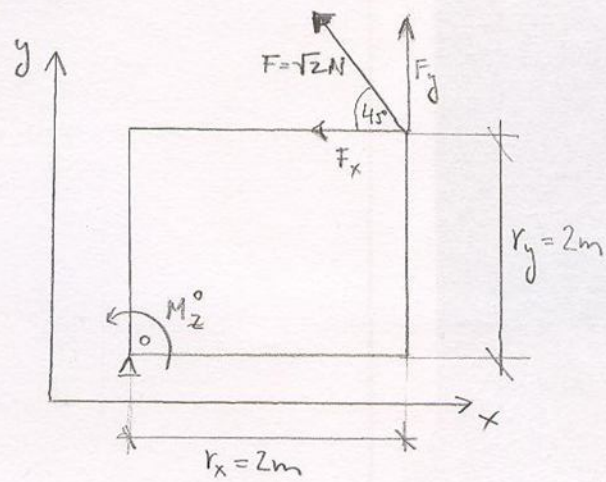
moment: $\underline{M} = \underline{r} \times \underline{F} =$

$$= \det \begin{pmatrix} \underline{e_x} & \underline{e_y} & \underline{e_z} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$$

$$\det \left|\begin{array}{ccc|cc} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z & \underline{e}_x & \underline{e}_y \\ r_x & r_y & r_z & r_x & r_y \\ F_x & F_y & F_z & F_x & F_y \end{array}\right| = M_x \underline{e}_x + M_y \underline{e}_y + M_z \underline{e}_z$$

kde
$$M_x = r_y F_z - r_z F_y$$
$$M_y = r_z F_x - r_x F_z$$
$$M_z = r_x F_y - r_y F_x \quad \leftarrow \text{známé z odvození ve 2D}$$

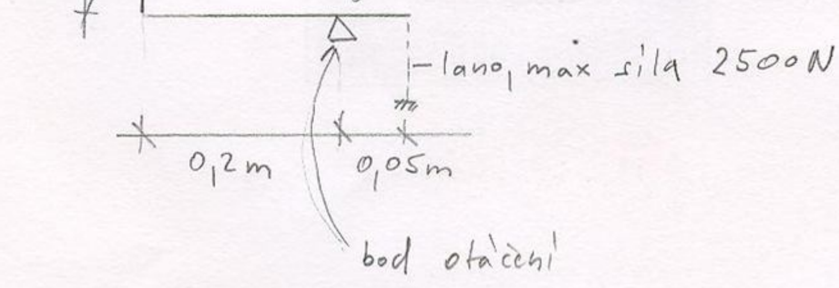
$\boxed{\text{PŘ 6}}$



$$F_x = \sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1N$$
$$F_y = 1N$$

$$M_z^o = r_x F_y - r_y F_x = $$
$$= 2\cdot 1 - 2\cdot(-1) = 4\,Nm$$

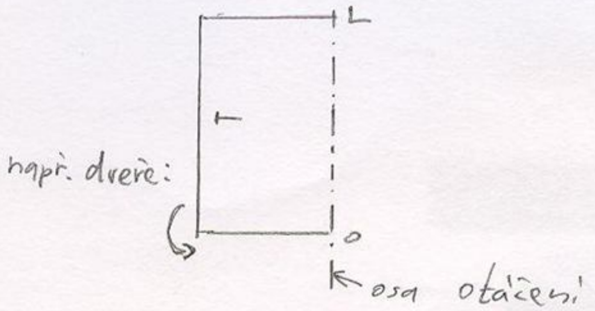
$\boxed{\text{PŘ 7}}$



Přetrhne se lano?

$$M^{max} = 2500\cdot 0{,}05 = 125\,Nm$$
$$M_o = 500\cdot\cos 60^\circ\cdot 0{,}16 + 500\cdot\sin 60^\circ\cdot 0{,}2 = 126{,}6\,Nm \Rightarrow \text{Lano praskne}$$

Moment okolo libovolné osy



$$M_{OL} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta_x^{OL} & \cos\theta_y^{OL} & \cos\theta_z^{OL} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$$

