PRUŽNOST A PEVNOST

K132 PRPE – I 2-2

3+2, z, zk

Doporučená literatura:

Šejnoha, Bittnarová: Pružnost a pevnost, ES ČVUT, 2004

Bittnarová, Fajman, Kalousková, Šejnoha: Pružnost a pevnost – příklady, ES ČVUT, 2004

Šejnoha, Bittnarová: Pružnost a pevnost 20, ES ČVUT, 2003

Bittnarová, Fajman, Kalousková, Šejnoha: Pružnost a pevnost 20 – příklady, ES ČVUT, 2004

Přednášející: Doc. Ing. Jitka Bittnarová, CSc – B 323
Cvičící: Ing. Dagmar Jandeková – B 310
Ing. Zbyšek Pavlík, Ph.D. – D 1008
Ing. Marek Čmejla – B 308

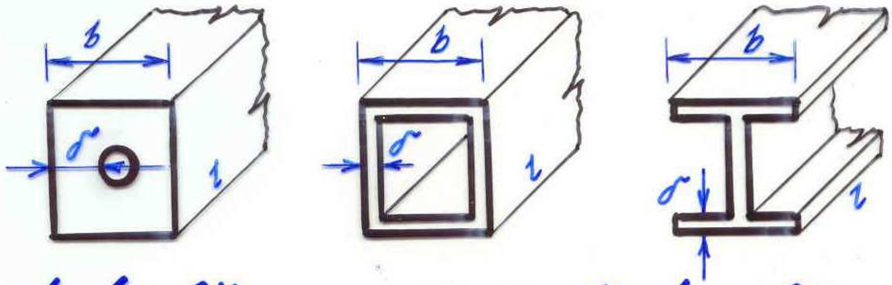
Konzultace: B 323, po 13.00 – 14.30

ÚVOD

Cíl předmětu: výpočet a) **napjatosti**, b) **přetvoření**

konstrukcí **prutových** od vlivu zatížení

Příčný řez prutu:



masivní průřez

tenkostěnný průřez

uzavřený **otevřený**

$\frac{\delta}{b} > \frac{1}{10}$

$\delta : b : l \approx 1 : 10 : 100$

Nutno uvažovat **těleso poddajné** (ne dokonale tuhé, jako např. při výpočtu reakcí staticky určitých kcí)

Zákl. úloha

teorie pružnosti - určit množinu posunů všech bodů tělesa
(pro deformaci tělesa důležitá změna posunů)

nauky o pevnosti - určit napětí a jejich přípustné meze dle druhu materiálu

Základní předpoklady a pojmy

- **těleso ≡ kontinuum** (spojitě vyplněno hmotou před i po deformaci)

  idealizace – ocel, beton, dřevo – uspokojivý předp.
  × zeminy, kompozity – nevyhovující

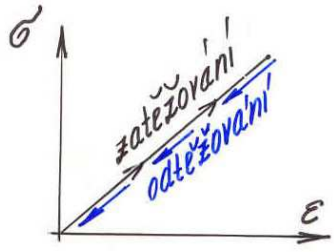
- **materiál je**

  homogenní – vlastnosti stejné ve všech bodech
  (× nehomogenní)

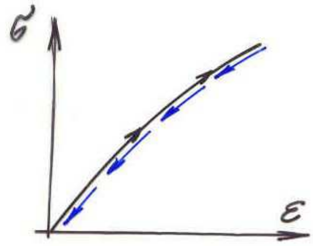
  izotropní – vlastnosti stejné ve všech směrech jdoucích z téhož bodu
  (× anizotropní)
  zvl. případ → **ortotropní látky**, dřevo, odlišné vlastnosti ve dvou kolmých směrech

- **elementární vnitřní síly – spojitě rozloženy** v kontinuu
  (umožní definovat napětí)

- dokonale **pružný materiál** = těleso se po odtížení vrátí do původního tvaru
  (× vznik trvalých deformací → **teorie plasticity**)



lineárně pružná látka



nelineárně pružná látka

pracovní diagram
σ … napětí
ε … poměrné přetvoření

Základní předpoklady a pojmy

- **těleso ≡ kontinuum** (spojitě vyplněno hmotou před i po deformaci)

  idealizace – ocel, beton, dřevo – uspokojivý předp.
  × zeminy, kompozity – nevyhovující

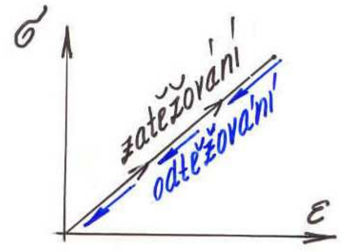
- **materiál je**

  homogenní – vlastnosti stejné ve všech bodech
  (× nehomogenní)

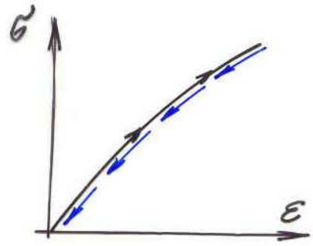
  izotropní – vlastnosti stejné ve všech směrech jdoucích z téhož bodu
  (× anizotropní)
  zvl. případ → **ortotropní látky**, dřevo, odlišné vlastnosti ve dvou kolmých směrech

- **elementární vnitřní síly – spojitě rozloženy** v kontinuu
  (umožní definovat napětí)

- dokonale **pružný materiál** = těleso se po odlížení vrátí do původního tvaru
  (× vznik trvalých deformací → **teorie plasticity**)



lineárně pružná látka



nelineárně pružná látka

pracovní diagram

σ … napětí

ε … poměrné přetvoření

- **statické působení** - zatížení roste z nuly do konečné hodnoty nekonečně pomalu (⇒ neuplatní se setrvačné síly)

× **dynamika** - disciplína zabývající se vlivem setrvačných sil

- **vliv času na fyzikálně mechanické vlastnosti látky se neuvažuje**

× **reologie** - dotvarování betonu (deformace se s časem mění, aniž by došlo ke změně zatížení)

- **deterministická mechanika**
= předpoklad jednoznačně určených materiálových, geometrických vlastností tělesa, ale i zatížení

× skutečnost: náhodné vlastnosti materiálů i zatížení
⇒ **stochastická mechanika**

na ni navazuje: **teorie spolehlivosti**
hl. cíl: odhad pravděpodobnosti, že nedojde k selhání kce

využívá se při navrhování kcí

KURS PRPE
- základní rovnice teorie pružnosti
- analýza prutů (ohyb, smyk za ohybu, kroucení)
- stabilita přímých prutů

ZÁKLADNÍ ROVNICE TEORIE PRUŽNOSTI

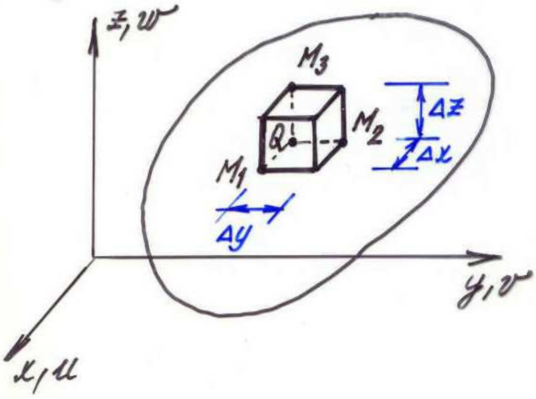
- geometrické (6)
- statické (3)
- fyzikální (6)

POPIS STAVU DEFORMACE. GEOMETRICKÉ ROVNICE.

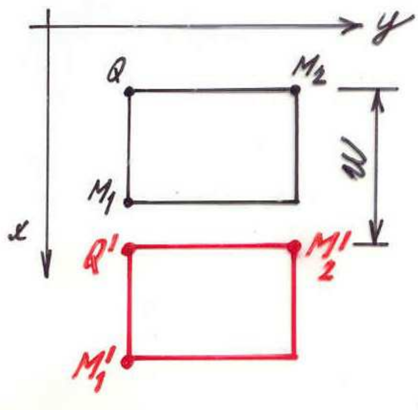
Deformace tělesa = změna tvaru a objemu
(důsledek tvarových a objemových změn částic)

Popis deformace
- složkami posunutí u, v, w
- složkami deformace $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$

Vysvětlíme na objemových a tvarových změnách **elementárního kvádru**



složka posunutí u



Složky deformace (dvojího typu)

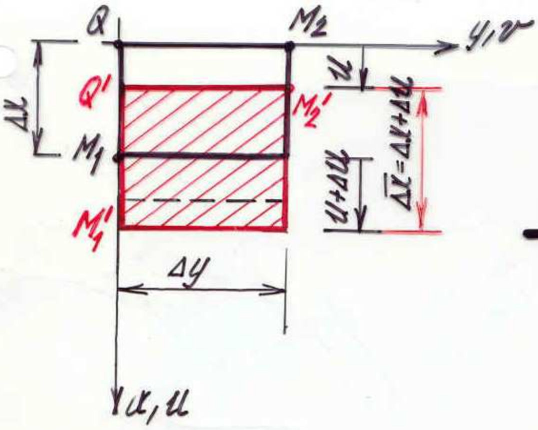
poměrné délkové deformace: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$

poměrné úhlové deformace: $\gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$

$\Rightarrow$ 2 geometricko-deformační modely kvádru

1. deformační model: pouze protažení hran (při zachování pravých $\measuredangle$)

$\Rightarrow$ **relativní prodloužení (dilatace)**



Relativní změna délky hrany QM_1:

$$\underline{\varepsilon_x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \bar{x} - \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y, z) - u(x, y, z)}{\Delta x} =$$

$$= \underline{\frac{\partial u}{\partial x}}$$

Zbývající 2 rovnice pro $\varepsilon_y, \varepsilon_z$ cyklickou záměnou

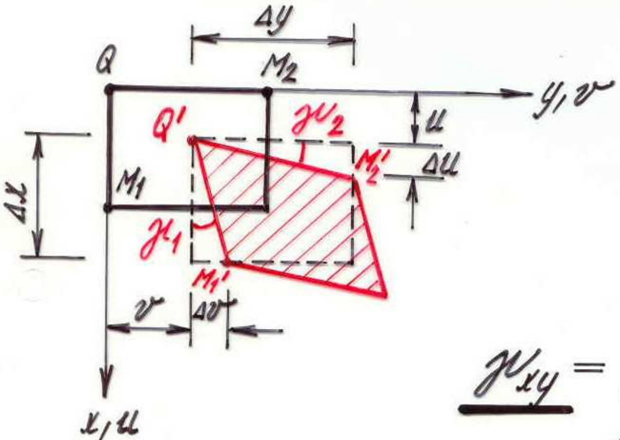
$x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$

$u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow u$

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}}$$

2. deformační model: změny pravých ∡ mezi stěnami (při zachování délek hran)

⇒ relativní úhlové změny (zkosení)



Úhlová deformace v rovině xy (změna pravého ∡ mezi hranami QM_1, QM_2):

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

zbývající 2 rovnice pro γ_{yz}, γ_{zx} cyklickou záměnou

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}}$$

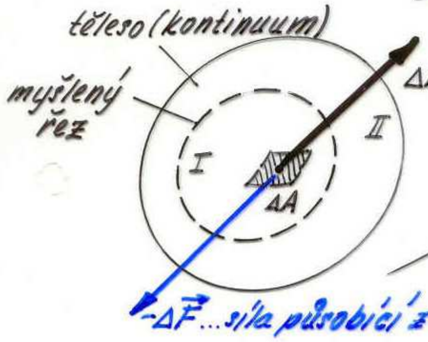
6 geometrických rovnic – popisují vztah mezi složkami posunutí a složkami deformace

POPIS STAVU NAPĚTÍ
STATICKÉ ROVNICE

Hledáme podmínky, za nichž bude libovolná částice tělesa v rovnováze.

V podmínkách rovnováhy se uplatní

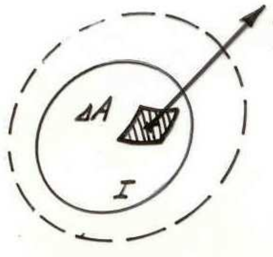
síly
- **vnější** (zatížení, reakce – mají charakter zatížení)
  - objemové [N/m³] (např. gravitační)
  - povrchové
    - plošné [N/m²]
    - liniové [N/m']
    - osamělá síla [N]
- **vnitřní** – působí plošně mezi jednotl. částicemi tělesa a brání jejich vzájemnému oddělení



$\Delta\vec{F}$ ... vnitř. síla, kterou část II působí na I na ploše ΔA [N]

zajišťují souvislost tělesa podél řezu

$-\Delta\vec{F}$ ... síla působící z I na II (akce a reakce) [N]



$\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A}$ ... průměrná vnější povrchová síla [N/m²], kterou část II působí na I

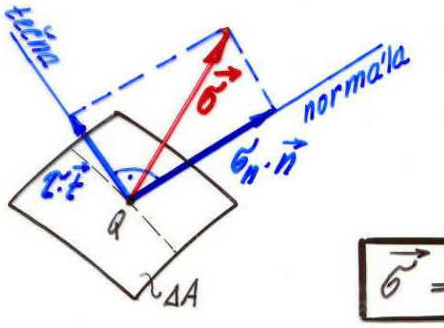
ΔA lze libovolně zmenšovat

⇒ **vektor napětí**

$$\boxed{\vec{\sigma} = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A}} \quad [N/m^2 \equiv Pa]$$

Vektor napětí $\vec{\sigma}$ lze rozložit

a) do směru normály a tečny



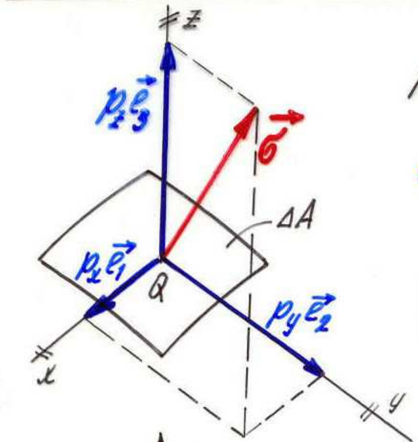
σ_n … normálové napětí

τ … smykové napětí

$\vec{n}, \vec{t}$ … jednotkové vektory ve směru normály a tečny

$$\boxed{\vec{\sigma} = \sigma_n \cdot \vec{n} + \tau \cdot \vec{t}} \quad \text{nebo} \quad \vec{\sigma} = (\sigma_n, \tau)$$

b) do směrů os souřadnic



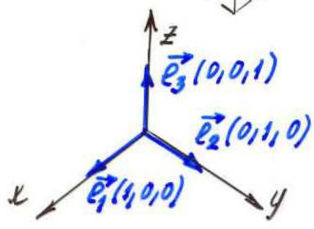
p_x, p_y, p_z … kartézské složky vektoru napětí

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ … jednotkové vektory ve směru os x, y, z

$$\boxed{\vec{\sigma} = p_x \vec{e}_1 + p_y \cdot \vec{e}_2 + p_z \cdot \vec{e}_3}$$

nebo

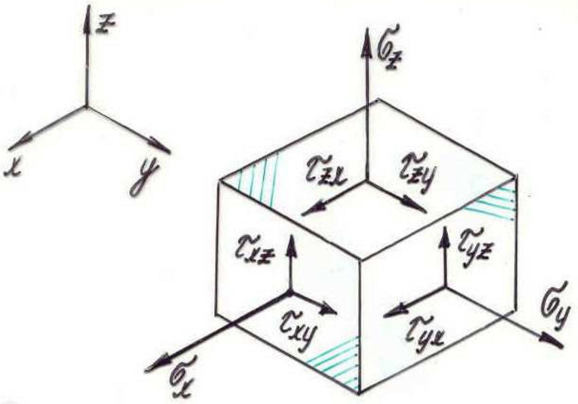
$$\vec{\sigma} = (p_x, p_y, p_z)$$



Při zvláštní poloze obecné plošky (ploška je ∥ se souř. rovinou) složky $p_x, p_y, p_z \longrightarrow \sigma_n, \tau$

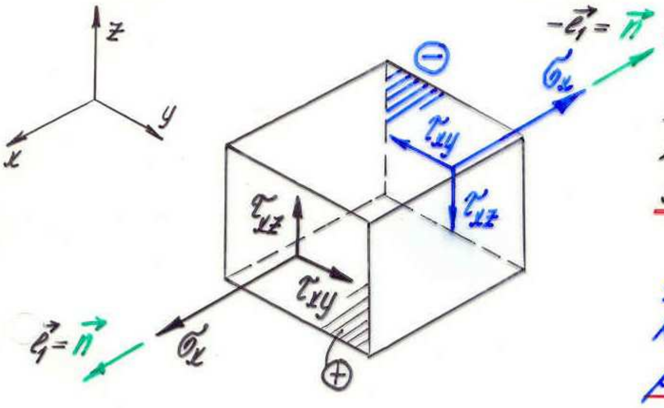
Složky napětí na elementárním kvádru

(plošky ∥ se souřadnicovými rovinami)



Pozn.: Zakresleny pouze složky napětí na kladných ploškách

Kladná orientace složek napětí na dvou ∥ ploškách



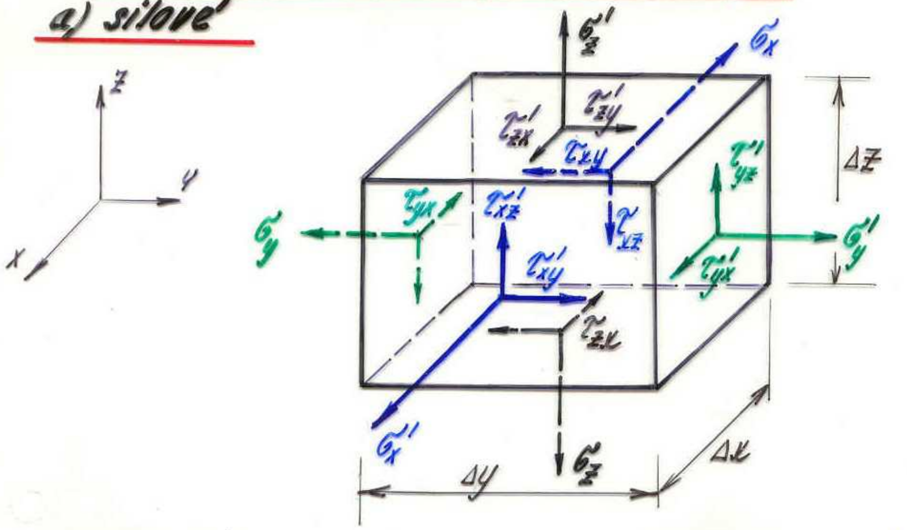
Na kladné plošce: kladné složky napětí mají směr kladných poloos.

Na záporné plošce: Kladné složky napětí jdou proti kladným poloosám.

$$\vec{n} = \vec{e}_1 : \quad p_x = \sigma_x, \quad p_y = \tau_{xy}, \quad p_z = \tau_{xz}$$

Podmínky rovnováhy na kvádru :

a) silové



V podmínce silové ve směru osy x se budou vyskytovat složky :

$\sigma_x' = \sigma_x(x+\Delta x, y, z)$; $\sigma_x(x, y, z)$

$\tau_{zx}' = \tau_{zx}(x, y, z+\Delta z)$; $\tau_{zx}(x, y, z)$

$\tau_{yx}' = \tau_{yx}(x, y+\Delta y, z)$; $\tau_{yx}(x, y, z)$

$$\checkmark x: \quad \sigma_x' \Delta y \Delta z - \sigma_x \Delta y \Delta z + \tau_{yx}' \Delta x \Delta z - \tau_{yx} \Delta x \Delta z + \tau_{zx}' \Delta x \Delta y - \tau_{zx} \Delta x \Delta y +$$

$$+ X \Delta x \Delta y \Delta z = 0 \qquad / : \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\lim : \Delta x \to \Delta y \to \Delta z \to 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sigma_x(x+\Delta x, y, z) - \sigma_x(x, y, z)}{\Delta x} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\tau_{yx}(x, y+\Delta y, z) - \tau_{yx}(x, y, z)}{\Delta y} +$$

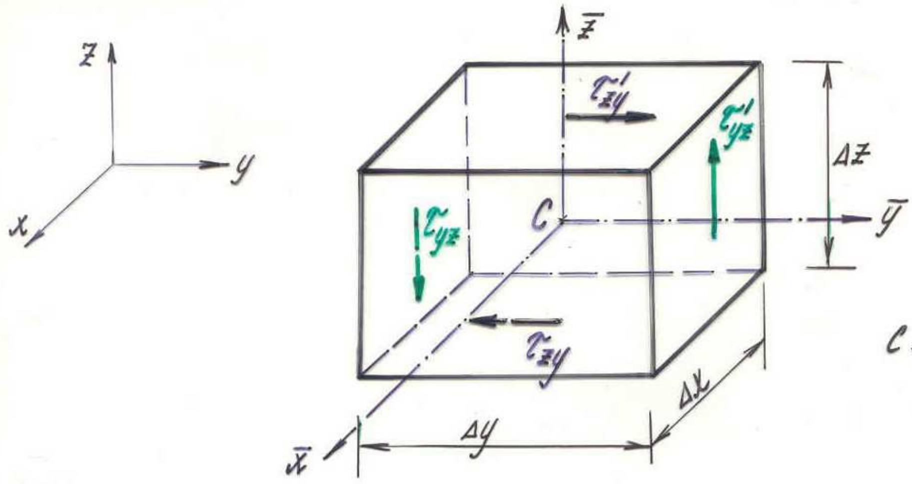
$$+ \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\tau_{zx}(x, y, z+\Delta z) - \tau_{zx}(x, y, z)}{\Delta z} + X = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\to x: &\quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\
\to y: &\quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\
\to z: &\quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0
\end{aligned}}$$

Cauchyho statické rovnice

X, Y, Z .. objemové síly

b) momentové – kolem os $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$



C … těžiště kvádru

$$\curvearrowleft \bar{x}: \; -\tau'_{zy}\Delta x\Delta y\cdot\frac{\Delta z}{2}-\tau_{zy}\Delta x\Delta y\frac{\Delta z}{2}+\tau'_{yz}\Delta x\Delta z\frac{\Delta y}{2}+\tau_{yz}\Delta x\Delta z\frac{\Delta y}{2}=0$$

$/ : \Delta x\Delta y\Delta z$

V limitě $\Delta x\to\Delta y\to\Delta z\to 0$

$\tau'_{zy}\to\tau_{zy}\,,\quad \tau'_{yz}\to\tau_{yz}$

$$-\tau_{zy}+\tau_{yz}=0\Rightarrow \curvearrowleft\bar{x}\quad \boxed{\tau_{yz}=\tau_{zy}}$$

$$\curvearrowleft\bar{y}\quad \boxed{\tau_{zx}=\tau_{xz}}$$

$$\curvearrowleft\bar{z}\quad \boxed{\tau_{xy}=\tau_{yx}}$$

Věta o vzájemnosti smykových napětí

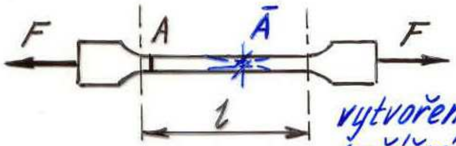
Smyková napětí na dvou vzájemně kolmých ploškách jsou stejně velká a obě směřují buď k průsečnici obou plošek nebo od ní.