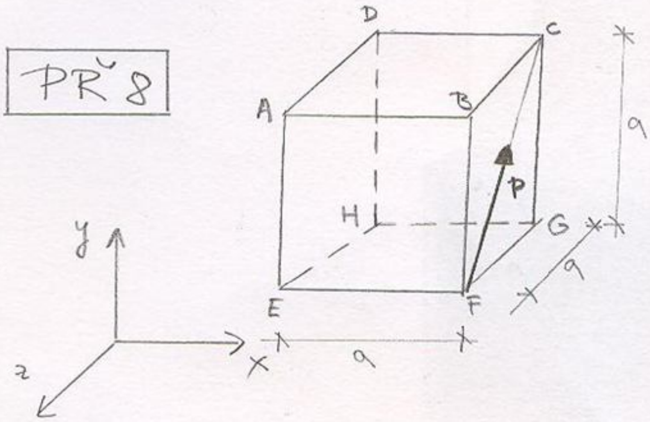
$\cos\theta_x^{OL}$, $\cos\theta_y^{OL}$, $\cos\theta_z^{OL}$ jsou směrové kosiny osy OL

r_x, r_y, r_z jsou souřadnice bodu, kde je síla aplikovaná, pokud O je počátek souřadnic

F_x, F_y, F_z jsou složky síly F

- pozn.: pokud jsme chtěli moment okolo některé z os souřadného systému, například okolo osy x, dosadili jsme za první řádek v determinantu (1 0 0)

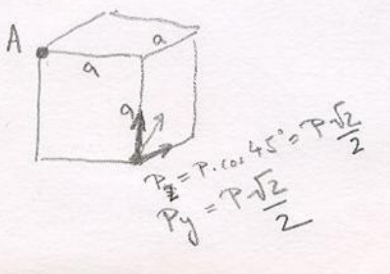
PŘ 8



a) Jaký tvoří síla P moment okolo bodu A?

b) Jaký tvoří síla P moment okolo osy AG? (= Jaká je tendence krychle rotovat okolo AG pod vlivem síly P)

a) P se rozloží ve směru os:



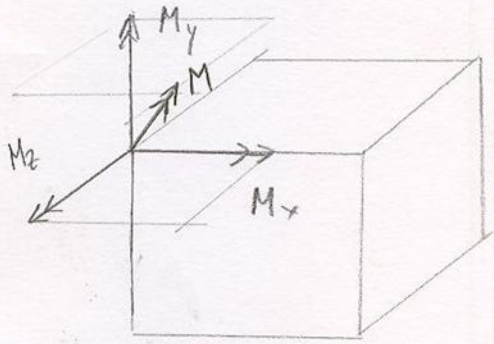
$r_x = a$, $r_y = -a$, $r_z = 0$

$F_x = 0$, $F_y = P\frac{\sqrt{2}}{2}$, $F_z = -P\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\underline{M} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y & \underline{e}_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} \begin{matrix} \underline{e}_x & \underline{e}_y \\ r_x & r_y \\ F_x & F_y \end{matrix} = \overbrace{\left(r_y F_z - r_z F_y\right)}^{M_x} \underline{e}_x +$$

$$+ \underbrace{\left(r_z F_x - r_x F_z\right)}_{M_y} \underline{e}_y + \underbrace{\left(r_x F_y - r_y F_x\right)}_{M_z} \underline{e}_z$$

$$M_x = -a\left(-P\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = aP\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$M_y = -a\left(-P\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = aP\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$M_z = aP\frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\|M\| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{3\left(aP\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$$
$$= \underline{\underline{\frac{aP}{2}\sqrt{6}}}$$

b) <u>moment okolo diagonály AG:</u>

- délka $L^{AG} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

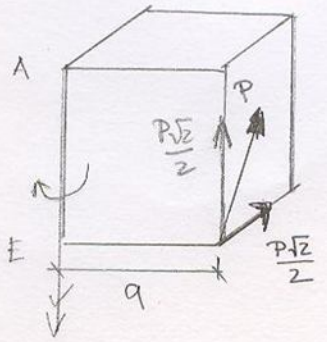
$$\Delta X = a \longrightarrow \cos\theta_x^{AG} = \frac{\Delta X}{L} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\Delta y = -a \longrightarrow \cos\theta_y^{AG} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\Delta z = -a \longrightarrow \cos\theta_z^{AG} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$M_{AG} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta_x^{AG} & \cos\theta_y^{AG} & \cos\theta_z^{AG} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ a & -a & 0 \\ 0 & \frac{P\sqrt{2}}{2} & \frac{P\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ a & -a \\ 0 & \frac{P\sqrt{2}}{2} \end{matrix}$$

vzdálenost síly z bodu A

$$= -\frac{aP\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{aP\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} - \frac{aP\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \underline{\underline{-\frac{aP}{\sqrt{6}}}}$$