FYZIKÁLNÍ ROVNICE

– vyjadřují vztah mezi složkami napětí a složkami deformace
(jako v jediných – materiálové konstanty (zjištěny experimentálně tahovou zkouškou)

1. Jednoosá napjatost

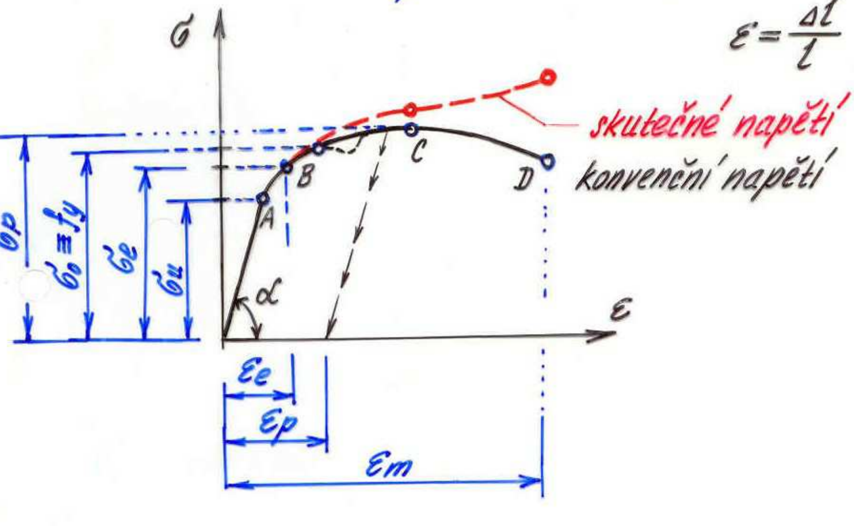
tahová zkouška $\Rightarrow$ pracovní diagram $\sigma \times \varepsilon$, který charakterizuje vlastnosti materiálu



$\sigma = \frac{F}{A}$ ... konvenční napětí

$\bar{\sigma} = \frac{F}{\bar{A}}$ ... skutečné napětí

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$



σ_u – mez úměrnosti (ohraničuje platnost Hookeova zákona)

σ_e – mez pružnosti (elasticity)

$\sigma_o \equiv f_y$ – mez kluzu (plasticity, tečení)

σ_p – mez pevnosti

ε_e – max. elastická deformace

ε_p – plastická deformace

ε_m – mezní deformace při přetržení

Hookeův zákon : $\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon}$

- platí pouze v pružné oblasti až do meze úměrnosti $\Rightarrow \sigma \leq \sigma_u$

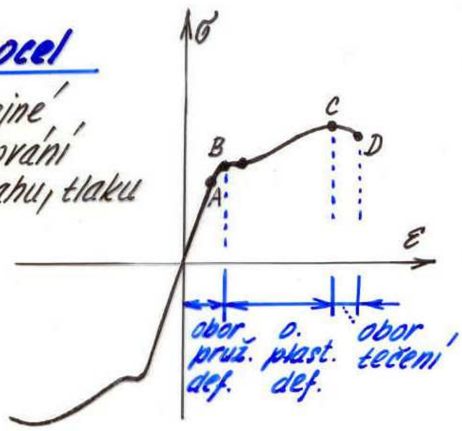
$E = tg\alpha$ [Pa] ..... Youngův modul pružnosti (modul pružnosti v tahu a tlaku)

materiálová konstanta : ocel $\doteq 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa
beton $\doteq 2{,}1 \cdot 10^4$ MPa
dřevo$_{\parallel}$ $\doteq 1 \cdot 10^4$ MPa

Příklady pracovních diagramů ($\sigma > 0$ ... tah, $\sigma < 0$ ... tlak)

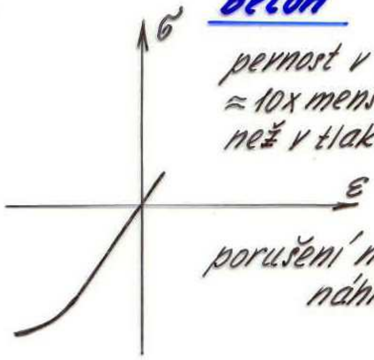
ocel

stejné chování v tahu, tlaku



beton

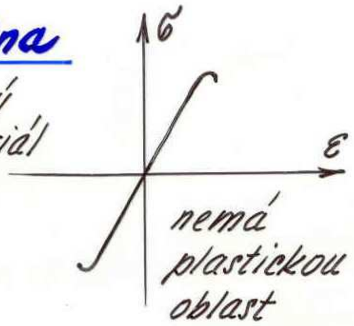
pevnost v tahu ≈ 10x menší než v tlaku



porušení nastává náhle

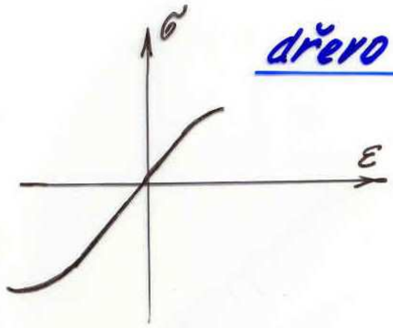
litina

křehký materiál



nemá plastickou oblast

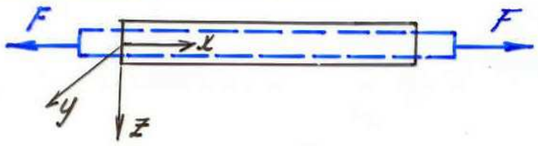
dřevo



2. Trojosá napjatost

Rozšířený Hookeův zákon (platí v lineárně pružné oblasti)

Příčná kontrakce



při tahové zkoušce → tahové napětí σ_x ⇒ relat. protaž. ε_x
x v příčných směrech y, z ⇒ relat. zúžení ε_y, ε_z

$$\boxed{\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\,\varepsilon_x} \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

ν ... [-] Poissonovo číslo (součinitel příčné kontrakce)

$$\boxed{\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}} \qquad 0 \le \nu < \frac{1}{2}$$

materiálová konstanta : ocel $\approx 0{,}3$
beton $\approx 0{,}15$

($m = \frac{1}{\nu}$ ... Poissonova konstanta [-])

Při působení jednotlivých složek normál. napětí

$$\sigma_x \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\sigma_y \Rightarrow \varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_y}{E}$$

$$\sigma_z \Rightarrow \varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

relat. zúžení — relat. protažení

Vliv změny teploty na relativní protažení

$$\varepsilon_x^t = \varepsilon_y^t = \varepsilon_z^t = \alpha t$$

α [K^{-1}] ... součinitel teplotní roztažnosti

t [K] ... změna teploty

(ocel, beton : $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}\, K^{-1}$)

Deformace při obecné napjatosti

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha t$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right] + \alpha t$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha t$$

rozšířený Hookeův zákon

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

fyzikální rovnice (6)

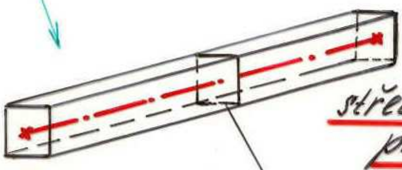
G [Pa] ... modul pružnosti ve smyku

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\nu)}}$$

Ve fyz. rovnicích 3 materiálové konstanty : E, G, ν, ale pouze 2 konstanty nezávislé.

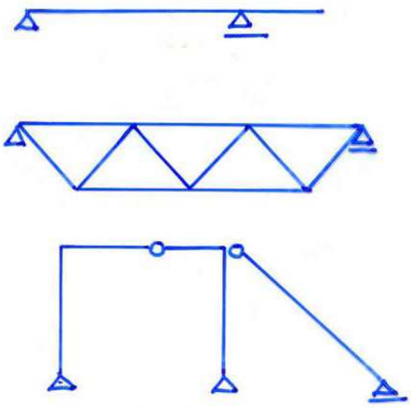
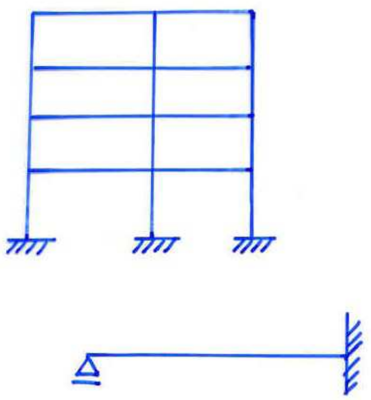
ANALÝZA PRUTŮ

<u>prut</u> – těleso s jedním výrazně převládajícím rozměrem – délkou; nejjednodušší kční prvek (z geometrického hlediska, i dle způsobu výpočtu)



<u>prizmatický prut</u> – průřez se po délce nemění

Prutová konstrukce

statický určitá	statický neurčitá
	

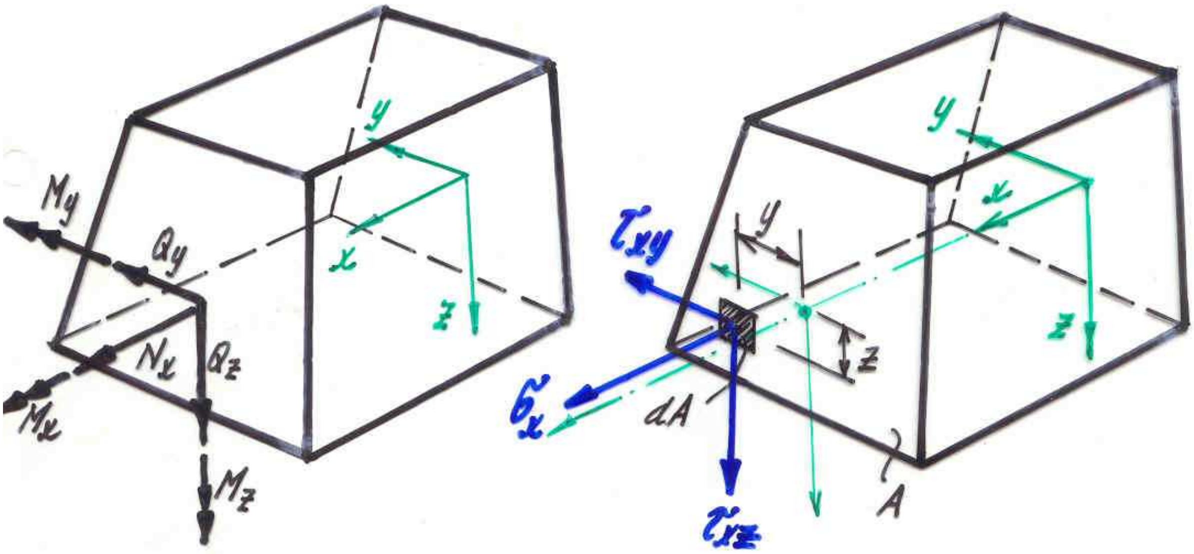
Schema výpočtu :

1) Stanovení hodnot vnitřních sil v průřezech (stav. mech.)
2) Výpočet rozdělení složek napětí po průřezu (pružnost a pevnost)

Zvláštnost : transformace stat. a fyz. r. k průřezu
redukce $D_3 \rightarrow D_1$

Vnitřní (průřezové) síly vznikají v důsledku zatížení konstrukce. Jsou výslednicemi složek napětí σ_x, τ_{xy}, τ_{xz} působících v obecném bodě průřezu.

Integrální definice vnitřních sil:



z podmínky ekvivalence:

$$N_x = \iint_A \sigma_x \, dA \qquad M_x = \iint_A (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) \, dA$$

$$Q_y = \iint_A \tau_{xy} \, dA \qquad M_y = \iint_A \sigma_x \cdot z \, dA$$

$$Q_z = \iint_A \tau_{xz} \, dA \qquad -M_z = \iint_A \sigma_x \, y \, dA$$

OHYB PRUTŮ

nejčastější způsob namáhání průřezu je kombinací
M_y, M_z, N_x (tyto vnitř. síly jsou výslednicemi σ_x)

$(M_x = 0, \underbrace{Q_y = 0, Q_z = 0}_{\text{prostý ohyb (při } N_x = 0)})$ $\quad$ $(M_x = 0, \underbrace{Q_y \neq 0, Q_z \neq 0}_{\text{smyk za ohybu}})$

Předpoklady výpočtu:

podélná deformace ε_x je řádově daleko větší, než ostatní složky deformace $\Rightarrow$ lze je zanedbat

a) $\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0$ (tvar průřezu se nemění)

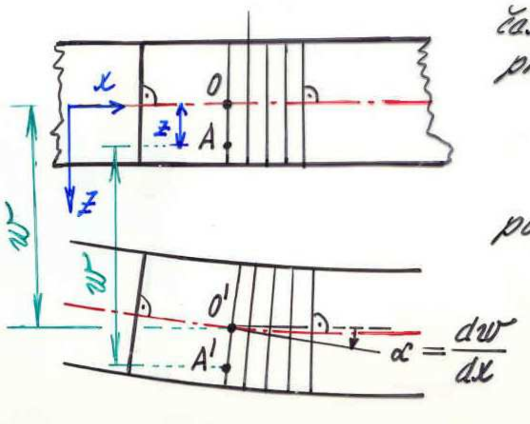
b) $\gamma_{xz} = \gamma_{xy} = 0$ (pravé ∡ v „podélných" rovinách xy, xz zůstávají zachovány)

$\Rightarrow$ $\boxed{\varepsilon_x \neq 0}$ jediná nenulová složka deformace

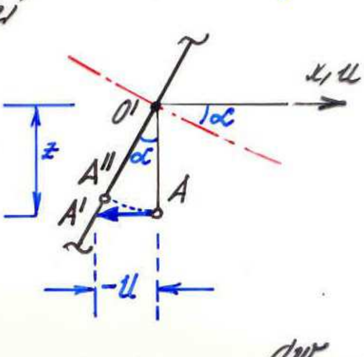
Důsledek předp. a): $v = v(x)$, $w = w(x)$

předp. b): Bernoulli – Navierova hypotéza

Průřezy rovinné a kolmé k ose prutu před deformací zůstávají rovinné a kolmé k ose prutu i po deformaci.



účinek M_y



$$-u = z \cdot \mathrm{tg}\,\alpha \approx z \cdot \alpha = z \cdot \frac{dw}{dx} = z w'$$

Úplné přemístění průřezu je superpozicí
translace (účinek $N_x \ldots u_0(x)$)
rotace (účinek $M_z \ldots -v'(x)\cdot y$
$M_y \ldots -w'(x)\cdot z$)

$$\Rightarrow \boxed{u(x,y,z) = u_0(x) + [-v'(x)]y + [-w'(x)]z}$$

Normálové napětí σ_x

z fyzikálních rovnic (Hookeova zákona):

$$\sigma_x = E\cdot\varepsilon_x = E\frac{\partial u}{\partial x} = E[\underline{u_0'} + \underline{(-v'')}\cdot y + \underline{(-w'')}\cdot z]$$

parametry deformace, určíme je z definičních vzorců vnitř. sil:

$$N_x = \iint_A \sigma_x\, dA = E[u_0'\underbrace{\iint_A dA}_{A} + (-v'')\underbrace{\iint_A y\, dA}_{S_z} + (-w'')\underbrace{\iint_A z\cdot dA}_{S_y}]$$

$$-M_z = \iint_A y\sigma_x\, dA = E[u_0'\underbrace{\iint_A y\, dA}_{S_z} + (-v'')\underbrace{\iint_A y^2 dA}_{I_z} + (-w'')\underbrace{\iint_A yz\, dA}_{D_{yz}}]$$

$$M_y = \iint_A z\sigma_x\, dA = E[u_0'\underbrace{\iint_A z\, dA}_{S_y} + (-v'')\underbrace{\iint_A yz\, dA}_{D_{yz}} + (-w'')\underbrace{\iint_A z^2 dA}_{I_y}]$$

$dA = dy\cdot dz$

V maticovém tvaru (transformace fyz. vztahů k průřezu)

$$\left\{\begin{matrix} N_x \\ -M_z \\ M_y \end{matrix}\right\} = E \begin{bmatrix} A & S_z & S_y \\ S_z & I_z & D_{yz} \\ S_y & D_{yz} & I_y \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} u_0' \\ (-v'') \\ (-w'') \end{matrix}\right\}$$

vnitřní síly — **matice tuhosti průřezu** — parametry deformace

Řešení parametrů def. lze zjednodušit vhodnou volbou soustavy souřadnic y, z:

a) **osy y, z těžišťové (centrální)** – jinak orient. libovolně

$$S_y = S_z = 0$$

Rovnice pro výpočet přetvoření prutu:

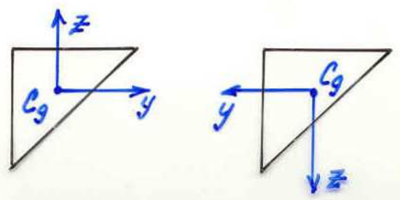
$$u_0' = \frac{N_x}{EA},$$

$$-v'' = -\frac{M_z I_y + M_y D_{yz}}{EI} \qquad I = I_y I_z - D_{yz}^2$$

$$-w'' = \frac{M_y I_z + M_z D_{yz}}{EI}$$

Napětí

$$\boxed{\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z I_y + M_y D_{yz}}{I} y + \frac{M_y I_z + M_z D_{yz}}{I} z}$$



$S_y = S_z = 0$, $D_{yz} \neq 0$

b) Osy y, z hlavní centrální osy setrvačnosti

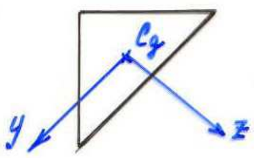
$$D_{yz} = 0$$

Přetvoření:

$$\boxed{u_0' = \frac{N_x}{EA}, \quad v'' = \frac{M_z}{EI_z}, \quad w'' = -\frac{M_y}{EI_y}}$$

Napětí:

$$\boxed{\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} z}$$



N_x, M_y, M_z ... vnitřní síly v daném průřezu konstantní

$\Rightarrow$ průběh napětí – rovina

Průsečnice roviny průřezu s rovinou napětí je přímka = **neutrální osa**

$$\sigma_x = 0$$

Zvláštní případy namáhání

Prostý tah, tlak: $N_x \neq 0 \; (M_y = M_z = 0)$

Jednoduchý ohyb: $M_y \neq 0 \; (M_z = N_x = 0)$

nebo: $M_z \neq 0 \; (M_y = N_x = 0)$

vše vztaženo k hl. centr. osám

Šikmý ohyb: $M_y \neq 0, M_z \neq 0 \; (N_x = 0)$

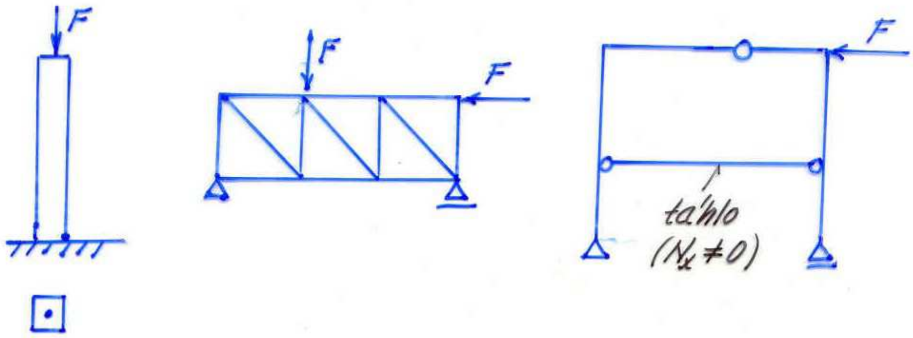
Kombinace tahu (tlaku) s ohybem: $N_x \neq 0, M_y \neq 0, M_z \neq 0$

nebo: $N_x \neq 0, M_y \neq 0, M_z = 0$

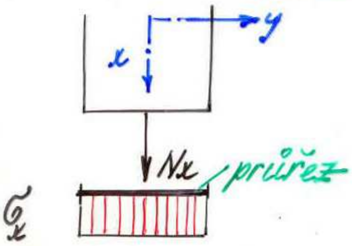
$N_x \neq 0, M_y = 0, M_z \neq 0$

1. Prostý tah, tlak

Jedinou vnitřní silou v průřezu prutu je N_x



Napětí: $\boxed{\sigma_x = \dfrac{N_x}{A}}$ ...po průřezu rozloženo rovnoměrně



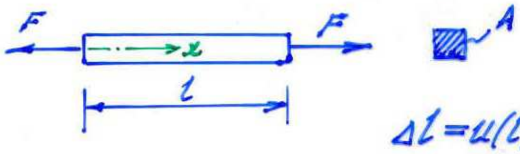
Neutrální osa ($\sigma_x = 0$) leží v nekonečnu.

Deformace ε_x

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha t \quad \text{(fyzikální rov.)}$$

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \Rightarrow u = \dots \quad \text{(geometrická rov.)}$$

Zvláštní případ: $N_x(x), A, E, t \dots$ konstantní



$$\Delta l = u(l) - u(0) = \int_0^l \varepsilon_x \, dx = \int_0^l \left(\frac{N_x}{EA} + \alpha t \right) dx$$

$$\boxed{\Delta l = \frac{N_x \cdot l}{EA} + \alpha t \cdot l}$$

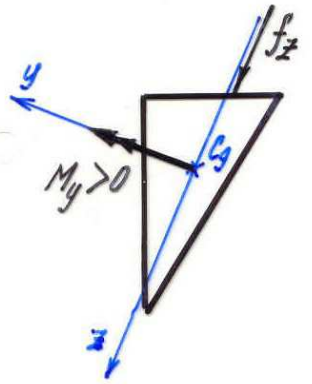
$\dfrac{l}{EA}$ ...poddajnost prutu v tahu (tlaku) $\qquad \dfrac{EA}{l}$ ...tuhost prutu v tahu (tlaku)

2. Jednoduchý ohyb

– rovina zatížení obsahuje jednu z hlavních centrálních os setrvačnosti průřezu (např. z) a k druhé je kolmá

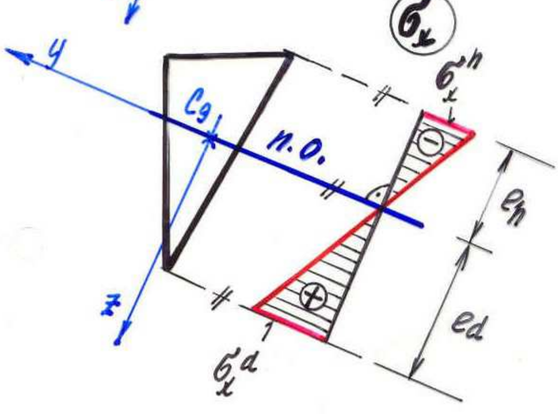
$\Rightarrow M_y \neq 0,\ M_z = 0,\ N_x = 0$ nebo: $M_y = 0,\ M_z \neq 0,\ N_x = 0$

a) $\boxed{M_y \neq 0}$



Napětí: $\boxed{\sigma_x = \dfrac{M_y}{I_y} \cdot z}$

Neutrální osa: $\sigma_x = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow$ osa y
(kolmá k rovině zatížení
a prochází těžištěm)



Napětí v krajních vláknech:

$$\sigma_x^h = \frac{M_y}{I_y}(-e_h)\ ; \quad \left|\sigma_x^h\right| = \frac{|M_y|}{W_y^h}$$

$$\sigma_x^d = \frac{M_y}{I_y} e^d\ ; \quad \left|\sigma_x^d\right| = \frac{|M_y|}{W_y^d}$$

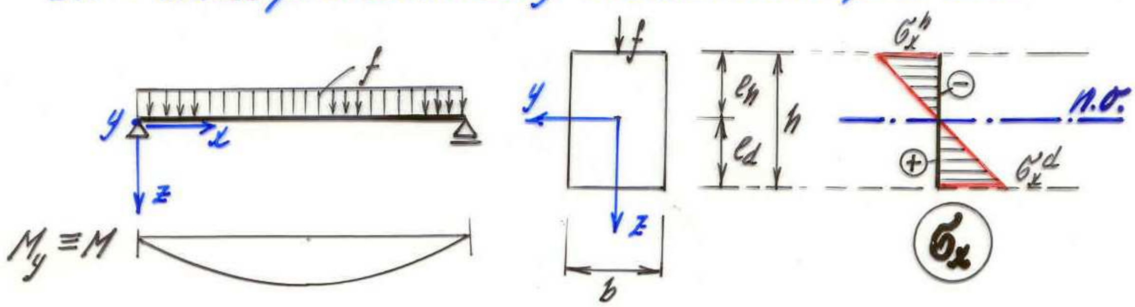
e_h, e_d ... vzdálenosti krajních vláken
(ne souřadnice)

$$\boxed{W_y^h = \frac{I_y}{e_h}\ ; \quad W_y^d = \frac{I_y}{e_d}}$$ průřezové moduly $[m^3]$

Přetvoření: $\boxed{-w'' = \dfrac{M_y}{E I_y}}$

Osa prutu zůstává i po deformaci v rovině zatížení

Př.: Určete průřez. moduly obdélníkového průřezu.

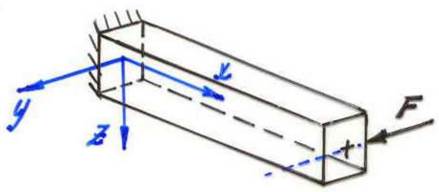


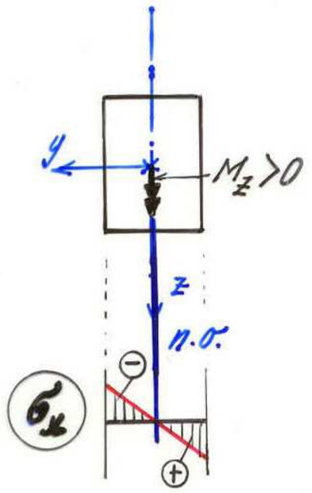
$$\underline{W_y^h = W_y^d = W_y} = \frac{I_y}{e_h} = \frac{\frac{1}{12} b h^3}{\frac{h}{2}} = \underline{\frac{1}{6} b h^2}$$ (průřez sym. i podle osy y $e_h = e_d = \frac{h}{2}$.)

$$\Longrightarrow |\sigma_x^h| = |\sigma_x^d|$$

Analogicky: $W_z = \frac{1}{6} h b^2$ (pro $M_z \neq 0$)

b) $\boxed{M_z \neq 0}$





Napětí:

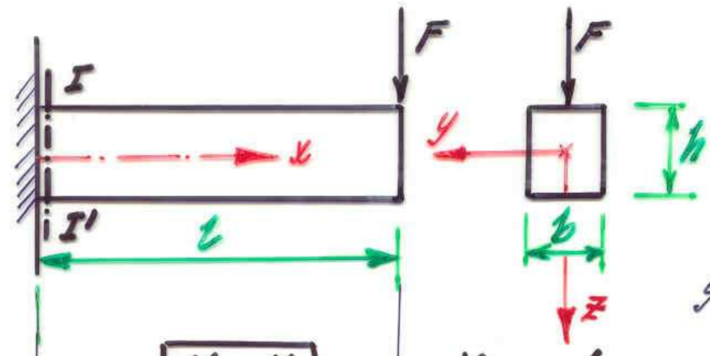
$$\boxed{\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y}$$

Přetvoření:

$$\boxed{v'' = \frac{M_z}{E I_z}}$$

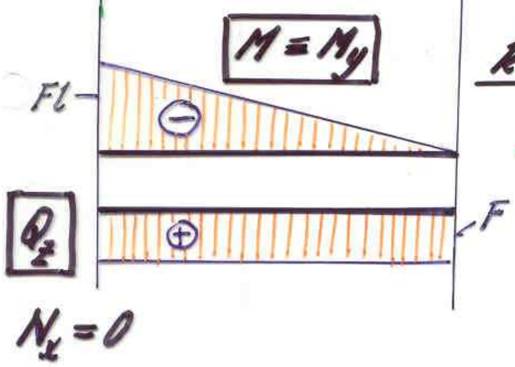
diferenciální rovnice ohybové čáry

Př: Vypočtěte a vykreslete průběh napětí σ_x v řezu I-I'!



$F = 10\,kN$
$b = 0{,}18\,m$
$h = 0{,}24\,m$
$l = 2{,}0\,m$

y, z … hlavní centrální osy setrvačnosti



Řešení

V řezu I-I':

$$M_y = -F \cdot l = -20\,kNm$$
$$M_z = 0$$
$$N_x = 0$$

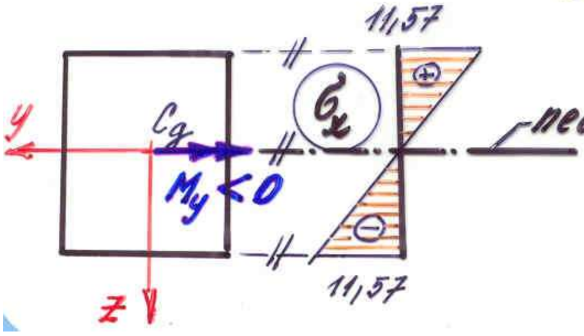
$\Rightarrow$ **jednoduchý ohyb**

Napětí (v hlavních centrál. osách)

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z = \frac{-F \cdot l}{\frac{1}{12} b h^3} \cdot z = \frac{-20 \cdot 10^{-3}}{\frac{1}{12} \cdot 0{,}18 \cdot 0{,}24^3} \cdot z \quad \left[\frac{MNm}{m^4} \cdot m = MPa\right]$$

v krajních vláknech: horních: $z = -\frac{h}{2} \Rightarrow \sigma_x^h = 11{,}57\,MPa$

dolních: $z = +\frac{h}{2} \Rightarrow \sigma_x^d = -11{,}57$

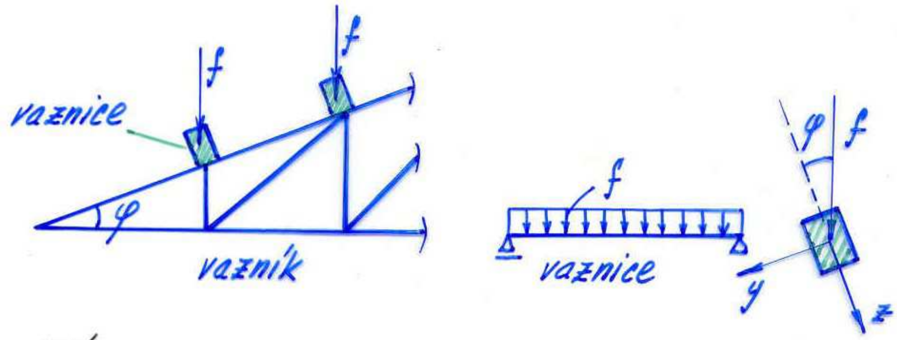


neutrál. osa: $\sigma_x = 0 \Rightarrow z = 0$

3. Šikmý ohyb

Rovina zatížení neobsahuje žádnou z hlavních centrál. os setrvačnosti.

$M_y \neq 0, \; M_z \neq 0, \; N_x = 0$ (vztaženo k hl. c. osám)



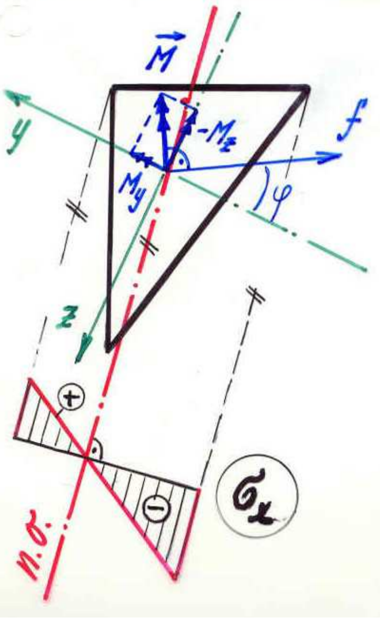
Napětí:

a) v těžišťových osách ($S_y = S_z = 0$; $D_{yz} \neq 0$)

$$\boxed{\sigma_x = -\frac{M_z I_y + M_y D_{yz}}{I}\, y + \frac{M_y I_z + M_z D_{yz}}{I}\, z}$$

$$I = I_y I_z - D_{yz}^2$$

b) v hlavních centrálních osách ($D_{yz} = 0$)

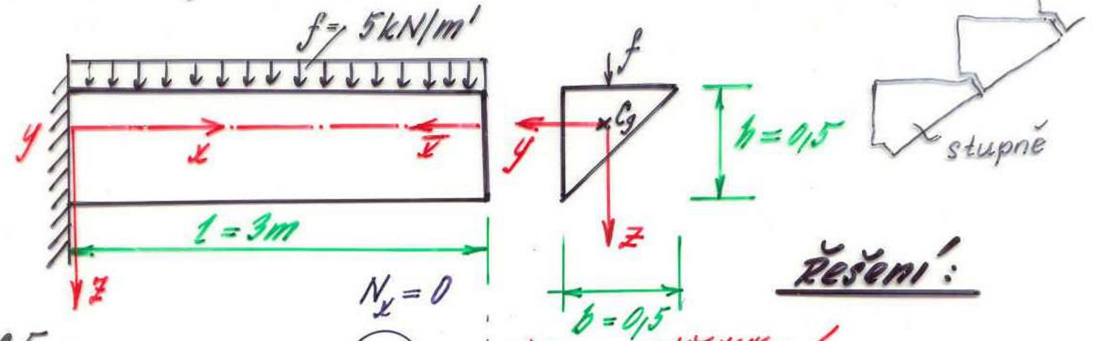


$$\boxed{\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z}\cdot y + \frac{M_y}{I_y}\cdot z}$$

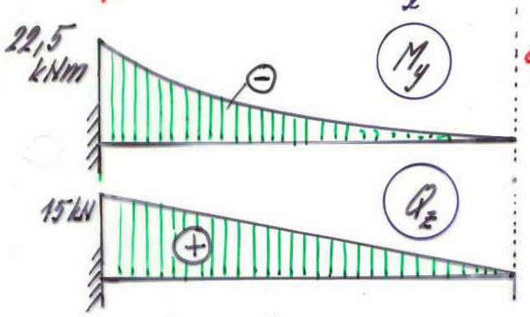
Neutrální osa : $\sigma_x = 0$

- prochází těžištěm průřezu ($y = z = 0$)
  (není ≡ s žádnou hl. centr. osou)
- není kolmá k rovině zatížení
- paprsek zatížení a neutrál. osa tvoří sdružené směry v hlavní centrál. elipse setrvačnosti

Př: Určete polohu n. o. a průběh napětí σ_x v nejvíce namáhaném řezu:



Řešení:



a) y, z ... těžišťové

$N_x = 0$

$M_y = -\frac{1}{2} f \cdot x^2$

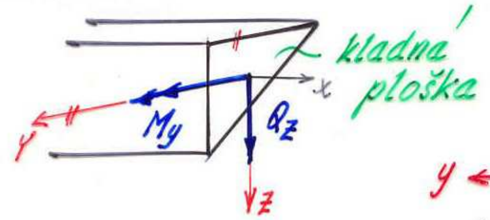
$M_z = 0$

$I_y = \frac{1}{36} b h^3$

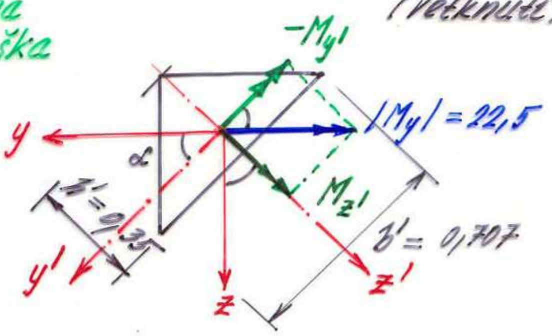
$I_z = \frac{1}{36} h b^3$

$D_{yz} = \frac{1}{72} b^2 h^2$

znaménková konvence:



naše skutečnost: (vetknutí)



b) y', z' ... hlavní centr. osy:

$$\sigma_x = \frac{M_{y'}}{I_{y'}} \cdot z' + \frac{(-M_{z'})}{I_{z'}} \cdot y'$$

$$\boxed{\sigma_x = \frac{-15,91}{9,17 \cdot 10^{-4}} \cdot z' + \frac{(-15,91)}{2,58 \cdot 10^{-3}} \cdot y'}$$

$-M_{y'} = 22,5 \cdot \cos\alpha = +15,91 \text{ kNm}$

$M_{z'} = 22,5 \cdot \sin\alpha = +15,91 \text{ kNm}$

$I_{y'} = \frac{1}{36} b' h'^3 = \frac{1}{36} \cdot 0,707 \cdot 0,35^3 = 9,17 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$

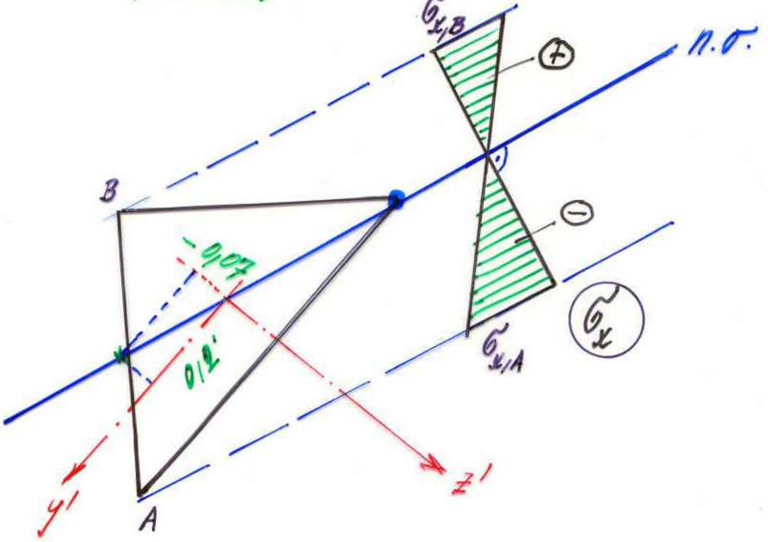
$I_{z'} = \frac{1}{48} h' b'^3 = 2,58 \cdot 10^{-3}$

$D_{y'z'} = 0$

neutrální osa $\sigma_x = 0$

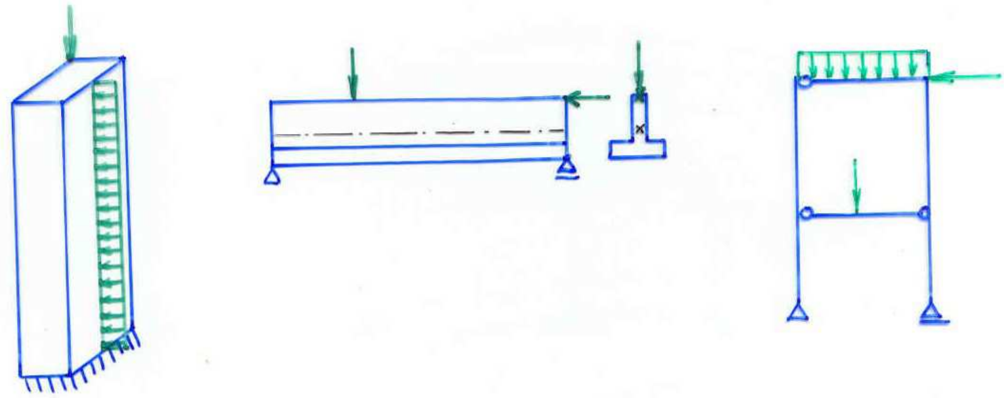
$$-17{,}3 \cdot 10^3 \cdot z' - 6{,}167 \cdot 10^3 y' = 0$$

pro $y' = 0{,}2$ (volíme) vychází $z' = -0{,}07\,m$ ≡ bod na n.o.