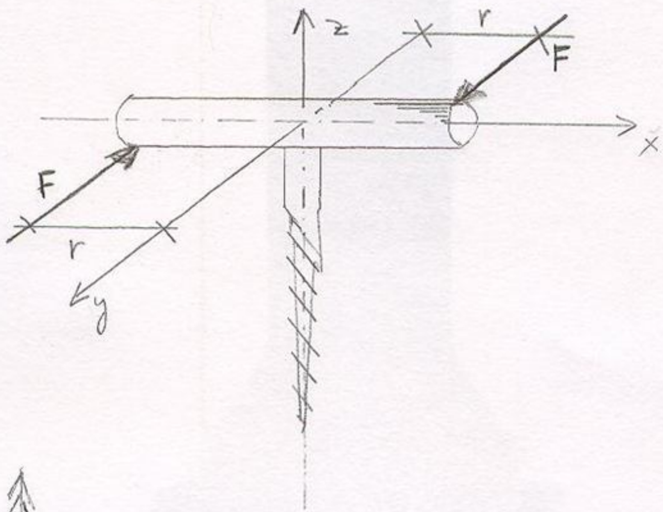
c) moment okolo $\overrightarrow{AE}$

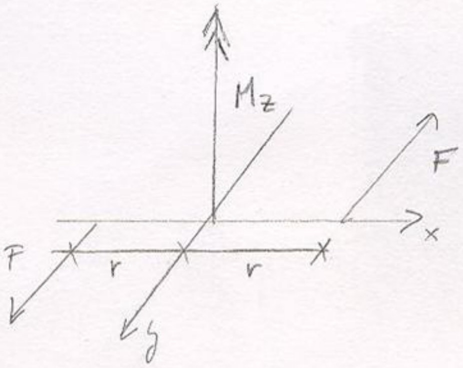


$$M_{AE} = \det\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & P\frac{\sqrt{2}}{2} & -P\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \underline{\underline{-aP\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

- moment vytváří dvojice sil jdoucích paralelně a v opačném směru

vývrtka:





$\swarrow F_y = 0: \quad F - F = 0$ ✓

↓

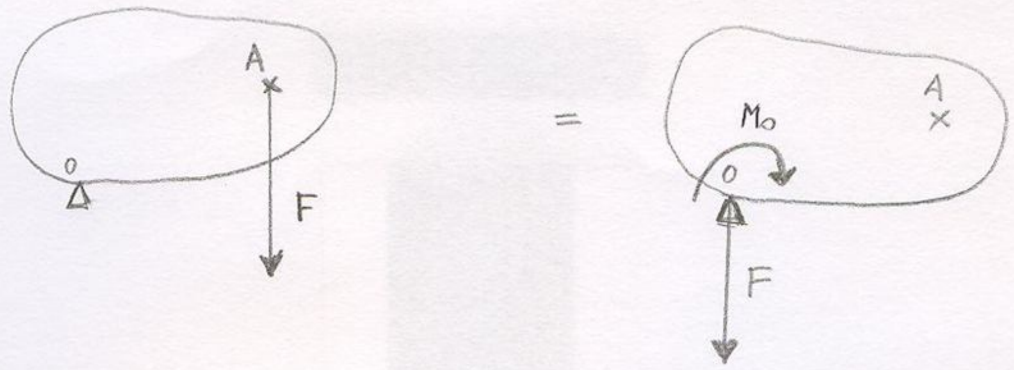
vývrtka se nepohybuje ve směru osy y

$\circlearrowleft M_z: F \cdot r + F \cdot r = 2Fr$

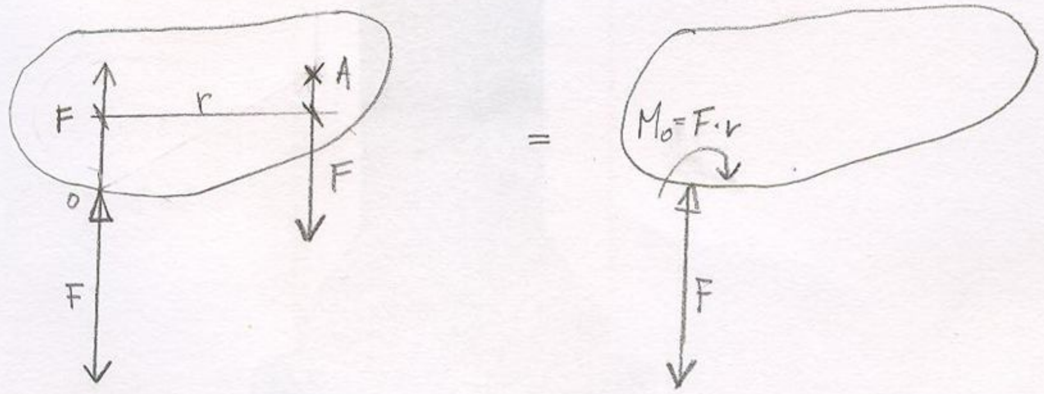
↓

vývrtka se otáčí

Nahrazení síly silou působící v bodě otáčení a momentem

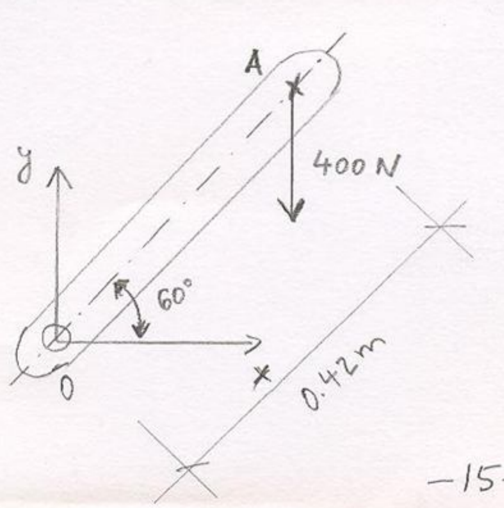


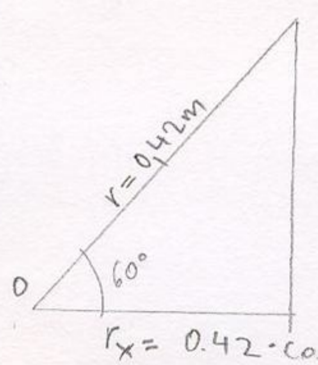
- hledám moment a sílu v O, aby účinky na těleso byly stejné



- síla F těleso posouvá a moment otáčí

$\boxed{\text{PŘ 9}}$ Nahraďte sílu momentem a silou v O

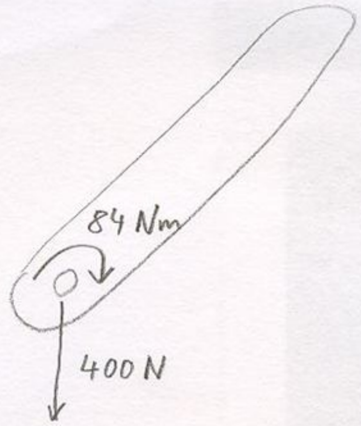




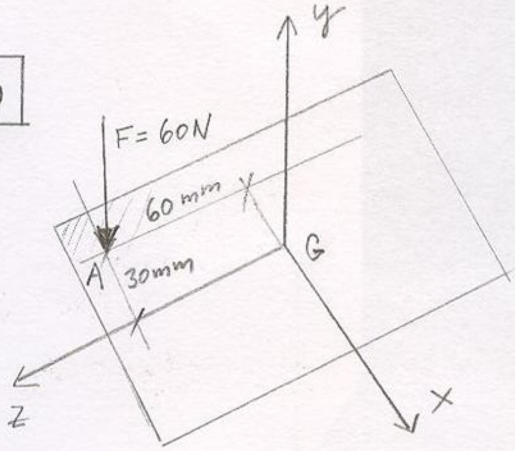
$r_x = 0.42 \cdot \cos 60° = 0{,}21\,m$

$M_z = r_x F_y = (-0{,}21)\,400 = -84\ \mathrm{Nm}$

→ ekvivalentní účinky budou mít síla a moment v O:



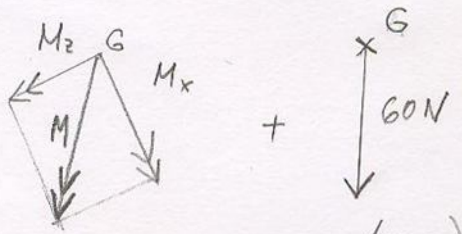
$\boxed{\text{PŘ 10}}$



nahraďte sílu v A silou v težišti G a momentem

$M_x = 60 \cdot 0{,}06 = 3{,}6\ \mathrm{Nm}$

$M_z = 60 \cdot 0{,}03 = 1{,}8\ \mathrm{Nm}$



$\underline{M} = 3{,}6\,\underline{e}_x + 1{,}8\,\underline{e}_z = \begin{pmatrix} 3{,}6 \\ 0 \\ 1{,}8 \end{pmatrix} \mathrm{Nm}$