4. Ohyb s tahem (tlakem)

$N_x \neq 0, \; M_y \neq 0, \; M_z \neq 0$



Napětí (v hl. centrálních osách)

$$\boxed{\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z + \frac{(-M_z)}{I_z} \cdot y}$$

Přetvoření (v hl. centr. osách)

$$\boxed{u_0' = \frac{N_x}{EA}, \quad v'' = \frac{M_z}{EI_z}, \quad w'' = -\frac{M_y}{EI_y}}$$

Neutrální osa $\sigma_x = 0$

neprochází těžištěm průřezu, má „obecný" směr

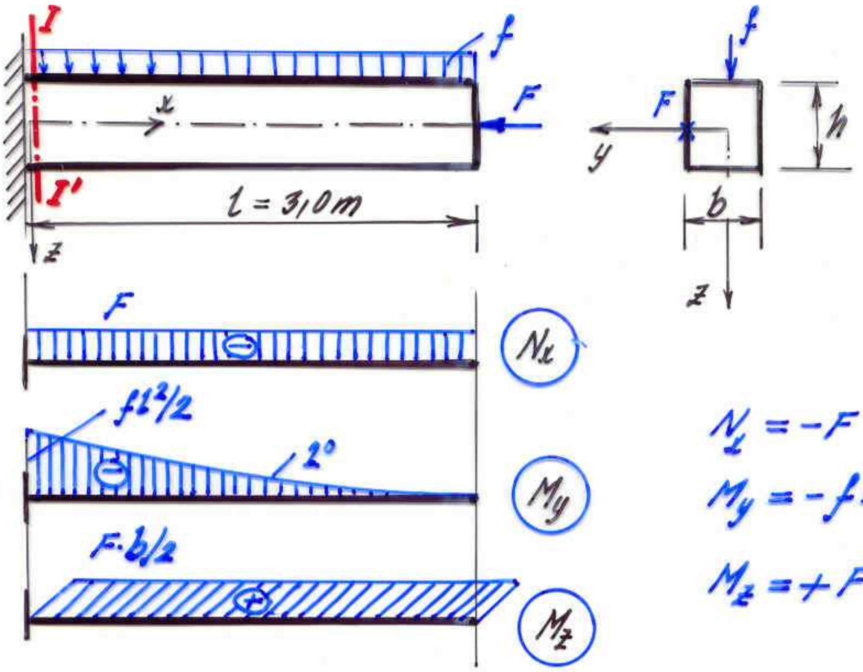
Konstruujeme ji obyčejně pomocí průsečíků s osami y, z

$y = 0 \Rightarrow z_N = \ldots$ (úsekový tvar přímky)

$z = 0 \Rightarrow y_N = \ldots$

V těžišťových osách – vzorce pro napětí i přetvoření viz předchozí přednáška

Př: Stanovte průběh napětí σ_x v nejvíce namáhaném průřezu konzoly! ($F = 30 kN$, $f = 5 kN/m'$, $b = 0,3 m$; $h = 0,4 m$)



$N_x = -F$

$M_y = -f \dfrac{(l-x)^2}{2}$

$M_z = +F \cdot \dfrac{b}{2}$

⇒ Nejvíce namáhaný průřez v řezu I-I' ($x = 0$):

$N_x = -30 kN$

$M_y = -5 \cdot \frac{3^2}{2} = -22,5 kNm$

$M_z = +30 \cdot 0,15 = 4,5 kNm$

$A = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12 m^2$

$I_y = \frac{1}{12} 0,3 \cdot 0,4^3 = 1,6 \cdot 10^{-3} m^4$

$I_z = \frac{1}{12} 0,4 \cdot 0,3^3 = 0,9 \cdot 10^{-3} m^4$

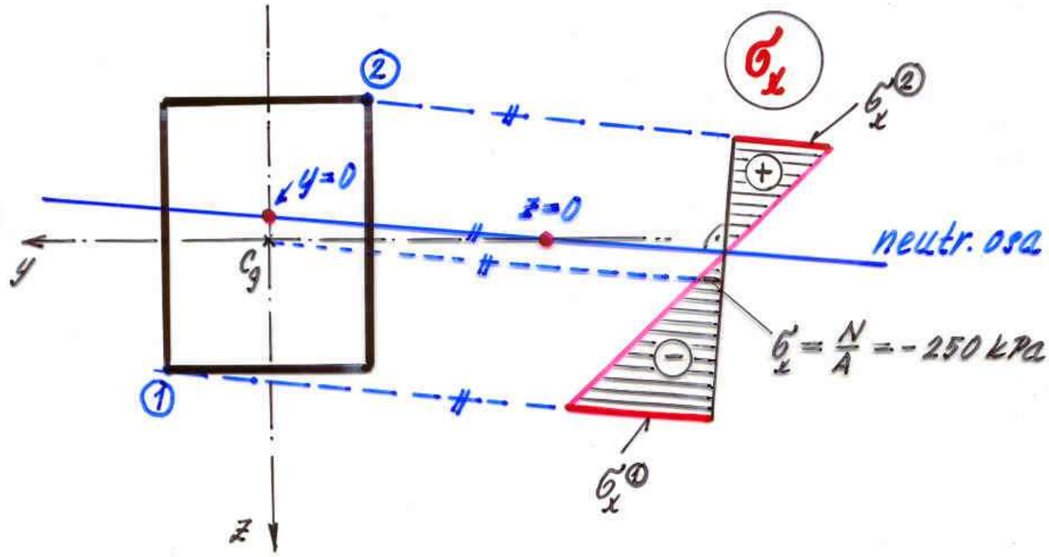
Napětí: $\sigma_x = -\dfrac{30}{0,12} + \dfrac{(-22,5)}{1,6 \cdot 10^{-3}} z + \dfrac{(-4,5)}{0,9 \cdot 10^{-3}} \cdot y$

$= -250 - 14062,5 z - 500 y$

Neutrální osa: $\sigma_x = 0$

Průsečík s osou y: $z = 0 \Rightarrow y = -0{,}5\,m$

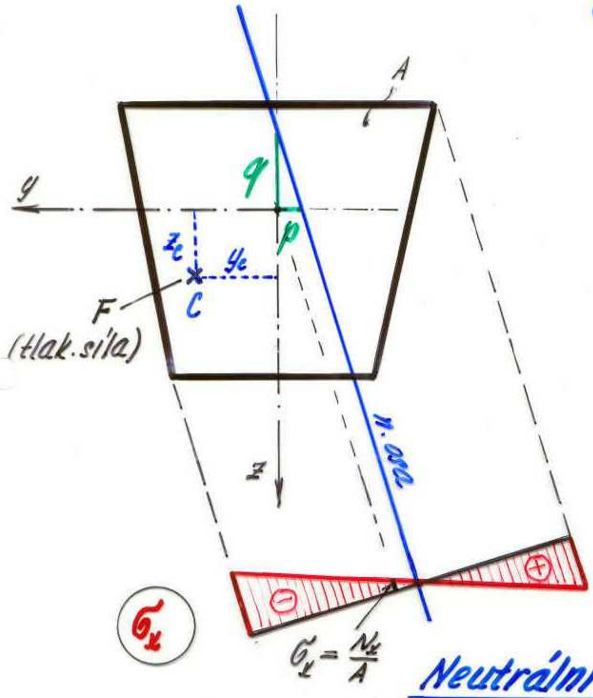
Průsečík s osou z: $y = 0 \Rightarrow z = -0{,}0178\,m$



Zvláštním případem je excentrický tlak způsobený jedinou excentrickou tlakovou silou F

$C[y_c, z_c]$... tlakové centrum

y, z... hlavní centr. osy



$$N_x = -F$$
$$M_y = -F \cdot z_c$$
$$M_z = +F \cdot y_c$$

$$I_y = A \cdot i_y^2$$
$$I_z = A \cdot i_z^2$$

Napětí:

$$\sigma_x = -\frac{F}{A}\left(1 + \frac{y_c}{i_z^2}y + \frac{z_c}{i_y^2}z\right)$$

Neutrální osa: $\sigma_x = 0$

$$\frac{F}{A} \neq 0 \Rightarrow \quad 1 + \frac{y_c}{i_z^2}y + \frac{z_c}{i_y^2}z = 0$$

Úseky, které n.o. vytíná na hl. osách y, z:

$z = 0$ .... $\boxed{y = p = -\frac{i_z^2}{y_c}}$

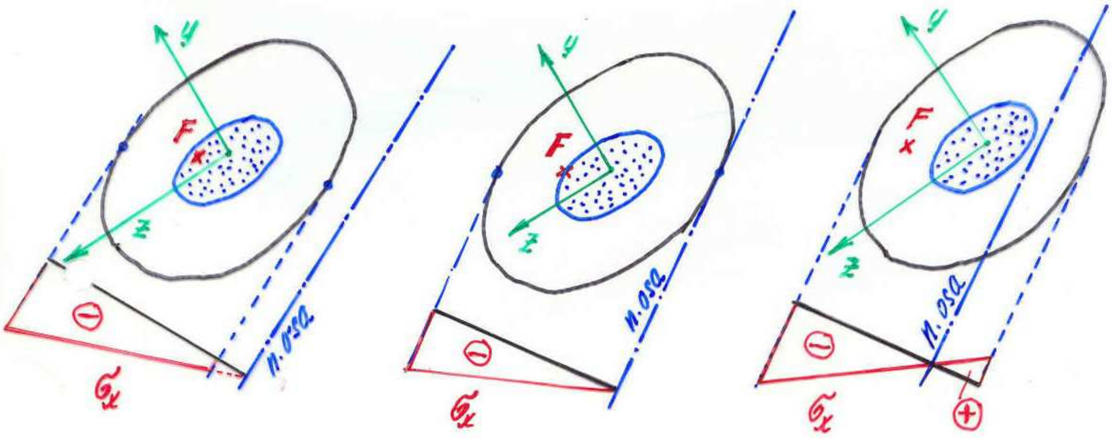
$y = 0$ .... $\boxed{z = q = -\frac{i_y^2}{z_c}}$

$\Rightarrow$ N.o. leží na opačné straně od těžiště nežli je tlakové centrum.

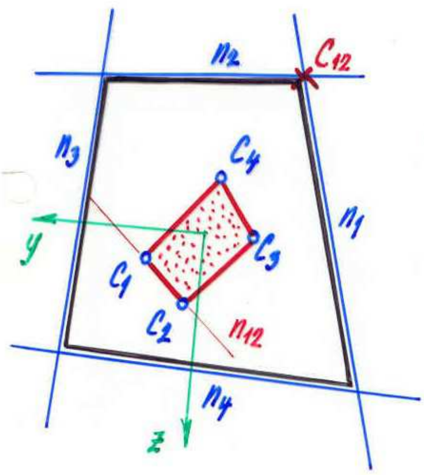
Vzorce se využívají při konstrukci tzv. **jádra průřezu**

Jádro průřezu

= obrazec vymezující část průřezu, ve kterém musí ležet tlakové centrum, aby byl celý průřez namáhán pouze tlakovým napětím. Obsahuje vždy těžiště průřezu.



y, z ... hlavní centr. osy



Konstrukce obrysu jádra průřezu

a) Neutr. osy se kladou postupně jako obálky průřezu (určí se úseky p, q). Vrcholy jádr. obrazce určíme jako odpovídající tlak. centra.

Z duality (bodu odpovídá přímka, přímce → bod)

b) Strany jádra (tečny) lze sestrojit jako neutr. osy ($n_{12}, \ldots$) k tlak. centrům ležícím na obrysu průřezu ($C_{12}, \ldots$)

Při konstrukci jádra využíváme vzorce:

$$y_c = -\frac{i_z^2}{p}\ , \quad z_c = -\frac{i_y^2}{q}$$

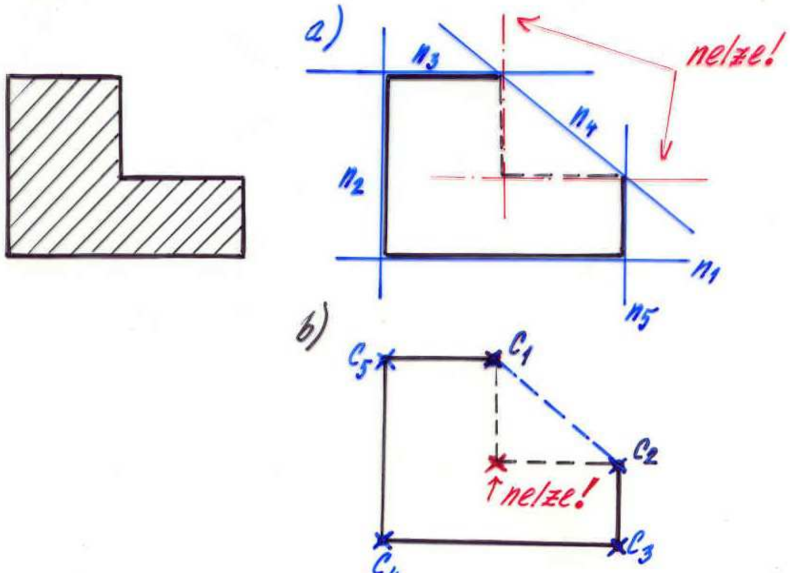
nebo

$$1 + \frac{y_c \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_c \cdot z}{i_y^2} = 0$$

Kce a) $[y_c, z_c]$ ... souřadnice bodů na obrysu jádra
$[y, z]$ .... souřadnice bodů ležících na obrys. přímkách průřezu (n_1, n_2, ...)

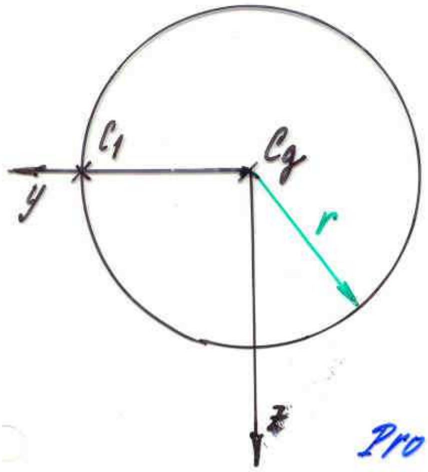
b) formálně záměnou významu proměnných
$y_c \longleftrightarrow y$, $z_c \longleftrightarrow z$

Obálka průřezu musí tvořit konvexní útvar!



Použití jádra - konstrukční části z materiálů špatně vzdorujících tahu (např. beton) se snažíme zatěžovat excentr. osovou silou působící v jádře průřezu!

Př: určete jádro průřezu!



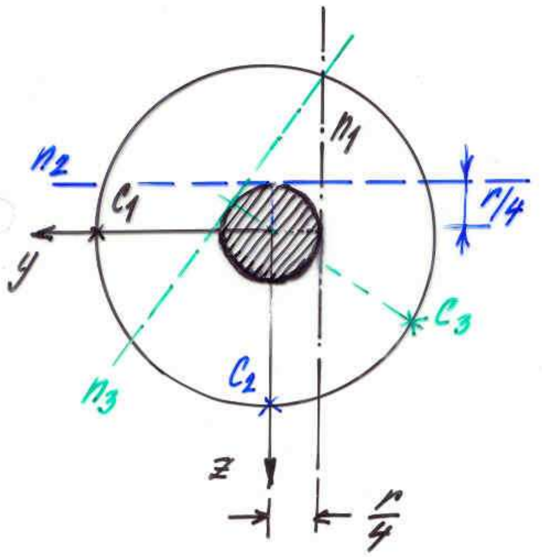
Řešení – pomocí duality (b)
Neutr. osy k tlakovým centrům vytvoří obálku jádra průřezu:

$$1 + \frac{y_c \cdot y}{i_z^2} + \frac{z_c \cdot z}{i_y^2} = 0$$

Pro tlak. centrum C_1: $y_c = r$, $z_c = 0$

$$\text{●}: \; i_z^2 = i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{\pi r^4}{4}}{\pi r^2} = \frac{r^2}{4}$$

$$n.o.: \quad 1 + \frac{r \cdot y}{\frac{r^2}{4}} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{r}{4}}}$$



Přetvoření ohýbaných prutů

Rovnice pro parametry deformace u_0', v'', w'' byly odvozeny
- v libovolném těžišťovém systému souřadnic
- v hlavních centrálních osách y, z.

Složky přemístění bodů ležících na střednici prutu u_0, v, w získáme integrací těchto diferenciálních rovnic.

V hl. centr. osách (viz př. Ohyb prutů)

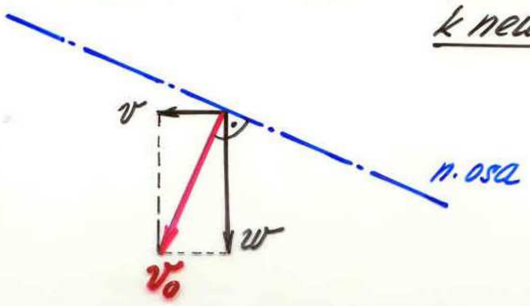
$$\frac{du_0(x)}{dx} = \frac{N(x)}{EA(x)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2v(x)}{dx^2} &= \frac{M_z(x)}{EI_z(x)} \\ \frac{d^2w(x)}{dx^2} &= \frac{-M_y(x)}{EI_y(x)} \end{aligned}}$$

diferenciální rovnice ohybové čáry

Při obecném (prostorovém) zatíž. prutu ⇒ ohyb. čára je prostorová křivka

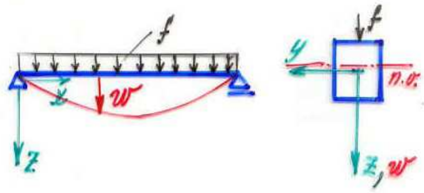
Při působení vnějších sil v jedné rovině (např. jednoduchý ohyb, šikmý ohyb, ...) výsledné průhyby $v_0 = \sqrt{v^2 + w^2}$ jsou kolmé k neutrální ose



Zvláštní případ : **zatížení působí v rovině xz**

$\Rightarrow$ **pouze průhyb $w \neq 0$ ($v = 0$)**

$$\Rightarrow \quad w'' = \boxed{\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{-M_y(x)}{E I_y(x)}}$$



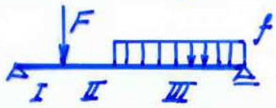
integrací: v každém intervalu

$$w' = \frac{dw(x)}{dx} = -\int \frac{M_y(x)}{E I_y(x)} dx + C_1$$

$$w(x) = -\int \left[\int \frac{M_y(x)}{E I_y(x)} dx \right] dx + C_1 x + C_2$$

C_1, C_2 ... integrační konstanty

je-li n intervalů (např. nespojité zatíž.) $\Rightarrow 2n$ int. konstant u kce stat. urč.

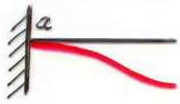


$3 \times 2 = 6$ int. konst.

Podmínky pro řešení integračních konstant :

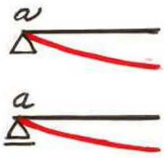
- **okrajové podmínky (geometrické)** :

vetknutí



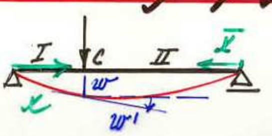
$$\boxed{\begin{aligned} w_a &= 0 \\ w'_a &= \frac{dw}{dx}\Big|_a = 0 \end{aligned}}$$

pevný, posuvný kloub



$$\boxed{w_a = 0}$$

- **podmínky spojitosti** (na rozhraní mezi intervaly)



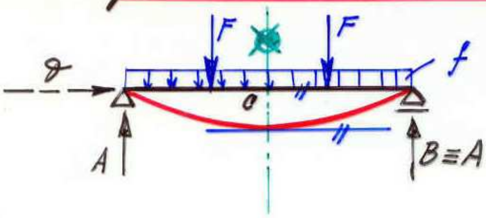
$$\boxed{\begin{aligned} w_{I,c} &= w_{II,c} \\ w'_{I,c} &= w'_{II,c} \end{aligned}}$$

nebo

$$w_{I,c}(x) = w_{II,c}(\bar{x})$$
$$w'_{I,c}(x) = - w'_{II,c}(\bar{x})$$

U symetrických kcí symetricky zatížených je ohybová čára symetrická křivka (M_y sym.)

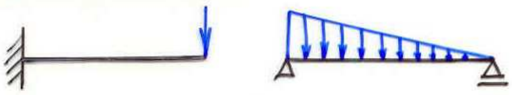
⇒ • **podmínka na ose symetrie**



$$\boxed{w_c' = 0}$$

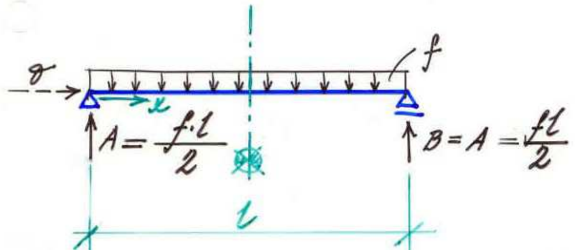
A) Soustavy staticky určité

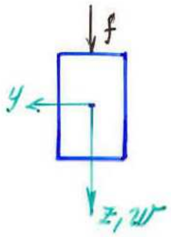
2 int. konst. – ojediněle

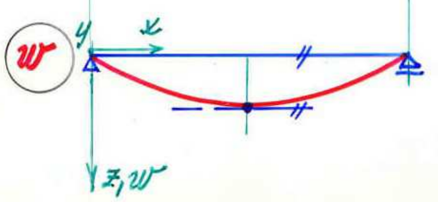


Při 2n konstantách (n intervalů) k jejich určení kombinujeme okr. podm. s podm. spojitosti (příp. s podm. na ose symetrie).

Příklad: 1) Určete ohyb. čáru prostého n. zatíž. dle obr.
2) Stanovte pootočení levé podpory
3) Stanovte max. průhyb.







V důsledku zatížení:
kce symetrická, sym. zatížená
$A = B$

$$M_y(x) = A \cdot x - \frac{f x^2}{2} = \frac{f}{2}(l x - x^2)$$

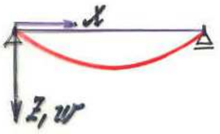
Alternativa I (řešíme celou délku nosníku)

dif. rovnice ohyb. čáry : $\boxed{w''(x) = -\dfrac{M_y(x)}{EI_y}}$

dosazením M_y $\qquad w''(x) = -\dfrac{f}{2EI_y}(lx - x^2)$

po 1. integraci $\qquad w'(x) = -\dfrac{f}{2EI_y}\left(l\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}\right) + C_1$

po 2. integraci $\qquad w(x) = -\dfrac{f}{2EI_y}\left(\dfrac{l}{2}\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{12}\right) + C_1 x + C_2$



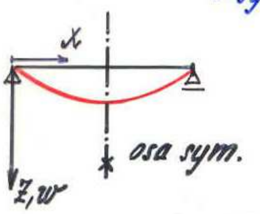
Okrajové podmínky :

$w(x=0) = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = 0$

$w(x=l) = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = \dfrac{fl^3}{24EI_y}$

1) $\Rightarrow \boxed{w(x) = -\dfrac{f}{2EI_y}\left(\dfrac{lx^3}{6} - \dfrac{x^4}{12}\right) + \dfrac{fl^3}{24EI_y}x}$ rovnice ohybové čáry

Alternativa II (využijeme symetrie kce a zatížení ⇒ symetrická ohyb. čára (řešíme 1/2 nosníku)



$w(x=0) = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = 0$

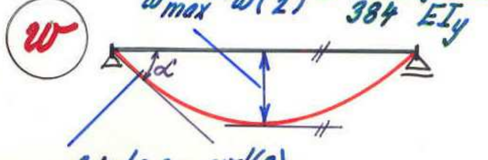
$w'(x=\tfrac{l}{2}) = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = \dfrac{1}{24}\dfrac{fl^3}{EI_y}$

$$\Longrightarrow\; w(x)_{alt.II} = w(x)_{alt.I}$$

2) **Pootočení levé podpory :**

$w'(x=0) = C_1 = \dfrac{1}{24}\dfrac{fl^3}{EI_y}$

$w_{max} = w(\tfrac{l}{2}) = \dfrac{5}{384}\dfrac{fl^4}{EI_y}$

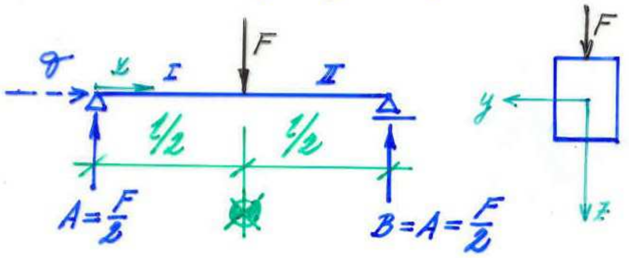


3) **Maximální průhyb (uprostřed)**

$w(x=\tfrac{l}{2}) = \dfrac{5}{384}\dfrac{fl^4}{EI_y}$

$\alpha \doteq tg\alpha = w'(0) = \dfrac{1}{24}\dfrac{fl^3}{EI_y}$

Příklad: Určete max. průhyb nosníku ($EI_y = EI = konst.$)
Využijte symetrie.



I. int.: $M_y(x) = \frac{F}{2} \cdot x$

$$EI\,w'' = -\frac{F}{2}x$$

$$EI\,w' = -\frac{F}{2}\frac{x^2}{2} + C_1$$

$$EI\,w = -\frac{F}{4}\frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

1. Okrajová podmínka: $x = 0: \; w = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

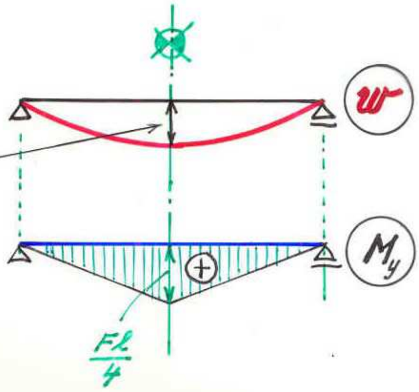
2. Podmínka symetrie: $x = \frac{l}{2} \quad w' = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{F}{4}\frac{l^2}{4} + C_1$

$$C_1 = \frac{Fl^2}{16}$$

Rovnice ohyb. čáry:

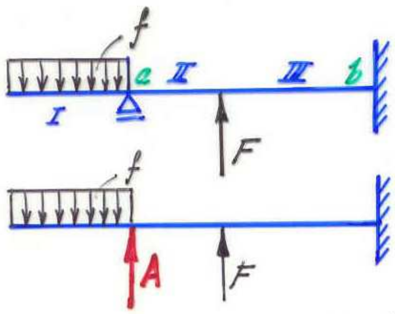
$$w(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{F}{12}x^3 + \frac{Fl^2}{16}x\right)$$

$$\max w\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{Fl^3}{48EI_y}$$



B) Staticky neurčité nosníky

řešení „přes" kce stat. určité



n.... počet intervalů (3)

s.... stupeň statické neurč. (1)

Počet **neznámých** : $(2n+s)$

$(3 \cdot 2 + 1 = 7)$

Pro určení neznámých máme k dispozici :

$(2+s)$ ... geometrických podmínek

- 2 okrajové p. $(w_b = 0,\ w'_b = 0)$
- s. přetvárné p. $(w_a = 0)$ } 3

$2(n-1)$ podmínek spojitosti mezi intervaly $(2 \times 2 = 4)$

$\Rightarrow$ **$(2n+s)$ podmínek**

Vhodným způsobem integrace redukujeme počet neznámých

A) u stat. urč. nosníků na **2** (C_1, C_2)

B) u stat. neurč. nosníků na **2+s** (C_1, C_2, A)

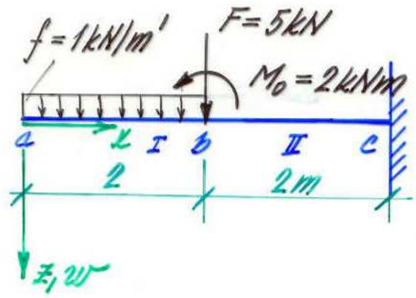
Clebschova metoda (vhodná pro nosníky s konst. EI)

Zásady:

1. Počátek systému souřadnic (x) stále z téhož bodu (i $M_y(x)$)
2. Moment v int. následujícím musí být vyjádřen formálně zcela stejně jako v int. předcházejícím + další člen(y)
3. Integrace v uzavřeném tvaru

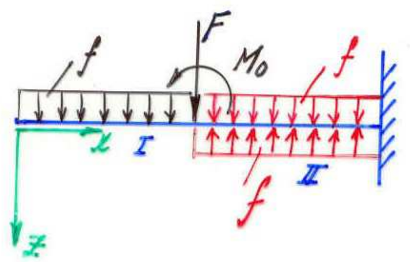
Příklad Určete rovnici ohyb. čáry konzoly, průhyb a natočení jejího konce. (EI = konst.)

Řešení Clebschovou metodou.



$$M_I(x) = -\frac{f \cdot x^2}{2}$$

$$M_{II}(x) = -\frac{f x^2}{2} + \frac{f(x-2)^2}{2} - F(x-2) - M_0$$



f … fiktivní zatížení

I. interval: $\boxed{M = -\frac{x^2}{2}}$

$$EI\,w'' = +\frac{x^2}{2}$$

$$EI\,w' = \frac{x^3}{6} + C_1$$

$$EI\,w = \frac{x^4}{24} + C_1 x + C_2$$

II. interval: $\boxed{M = -\frac{x^2}{2} + \frac{(x-2)^2}{2} - 5(x-2) - 2}$

$$EI\,w'' = \frac{x^2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2} + 5(x-2) + 2$$

integrace v uzavřeném tvaru

$$EI\,w' = \frac{x^3}{6} - \frac{(x-2)^3}{6} + 5\frac{(x-2)^2}{2} + 2(x-2) + C_3$$

$$EI\,w = \frac{x^4}{24} - \frac{(x-2)^4}{24} + 5\frac{(x-2)^3}{6} + 2\frac{(x-2)^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Podmínky spojitosti (⇒ redukce počtu konstant)

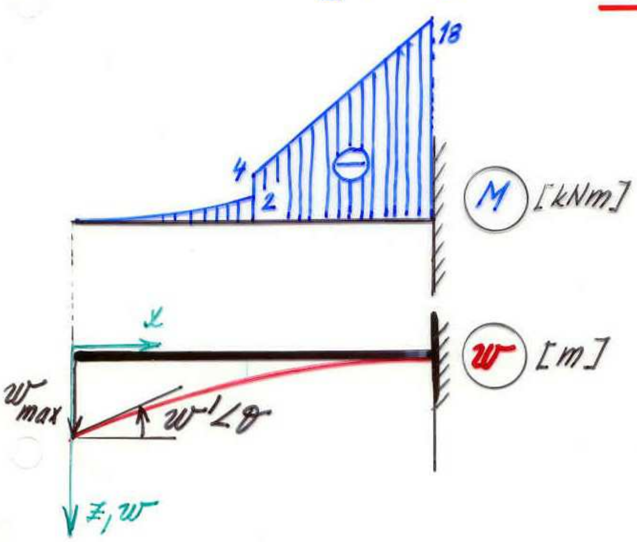
pro $x=2$: $\quad w'_I(x=2) = w'_{II}(x=2) \Rightarrow \underline{C_1 = C_3}$

$\quad w_I(x=2) = w_{II}(x=2) \Rightarrow \underline{C_2 = C_4}$

Okrajové podmínky (⇒ velikost konstant)

pro $x=4$: $\quad w'_{II}(x=4) = 0 \Longrightarrow \underline{C_3 = C_1 = -\frac{70}{3}}$

$\quad w_{II}(x=4) = 0 \Longrightarrow \underline{C_4 = C_2 = \frac{218}{3}}$



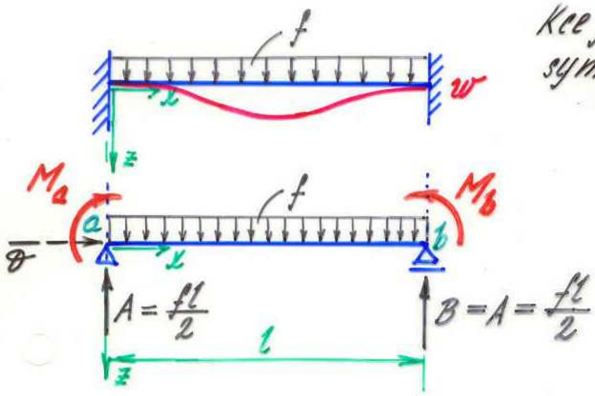
pro $x=0$ … w_{max}

$$w_I(x=0) = \frac{C_2}{EI} = \frac{218}{3EI}$$

$$w'_I(x=0) = \frac{C_1}{EI} = -\frac{70}{3EI}$$

Poznámka: Pozor na jednotky! (E … [kPa]
I … [m⁴])

Příklad: Vypočtěte průběh momentů a ohybovou čáru nosníku zatíženého dle obr. $EI = konst.$ (Neuvažujte prodloužení střednice $\Rightarrow N = 0$).



Kce je stat. neurčitá, symetrická, symetr. zatížená ($\Rightarrow$ $M(x)$ – sym. $w(x)$ – průběhy)

Řešení

zvolíme přípustnou kci stat. určitou, zavedeme stat. neurč. veličinu $M_a = M_b = ?$

(s využ. sym. $\Rightarrow$ kce 1x stat. neurč. neznámé: $2 \cdot 1 + 1 = 3$)

$$M_y(x) = \underline{M_a} + \frac{fl}{2} \cdot x - \frac{fx^2}{2}$$

$$EI\,w'' = -\underline{M_a} - \frac{fl}{2}x + \frac{fx^2}{2}$$

$$EI\,w' = -\underline{M_a}x - \frac{fl}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{f}{2}\frac{x^3}{3} + \underline{C_1}$$

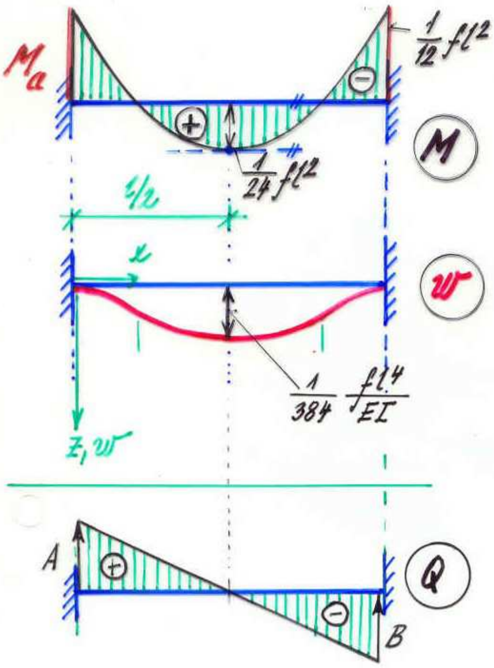
$$EI\,w = -\underline{M_a}\frac{x^2}{2} - \frac{fl}{4}\frac{x^3}{3} + \frac{f}{6}\frac{x^4}{4} + \underline{C_1}x + \underline{C_2}$$

neznámé (3)

1. $w(x=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ (okrajová podm.)
2. $w'(x=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ (přetvárná podm.)
3. $w'(x=\frac{l}{2}) = 0 \Rightarrow M_a = -\frac{fl^2}{12}$ (podm. symetrie)

$$\Rightarrow \boxed{M_y(x) = -\frac{fl^2}{12} + \frac{fl}{2}x - \frac{fx^2}{2}}$$ průběh momentů

$$\boxed{EI\,w(x) = +\frac{fl^2}{24}x^2 - \frac{fl}{12}x^3 + \frac{f}{24}x^4}$$ ohyb. čára

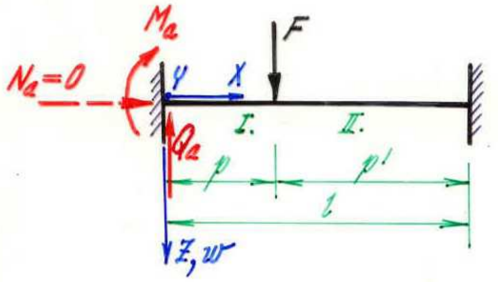


uprostřed nosníku : $x = \frac{l}{2}$

$$M_y\left(x=\frac{l}{2}\right) = \frac{f l^2}{24}$$

$$w\left(x=\frac{l}{2}\right) = \frac{f l^4}{384\, EI}$$

Příklad: Vypočtěte průběh momentů a ohybovou čáru nosníku zatíženého dle obr. Neuvažujte prodloužení střednice. ($\Rightarrow$ výpočet podle teorie I. řádu). EI = konst.



Řešení:

$N_a = 0$ ($\Leftarrow$ z předpokladu $\Delta l = 0$)

stupeň stat. neurčitosti $s = 2$

staticky neurč. veličiny: M_a, Q_a

Celkový počet neznámých $(2\cdot 2 + 2) = 6$

$$\underbrace{C_1, C_2}_{\text{I. int.}} + \underbrace{C_3, C_4}_{\text{II. int.}} + \underbrace{M_a, Q_a}_{s=2}$$

$\Rightarrow$ potřebujeme 6 podmínek pro jejich určení

Část I:

$$\boxed{M_I(x) = M_a + Q_a x}$$

$$-w_I''(x) = \frac{1}{EI}(M_a + Q_a x)$$

$$-w_I'(x) = \frac{1}{EI}\left(M_a x + Q_a \frac{x^2}{2}\right) + C_1$$

$$-w_I(x) = \frac{1}{EI}\left(M_a \frac{x^2}{2} + Q_a \frac{x^3}{6}\right) + C_1 x + C_2 \qquad (a)$$

Část II:

$$\boxed{M_{II}(x) = M_a + Q_a x - F(x-p)}$$

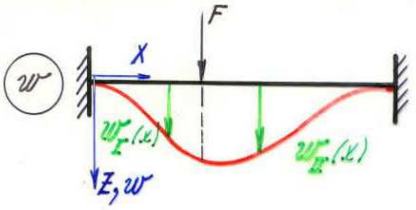
$$-w_{II}''(x) = \frac{1}{EI}\left[M_a + Q_a x - F(x-p)\right]$$

integrace v uzavřeném tvaru

$$-w_{II}'(x) = \frac{1}{EI}\left[M_a x + Q_a \frac{x^2}{2} - F\frac{(x-p)^2}{2}\right] + C_3$$

$$-w_{II}(x) = \frac{1}{EI}\left[M_a \frac{x^2}{2} + Q_a \frac{x^3}{6} - F\frac{(x-p)^3}{6}\right] + C_3 x + C_4 \qquad (b)$$

Okrajové podmínky a podmínky spojitosti



1. $x=0$: $w_I(0)=0$, $w_I'(0)=0$

2. $x=p$: $w_I(p)=w_{II}(p)$
$w_I'(p)=w_{II}'(p)$

3. $x=l$: $w_{II}(l)=0$, $w_{II}'(l)=0$

2. skupina : $x=p$

$$-w_I'(p) = -w_{II}'(p)$$

$$\frac{1}{EI}\left(\cancel{M_a p}+\cancel{Q_a\frac{p^2}{2}}\right)+C_1 = \frac{1}{EI}\left[\cancel{M_a p}+\cancel{Q_a\frac{p^2}{2}}-F\underbrace{\frac{(p-p)^2}{2}}_{0}\right]+C_3 \Rightarrow \underline{C_1=C_3}$$

$$-w_I(p) = -w_{II}(p) \Rightarrow \underline{C_2=C_4}$$

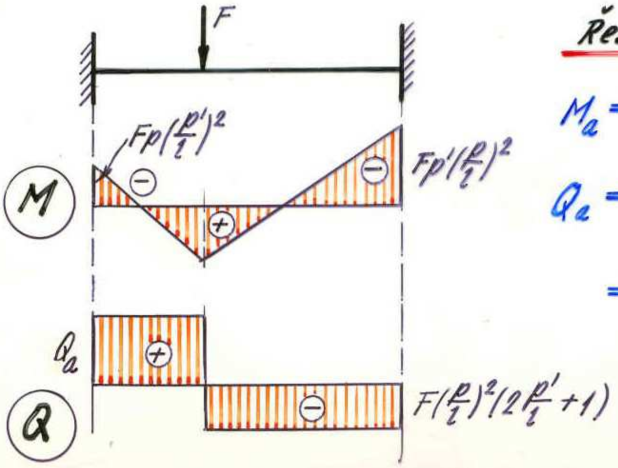
1. skupina : $x=0$

$$w_I'(0)=0 \Rightarrow \boxed{C_1=C_3=0}$$
$$w_I(0)=0 \Rightarrow \boxed{C_2=C_4=0}$$

3. skupina : $x=l$

$$-EI\,w_{II}'(l) = \underline{M_a}\,l+\underline{Q_a}\frac{l^2}{2}-F\frac{(\overbrace{l-p}^{p'})^2}{2}=0$$
$$-EI\,w_{II}(l) = \underline{M_a}\frac{l^2}{2}+\underline{Q_a}\frac{l^3}{6}-F\frac{(l-p)^3}{6}=0$$

} 2 rovnice pro 2 neznámé



Řešením :

$$M_a = -Fp\left(\frac{p'}{l}\right)^2$$

$$Q_a = \frac{2Fp'}{l^2}\left(\frac{pp'}{l}+\frac{p'}{2}\right)$$
$$= F\left(\frac{p'}{l}\right)^2\left[2\frac{p}{l}+1\right]$$

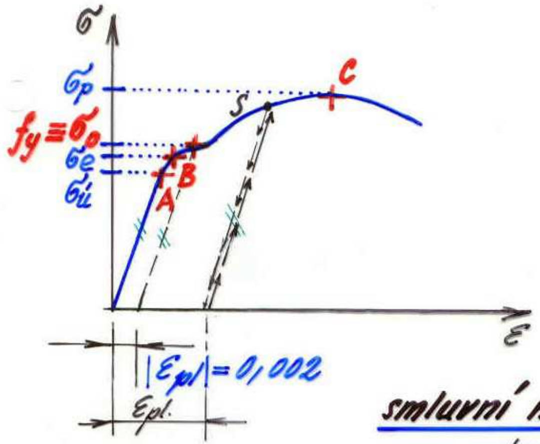
$\Rightarrow w_I(x)$ (a)

$\Rightarrow w_{II}(x)$ (b)

Pružnoplastický a plastický stav průřezů ohýbaných prutů

- dodatečným přitížením pružně přetvořeného prutu normálové napětí dosáhne **meze kluzu f_y**
  - v celém průřezu (tah, tlak)
  - n. jen v krajních vláknech (ohyb)

Skutečný pracovní diagram ($\sigma \times \varepsilon$)



$\sigma_ú$ ... mez úměrnosti

σ_e ... mez pružnosti (elasticity)

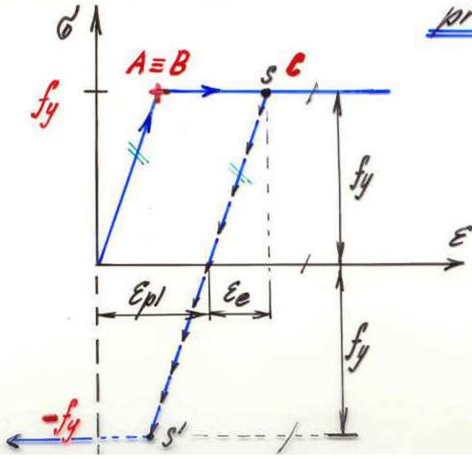
$f_y \equiv \sigma_0$ ... mez kluzu (plasticity)

σ_p ... mez pevnosti

smluvní mez kluzu ... napětí odpovídající trvalé deformaci $|\varepsilon_{pl}| = 0{,}002$

deformační zpevnění = vzrůst napětí za mezí kluzu

Zjednodušení výpočtů v oboru nepruž. ε:

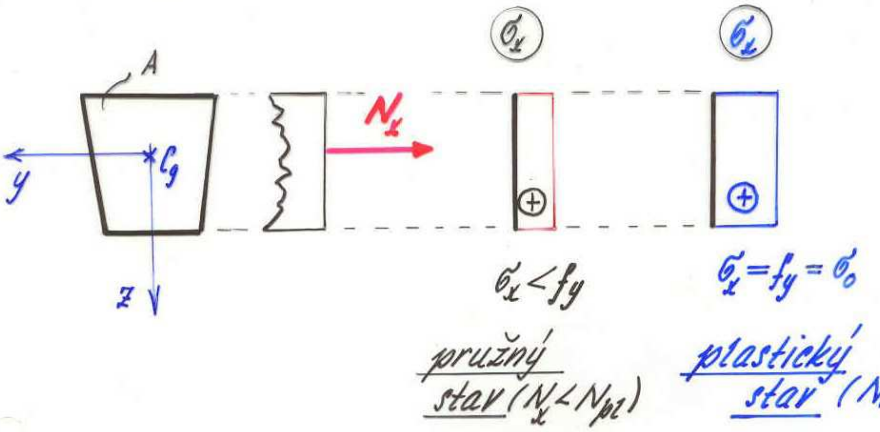


předp.: deformační zpevnění zanedbat.

$\Rightarrow$ model ideálně pružnoplastického materiálu, charakterizovaný **ideálním Prandtlovým diagramem**

absol. hodnoty mezí plasticity v tahu a tlaku stejné

Prostý tah, tlak



σ_x ... konstantní ⇒ průřez z izotropního materiálu přechází z pružného do plastického stavu celý, najednou, když

$$|\sigma_x| = f_y$$

(nedochází k postupnému zplastizování průřezu x jednoduchý ohyb)

podmínka ekvivalence :

$$N_x = \iint_A \sigma_x \, dA$$

plastický stav ..... $N_x = N_{pl}$

Plastická normálová síla : $\boxed{N_{pl} = f_y \cdot A}$

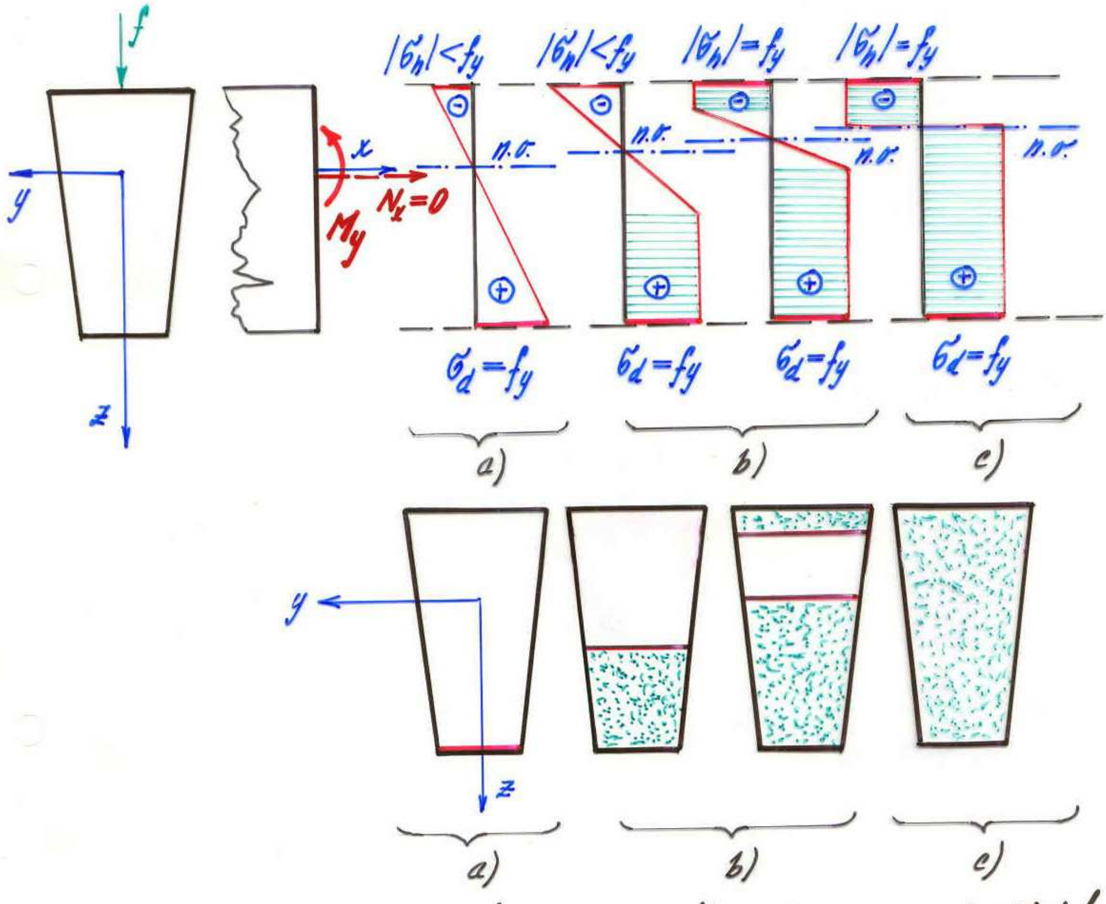
Heterogenní průřez - složený z $i = 1, 2, \dots n$ materiálů s různými mezemi plasticity f_{yi}

$$N_{pl} = \sum_{i=1}^{n} f_{yi} A_i$$

Jednoduchý ohyb ($M_y \neq 0$, $N_x = 0$)

předp.: stejné meze kluzu v tahu a tlaku ... f_y (např. ocel)

Postupné zplastizování průřezu (probíhá ve třech fázích)



mezní pružný stav

pružnoplastický stav

plastický stav

únosnost průřezu: $\boxed{M_{el}}$ $\boxed{M_{elpl}}$ $\boxed{M_{pl}}$

a) Mezní pružný stav - průřez je v oboru pružného namáhání, pokud je splněna podmínka mezního pružného stavu:

$$\boxed{M_{el} = W_{min.} \cdot f_y}$$

$W_{min.}$ ... průřezový modul ke vzdálenějším krajním vláknům od osy y

(Využití vztahů z jednoduchého ohybu: $\sigma_d = \frac{M_y}{W_d}$, $M_y = M_{el}$, $\sigma_d = f_y$)

b) Pružnoplastický stav

K dispozici máme 2 podmínky ekvivalence sil v průřezu:

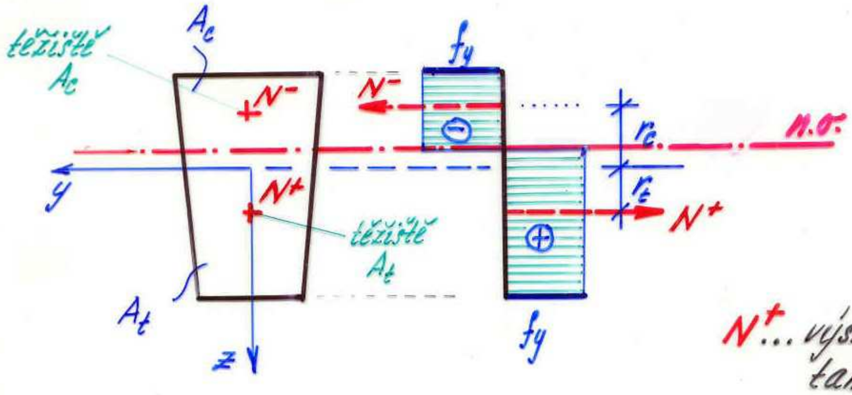
1) $N_x = 0$ ..... $\boxed{\iint_A \sigma_x \, dA = 0}$

2) $M_y = M_{elpl}$ ..... $\boxed{M_{elpl} = \iint_A \sigma_x \cdot z \, dA}$

pro 2 neznámé:

- poloha neutrální osy (obecně neprochází těžištěm průřezu; × průřez dvojose sym.)
- moment únosnosti průřezu $M_y = M_{elpl}$

c) Plastický stav (průřez plně zplastizován)



N^+... výslednice tahového napětí σ_x

N^-... výslednice tlakového napětí

2 podmínky ekvivalence sil v průřezu:

1. $\boxed{N^+ + N^- = 0}$

$$f_y \cdot A_t + (-f_y) \cdot A_c = 0 \Rightarrow \boxed{A_t = A_c = \frac{A}{2}}$$

$\Rightarrow$ **neutrální osa dělí průřez na dvě části o stejné ploše**

2. $\boxed{M_y = M_{pl}}$

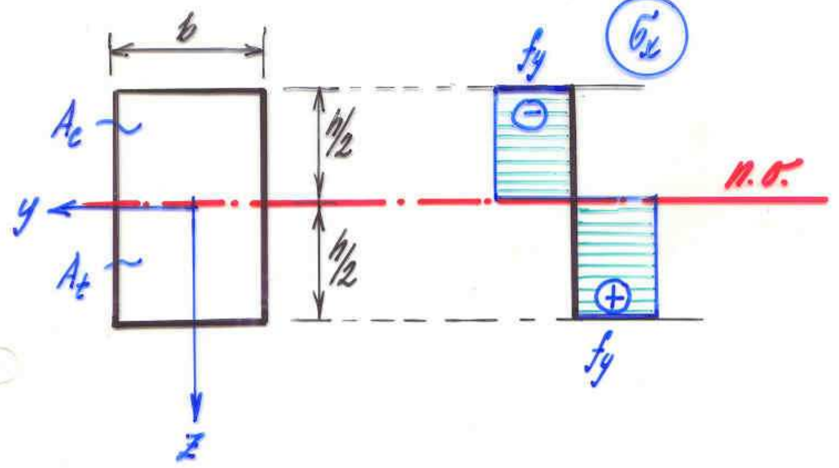
$$f_y \cdot A_t \cdot r_t + f_y \cdot A_c \cdot r_c = M_{pl}$$

$$f_y \cdot (S_{y,t} - S_{y,c}) = M_{pl}$$

$\underline{W_{pl} = |S_{y,t}| + |S_{y,c}|}$ .... průřezový modul v plastickém stavu

$$\boxed{M_{pl} = f_y \cdot W_{pl}}$$

Příklad: Určete průřezový plastický modul obdélníkového průřezu.



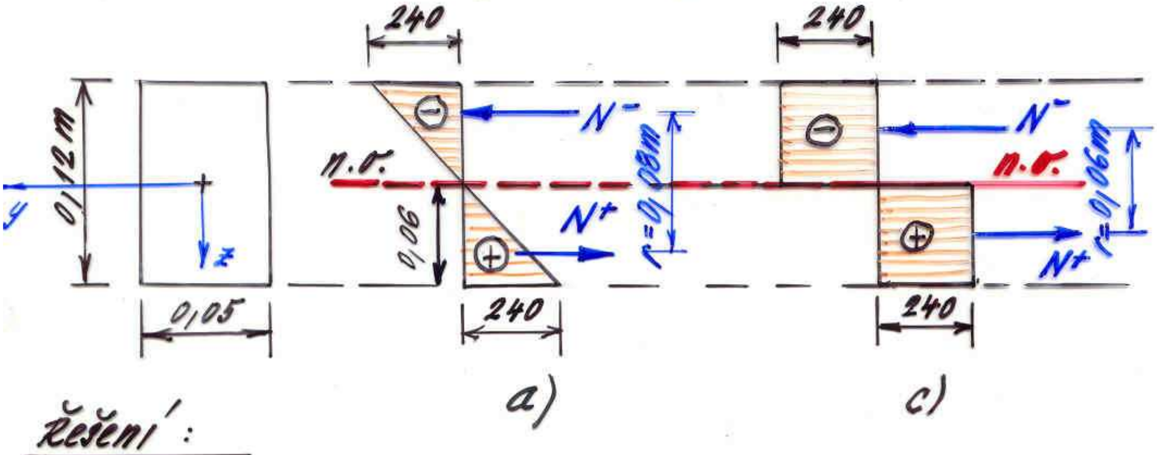
Řešení: U dvojose symetrických průřezů prochází neutr. osa ve všech fázích namáhání těžištěm průřezu (tedy i v c))

$$\underline{W_{pl}} = |S_{y,t}| + |S_{y,c}| = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} \cdot 2 = \underline{\frac{bh^2}{4}}$$

$$\left(\times\ W_{el} = \frac{I_y}{\frac{h}{2}} = \frac{\frac{1}{12} bh^3}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6} \right)$$

použijeme při odtěžování

Př. Obdélníkový průřez je namáhán ohyb. momentem $M_y = 36,8\ kNm$. Zjistěte, zda je průřez v pružném, pružnoplastickém nebo plastickém stavu. Mez kluzu je $\sigma_0 = f_y = 240\ MPa$.



Řešení:

a) Nejdříve určíme velikost momentu v mezním pružném stavu:

$$N^+ = \frac{1}{2} \cdot 240 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}05 = 0{,}36\ MN$$

$$M_{el} = \overset{N^+}{0{,}36} \cdot \overset{r}{0{,}08} = \underline{0{,}0288\ MNm < 0{,}0368\ MNm}$$

⇒ zadaný moment přestoupil moment v mezním elastickém stavu

c) Určíme velikost momentu při plně zplastizovaném průřezu:

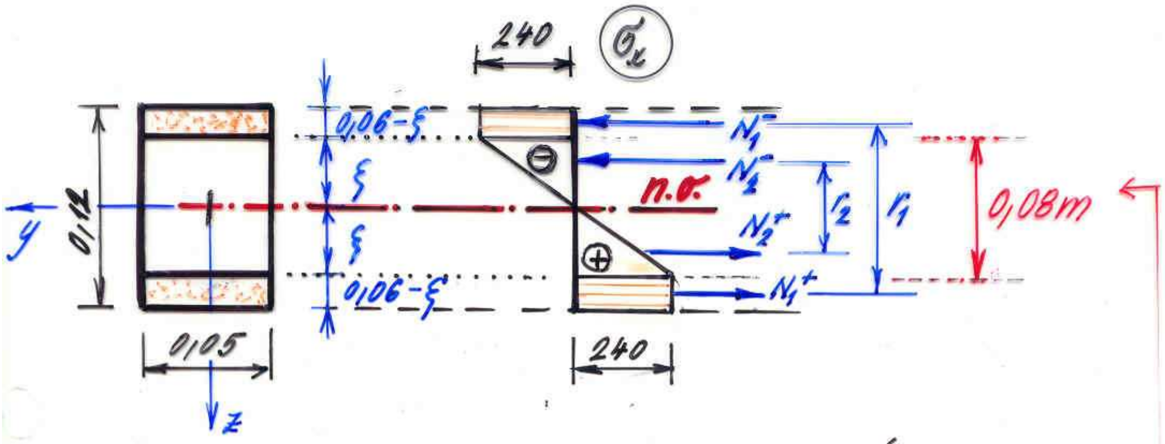
$$N^+ = 240 \cdot 0{,}06 \cdot 0{,}05 = 0{,}72\ MN$$

$$M_{pl.} = 0{,}72 \cdot 0{,}06 = \underline{0{,}0432\ MNm > 0{,}0368\ MNm}$$

⇒ zadaný moment nedosáhl hodnoty $M_{pl.}$

⇒ průřez je v pružnoplastickém stavu

Př. Pro průřez i namáhání z předcházejícího př. vypočtěte výšku pružné oblasti!



Výslednice napětí v plně zplastizovaných oblastech průřezu N_1^+, N_1^- tvoří silovou dvojici;

podobně jako výslednice napětí v pružné oblasti průřezu N_2^+, N_2^-

$$M_{el\,pl} = 0{,}0368 = N_1^+ \cdot r_1 + N_2^+ \cdot r_2$$

$$\Rightarrow \underline{\xi = 0{,}04\,m.}$$

Celková výška pružné oblasti je 0,08m.

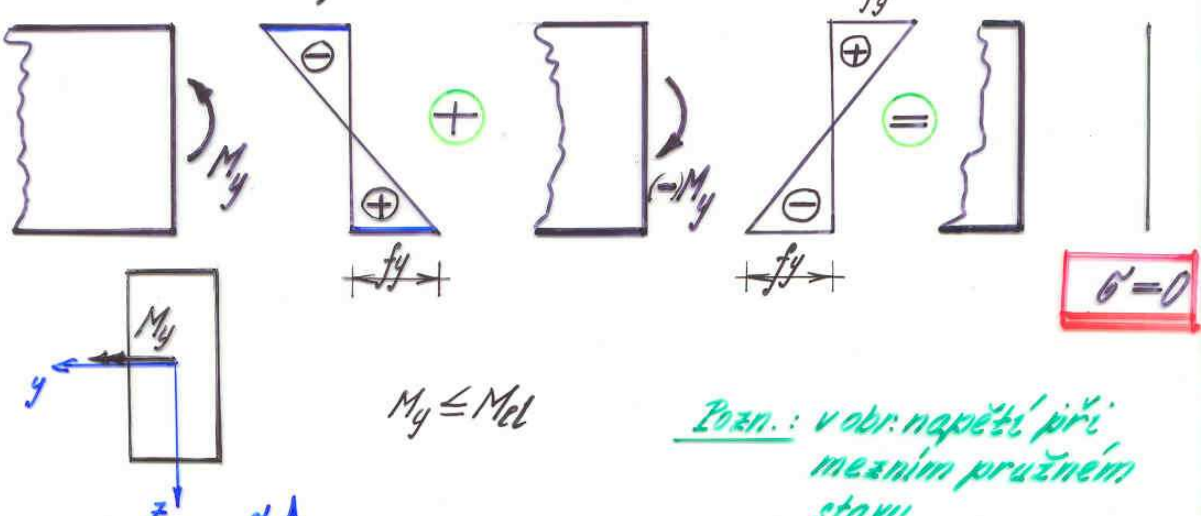
Odtížení při ohybu

a) nosník namáhaný ohybem v pružném stavu
(v žádném bodě nevznikají plastické deformace)

po odtížení: vrátí se do původního, t.j.
nedeformovaného, nenapjatého stavu

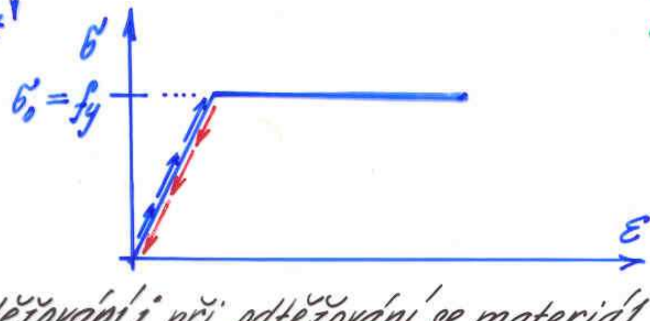
ZATÍŽENÍ $M_y \equiv M_{zat.}$ ODTÍŽENÍ $-M_y \equiv M_{odt.}$ VÝSLEDNÝ STAV

a)



$M_y \leq M_{el}$

Pozn.: v obr. napětí při mezním pružném stavu



Při zatěžování i při odtěžování se materiál chová lineárně pružně ⇒ nevznikají žádná zbytková napětí

b) c) Odtížení z pružnoplastického (plastického) stavu

- Při odtěžování se materiál chová lineárně pružně.
- Po odtížení zbudou **zbytková (reziduální) napětí**

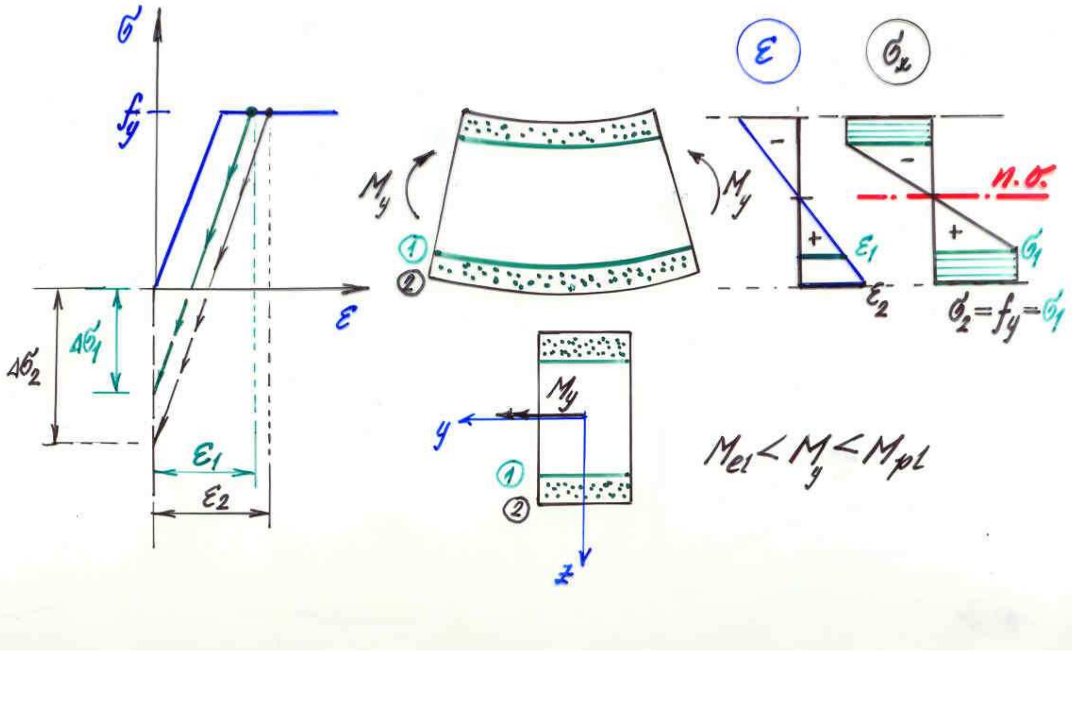
⇒ určí se jako součet napětí v pružnoplastickém (resp. plastickém) stavu a napětí fiktivního odtěžujícího pružného stavu vyvozeného momentem M_{odt}.

b) $M_{odt} = -M_{elpl}$ resp. c) $M_{odt} = -M_{pl}$

$$\boxed{\sigma_{rez} = \sigma_x + \frac{M_{odt}}{I_y} \cdot z}$$

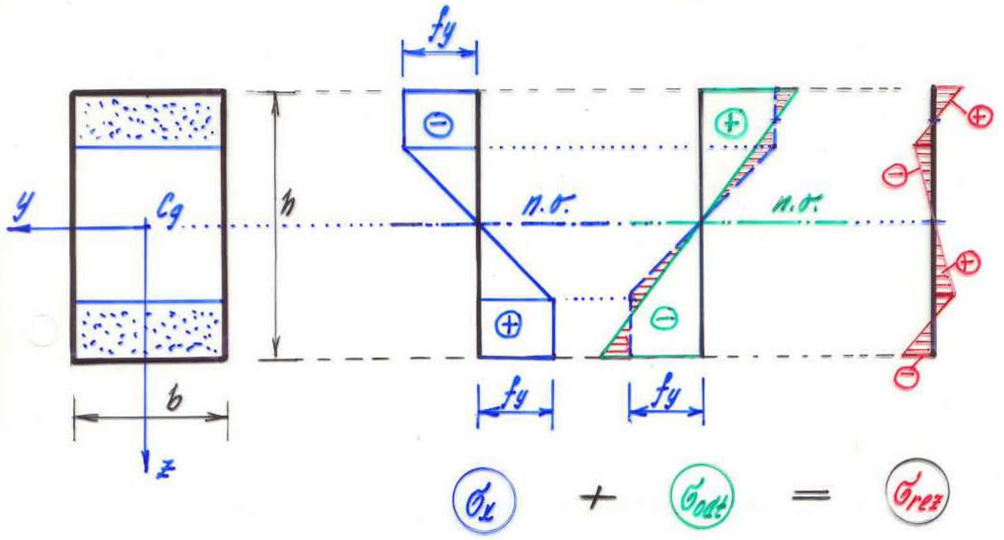
$$|\sigma_{rez}| \leq f_y$$

Důvod existence reziduálních napětí:
V různých bodech průřezu (po výšce) dosáhla plastická deformace různé hodnoty



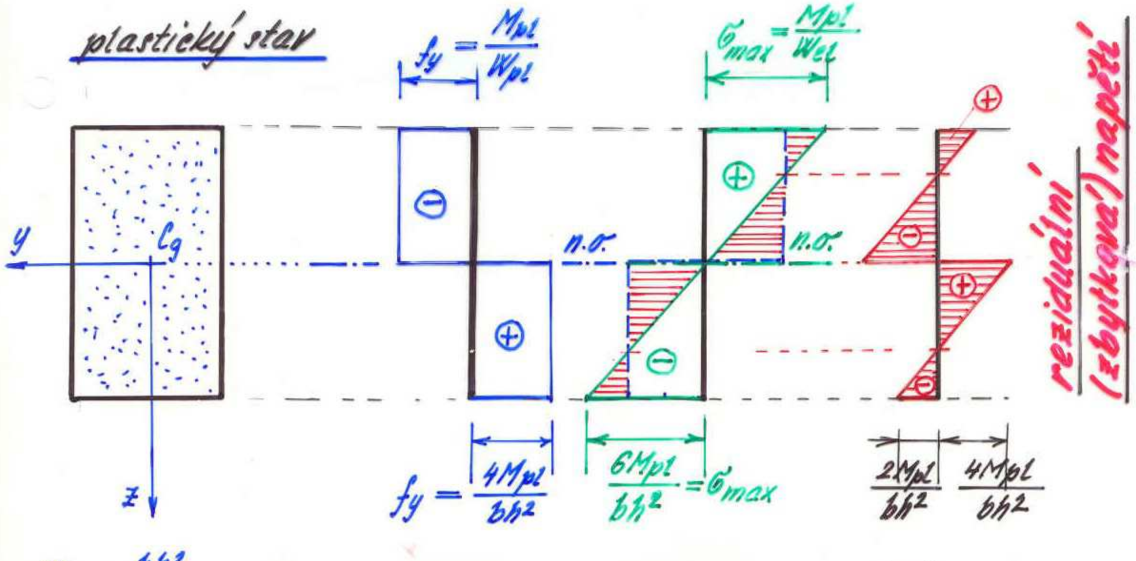
Reziduální napětí – obdélníkový průřez
(dvojose symetrický průřez)

pružnoplastický stav



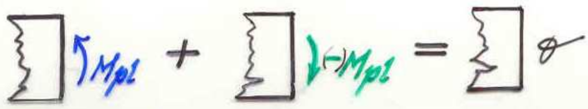
n. o. ... neutrální osa při zatěžování i odtěžování prochází těžištěm průřezu

plastický stav

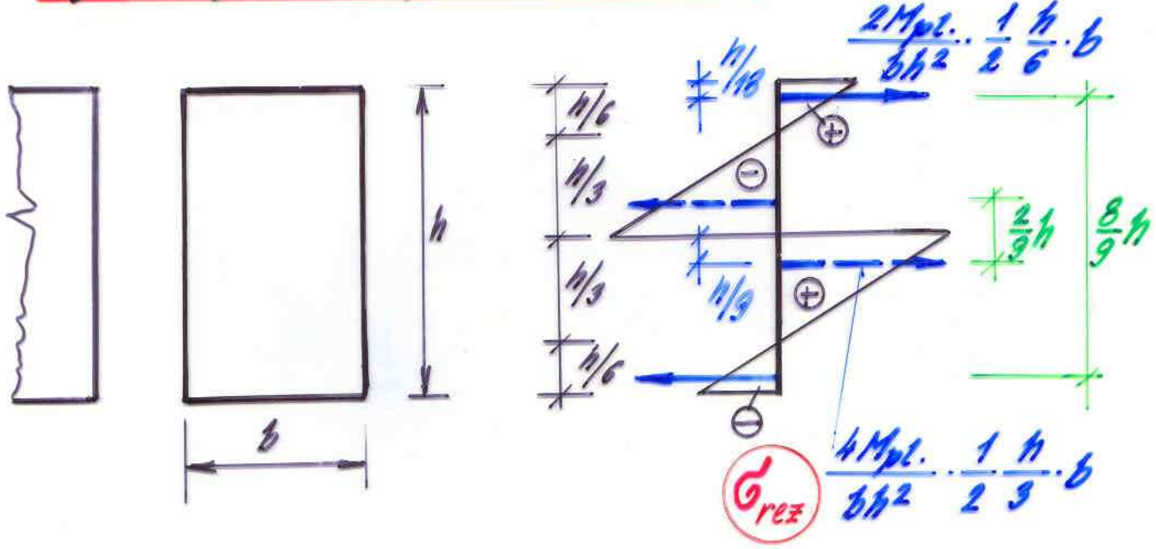


$W_{pl} = \frac{bh^2}{4}$

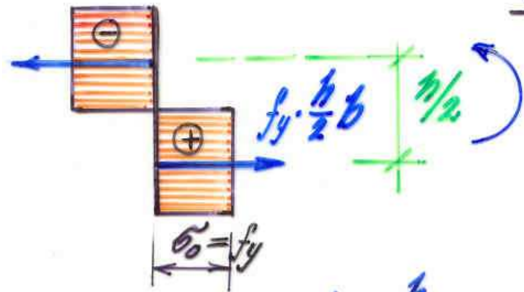
$W_{el} = \frac{bh^2}{6}$



Zbytková (reziduální) napětí dávají výsledný nulový moment:



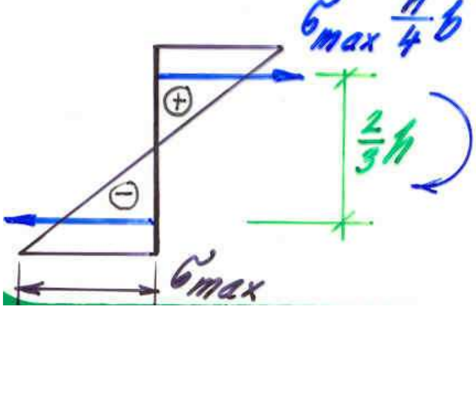
$$\frac{M_{pl.}}{6h}\cdot\frac{8}{9}h - \frac{2}{3}\frac{M_{pl.}}{h}\cdot\frac{2}{9}h = 0$$



Moment plně zplast. průřezu:

$$M_{pl.} = \frac{f_y bh}{2}\cdot\frac{h}{2} = f_y\frac{bh^2}{4}$$

$$\Rightarrow f_y = \frac{4M_{pl.}}{bh^2}$$



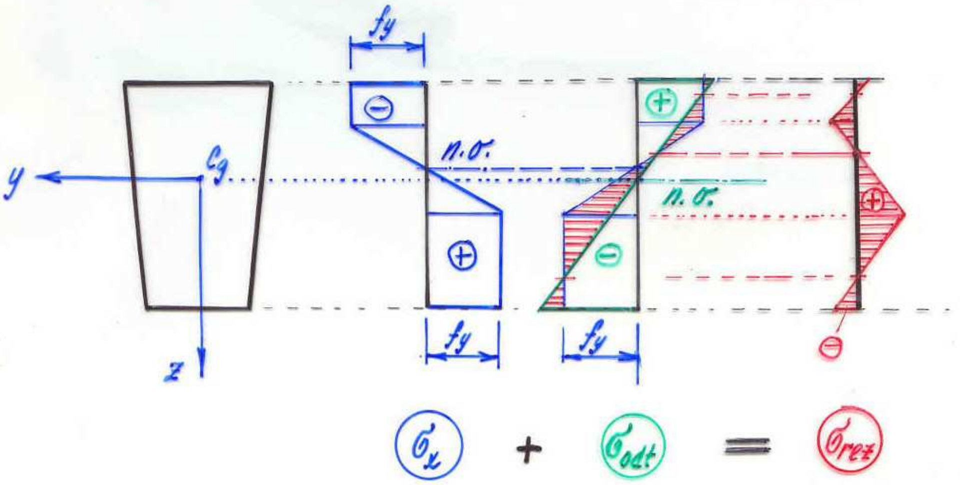
Moment při odtěžování:

$$M_{odt} = \sigma_{max}\frac{hb}{4}\cdot\frac{2}{3}h = \sigma_{max}\frac{bh^2}{6}$$

$$\Rightarrow \sigma_{max} = \frac{6M_{pl}}{bh^2}$$

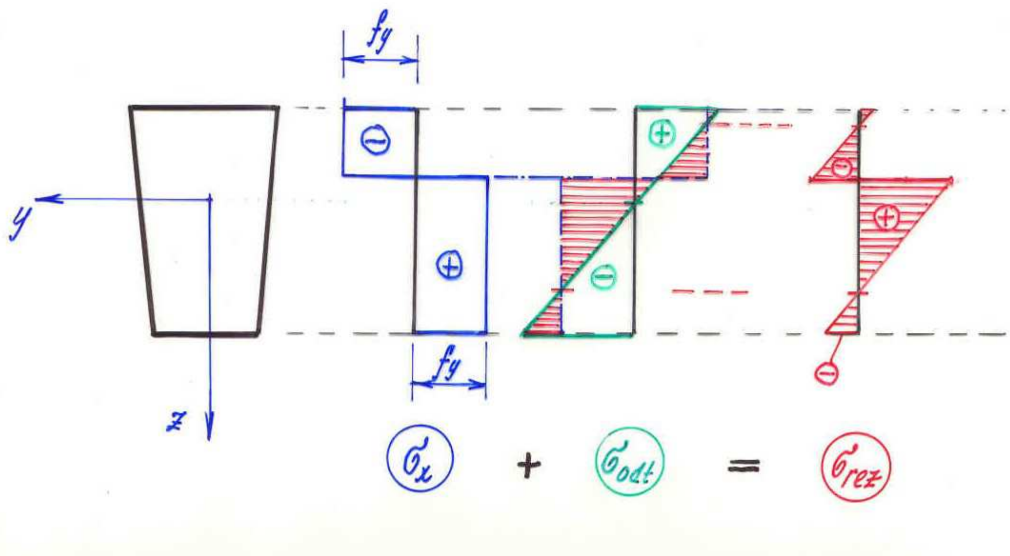
Reziduální napětí – jednoose symetrický průřez

pružnoplastický stav



n.o. ... neutr. osa při zatěžování (M > Mel)...neprochází těžištěm
n.o.... neutr. osa při odtěžování ...prochází těžištěm

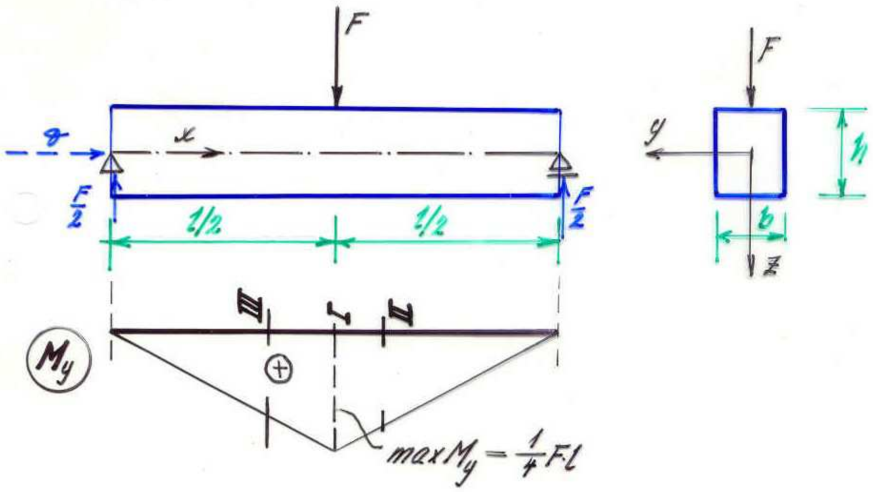
plastický stav



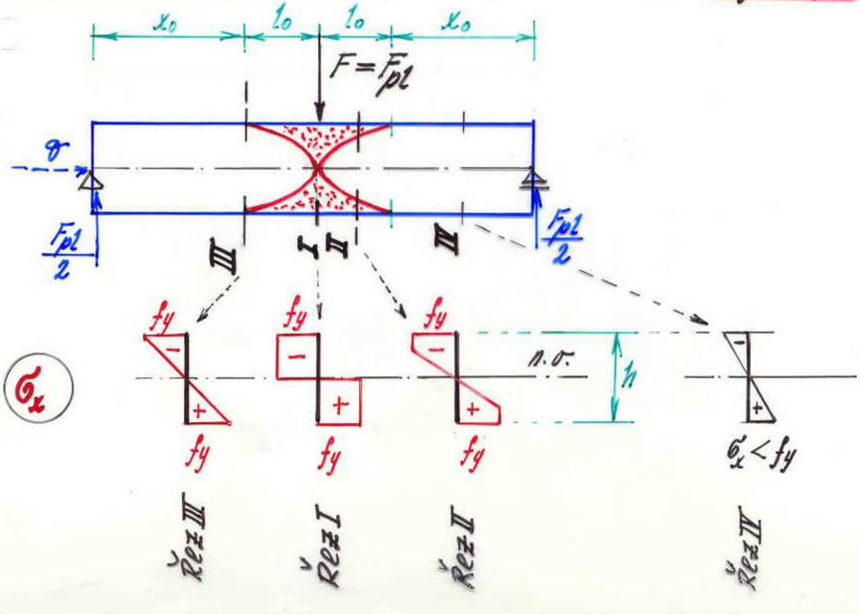
Tvar plastické oblasti (plastického kloubu)

- vyjadřuje chování nosníku na přechodu z pružného do plastického stavu

Příklad



Plastické oblasti se začnou vytvářet, když $M_y > M_{el} \Rightarrow F > F_{el}$, úplný plastický kloub vznikne při zatížení $(M_y = M_{pl}) \ldots F = F_{pl}$.



Zatížení, při kterém průřez pod břemenem úplně zplastizuje (průřez I)

dosáhne-li $\max M_y = M_{pl}$ $\quad (F = F_{pl})$

$$\frac{1}{4} F_{pl} \cdot l = f_y \cdot W_{pl} \qquad \left(W_{pl} = \frac{1}{4} b h^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad F_{pl} = f_y \frac{bh^2}{l}$$

Délka plastického kloubu:

$$l_0 = \frac{l}{2} - x_0$$

průřez III:

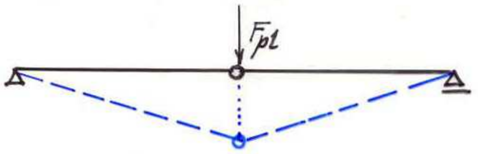
$$M_y(x = x_0) = \frac{F_{pl}}{2} \cdot x_0 = f_y \frac{bh^2}{2l} \cdot x_0$$

$$M_{el} = f_y \cdot \frac{1}{6} b h^2$$

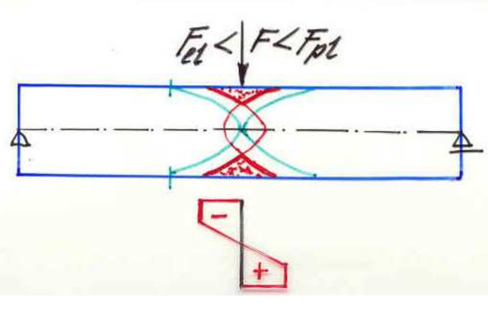
$M_y(x = x_0) = M_{el} \Rightarrow x_0 = \frac{l}{3}$ .... začátek plast. kloubu

$$l_0 = \frac{l}{6}$$

Plastický kloub funguje podobně jako vložený kloub:



staticky přeurčitá, tvarově neurčitá kce
$\Rightarrow$ pohyblivý mechanismus

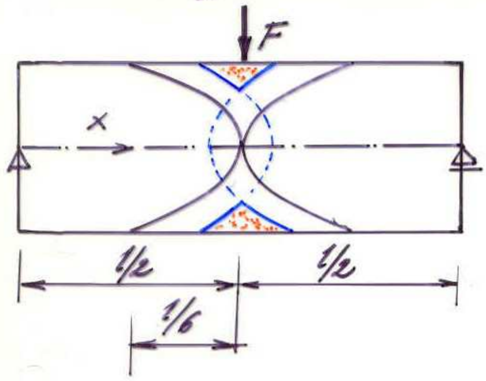


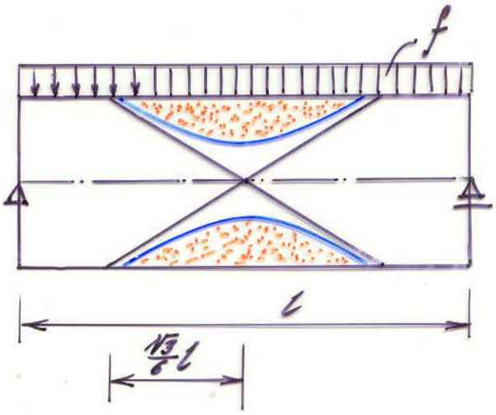
začáteční fáze plastifikace

$\Rightarrow M_{el} < \max M_y < M_{pl}$

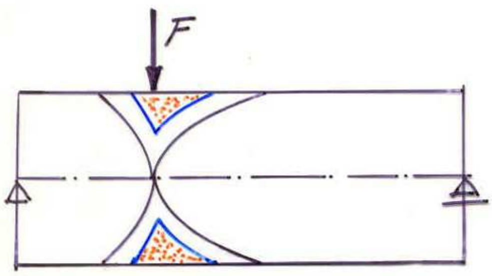
Tvar plastického kloubu závisí

a) na typu zatížení

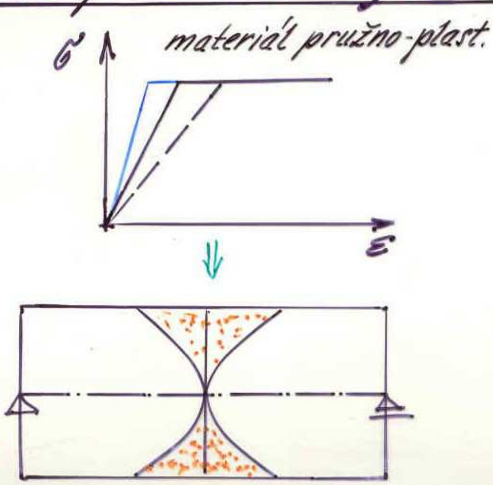


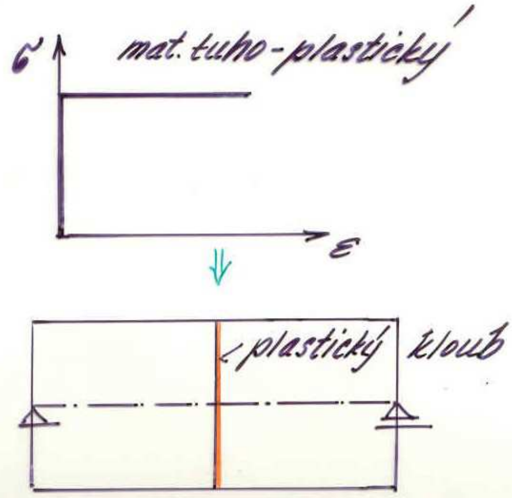


b) na poloze břemene



c) na pracovním diagramu

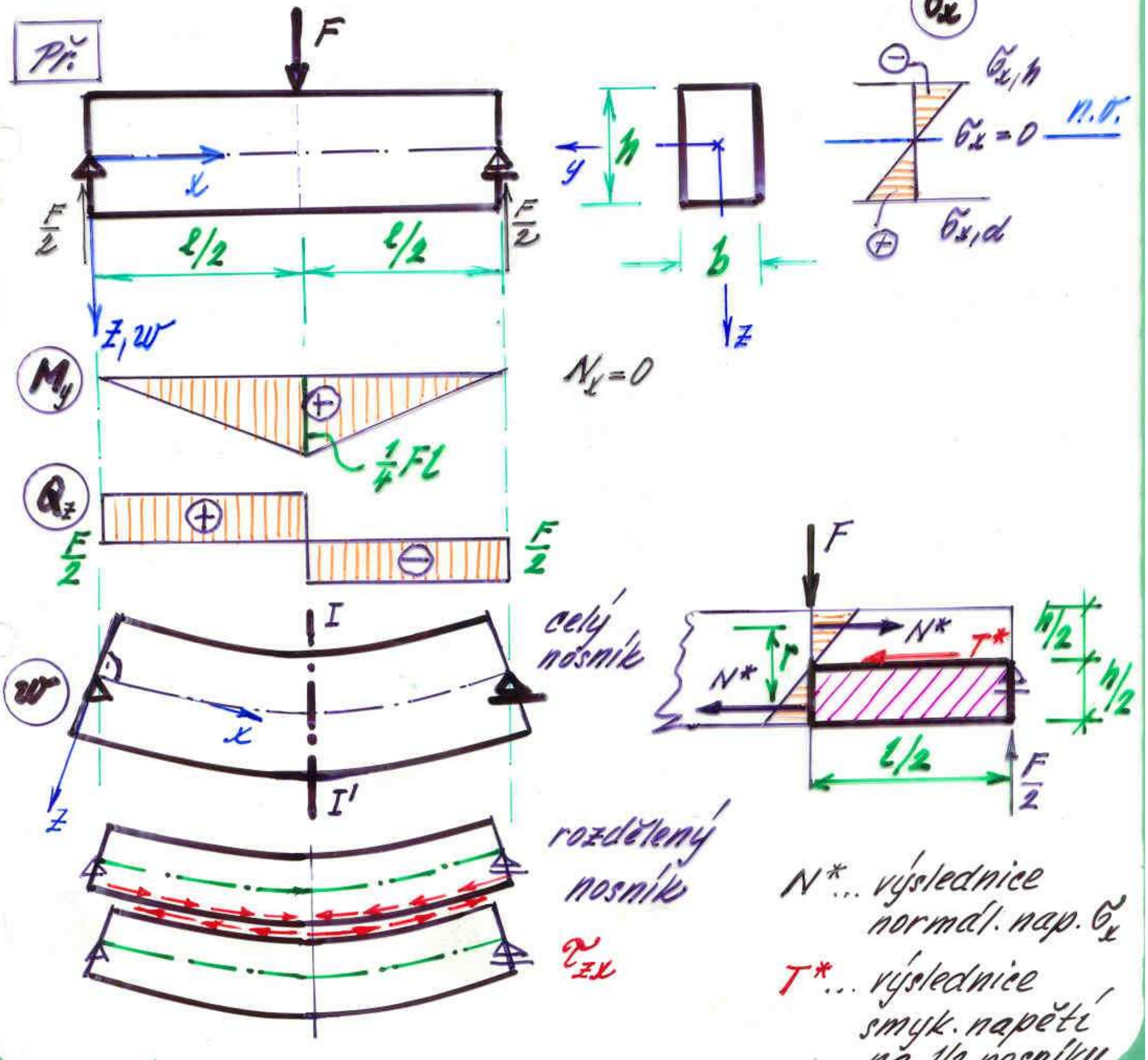




Smyková (tečná) napětí při ohybu (smyk za ohybu)

→ vznikají, působí-li na průřez kromě M_y (resp. M_z) též Q_y a Q_z

Zdůvodnění vzniku smyku:



N^*... výslednice normál. nap. σ_x

T^*... výslednice smyk. napětí na 1/2 nosníku

U rozděleného nosníku by došlo k deformaci každé části samostatně
$\Rightarrow$ narušení spojitosti tělesa v kontaktní ploše $z=0$.

$\Rightarrow$ V této ploše musí působit **smyková napětí** τ_{zx},
která ⟨ spodní vlákna horní části zkracují / horní vlákna spodní č. prodlužují.

Výpočet smykové síly T^*

– z podm. rovnováhy na vyšrafovaném dílu:

$$\leftarrow: \quad N^* + T^* = 0 \Rightarrow \boxed{T^* = -N^*}$$

$$N^* = \frac{M_y}{r} = \frac{\frac{1}{4} F \cdot l}{\frac{2}{3} h} = \frac{3}{4} \cdot \frac{F}{2} \frac{l}{h}$$

$$T^* = \frac{3}{4} Q_z \cdot \frac{l}{h}$$

1. Výslednice T^* smykových napětí τ_{zx} ve vodorovném řezu je úměrná momentu M_y.

× Nevíme, jak jsou smyk. napětí τ_{zx} rozdělena po délce prutu!

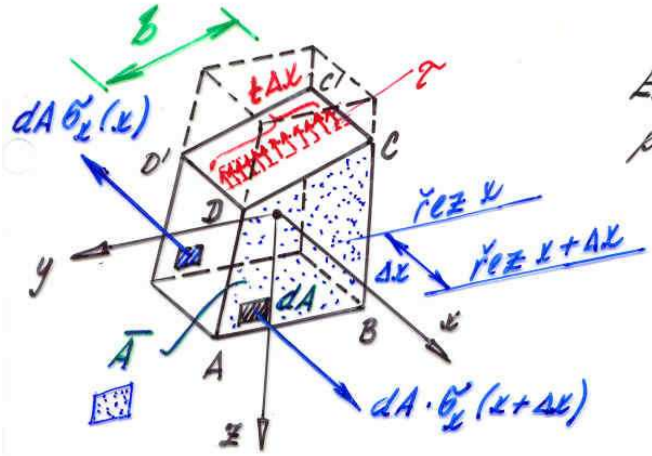
„Průměrné napětí" ve spáře: $\tilde{\tau}_{zx} = \dfrac{T^*}{b \cdot \frac{l}{2}} = \dfrac{3}{2} \dfrac{Q_z}{b \cdot h}$

2. Tečné napětí je úměrné posouvající síle Q_z.

Obecný vzorec pro výpočet smykových napětí:

Odvodíme pro jednoduchost pro nosník zatížený pouze příčnými silami; t.j.:

1) $f_x = m_y = m_z = 0$; $f_y \neq 0$; $f_z \neq 0$ $(N_x = 0)$
2) výpočet v hlavních centrálních osách.



Element prutu délky Δx, příčný řez – konečné rozměry.

Odvození – z podmínky rovnováhy sil působících ve směru x na část elementu prutu pod řezem $DCD'C'$.

Zjednodušení: τ rovnoměrně rozloženo podél úsečky CD

$\boxed{t = \tau \cdot b}$ [N/m] ... smykový tok

výslednice smykových napětí τ podél úsečky CD

Podmínka rovnováhy (ve směru x)

$$x:\quad \iint_{\bar A} [\sigma_x(x+\Delta x) - \sigma_x(x)]\,dA - t\,\Delta x = 0 \quad / \cdot \frac{1}{\Delta x},\ \Delta x \to 0$$

$$\iint_{\bar A} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\, dA = t$$

Smykový tok vzniká jako důsledek změny normálových napětí po délce prutu!

$$\sigma_x = \frac{-M_z}{I_z}\cdot y + \frac{M_y}{I_y}\cdot z$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{y}{I_z}\frac{dM_z}{dx} + \frac{z}{I_y}\frac{dM_y}{dx}$$

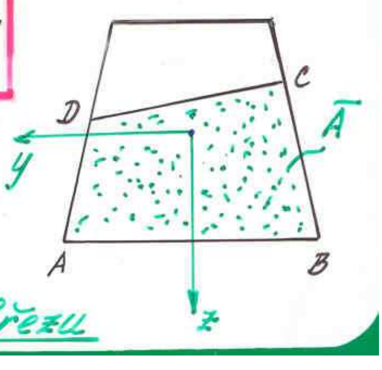
$$\frac{1}{I_z}\underbrace{\boxed{\frac{d(-M_z)}{dx}}}_{Q_y}\underbrace{\iint_{\bar A} y\, dA}_{\bar S_z} + \frac{1}{I_y}\underbrace{\boxed{\frac{dM_y}{dx}}}_{Q_z}\underbrace{\iint_{\bar A} z\, dA}_{\bar S_y} = t$$

$\bar S_y$, $\bar S_z$ ... statické momenty dolní odťaté části ABCD k hl. centr. osám

S uvážením Schwedlerovy věty:

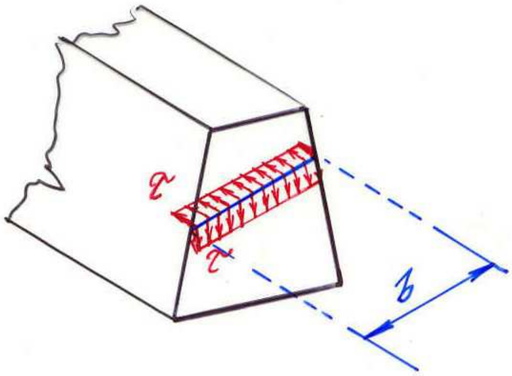
$$\boxed{t = \tau \cdot b = \frac{Q_y \cdot \bar S_z}{I_z} + \frac{Q_z \cdot \bar S_y}{I_y}}$$

$$\boxed{\tau = \frac{Q_y \cdot \bar S_z}{b \cdot I_z} + \frac{Q_z \cdot \bar S_y}{b \cdot I_y}}$$

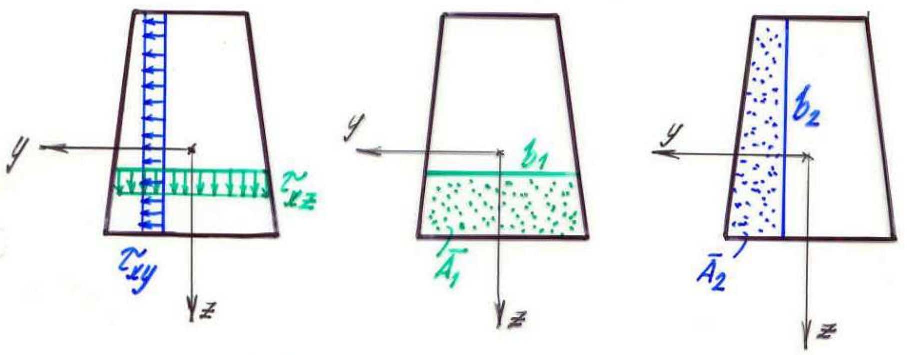


I_y, I_z ... momenty setrvačnosti celého průřezu

- Z věty o vzájemnosti smykových napětí plyne, že stejná smyková napětí τ (jako v rovině $DCD'C'$) vznikají i v rovině průřezu.

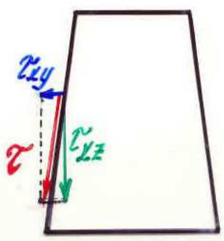


- Polohu vlákna šířky b volíme tak, abychom vystihli průběhy složek τ_{xz}, τ_{xy} v průřezu:

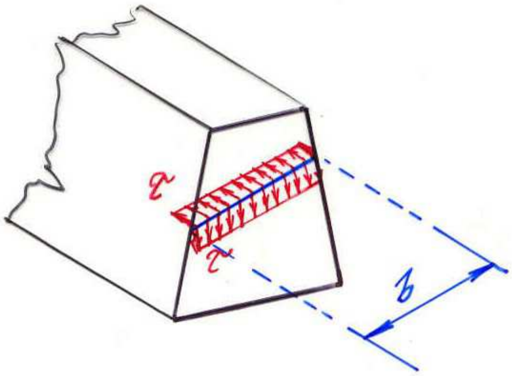


$$\tau_{xz} = \frac{Q_y \cdot \bar{S}_z}{I_z \cdot b_1} + \frac{Q_z \cdot \bar{S}_y}{I_y \cdot b_1} \qquad \tau_{xy} = \frac{Q_y \cdot \bar{S}_z}{I_z \cdot b_2} + \frac{Q_z \cdot \bar{S}_y}{I_y \cdot b_2}$$

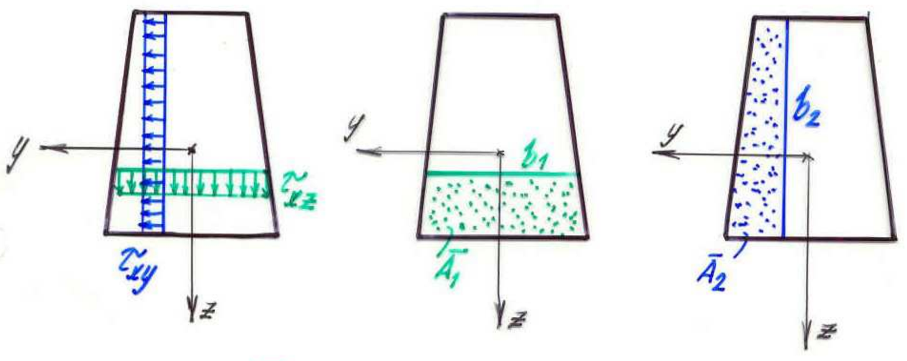
- Výsledné smyk. napětí τ má na okraji průřezu směr tečný k obrysu:



- Z věty o vzájemnosti smykových napětí plyne, že stejná smyková napětí τ (jako v rovině DCD'C') vznikají i v rovině průřezu.

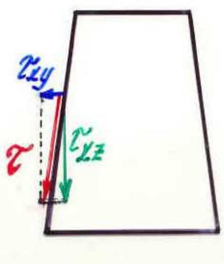


- Polohu vlákna šířky b volíme tak, abychom vystihli průběhy složek τ_{xz}, τ_{xy} v průřezu:

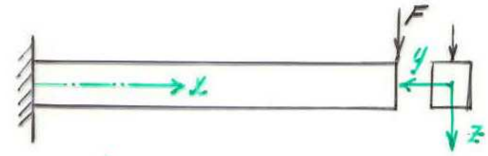


$$\tau_{xz} = \frac{Q_y \cdot \bar{S}_z}{I_z \cdot b_1} + \frac{Q_z \cdot \bar{S}_y}{I_y \cdot b_1} \qquad \tau_{xy} = \frac{Q_y \cdot \bar{S}_z}{I_z \cdot b_2} + \frac{Q_z \cdot \bar{S}_y}{I_y \cdot b_2}$$

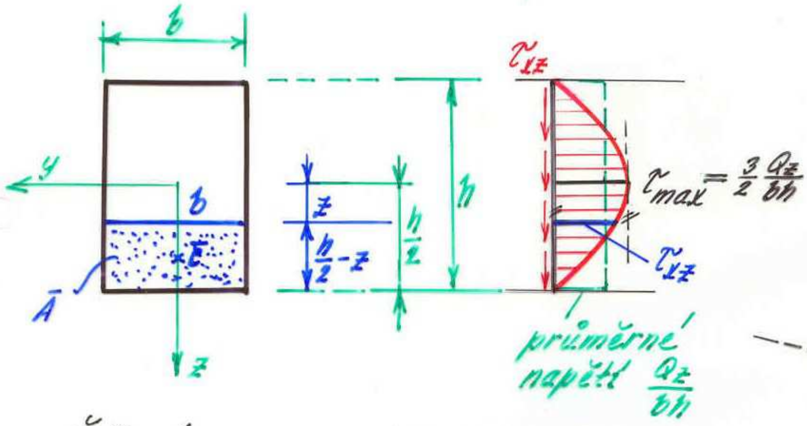
- Výsledné smyk. napětí τ má na okraji průřezu směr tečný k obrysu:

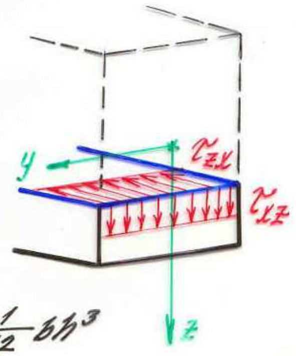


$\boxed{\text{Př.}}$ Vypočtěte rozdělení smykových napětí v obdélníkovém průřezu, který je zatížen posouvající silou $Q_z \neq 0$ ($Q_y = 0$).



$Q_z(x) = +F \neq 0$





Řešení:

a) složka τ_{xz} : $\boxed{\tau_{xz} = \frac{Q_z \cdot S_y}{b \cdot I_y}}$

Průřezové charakteristiky:

moment setr. I_y celého průřezu: $I_y = \frac{1}{12} b h^3$

$\bar{A} = b\left(\frac{h}{2} - z\right)$; $z_{\bar{T}} = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + z\right)$

statický moment odňaté části: $S_y = \bar{A} \cdot z_{\bar{T}} = \frac{b}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2\right]$

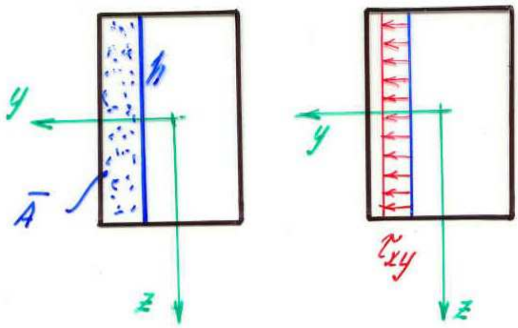
Napětí:
$$\tau_{xz} = \frac{Q_z \cdot \frac{b}{2}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2\right]}{b \cdot \frac{1}{12} b h^3} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{b \cdot h^3}\left(h^2 - 4z^2\right) = \tau_{zx}$$

↑ parabola 2. st.

τ_{max} : $\frac{d\tau_{xz}}{dz} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{3}{2}\frac{Q_z}{bh^3}}_{\neq 0}\left(\underbrace{0 - 8z}_{=0 \Rightarrow z = 0}\right) = 0$

$$\tau_{xz,max} = \frac{3}{2}\frac{Q_z}{bh}$$

b) Složka τ_{xy} : $\boxed{\tau_{xy} = \frac{Q_z \cdot \bar{S}_y}{b \cdot I_y}}$



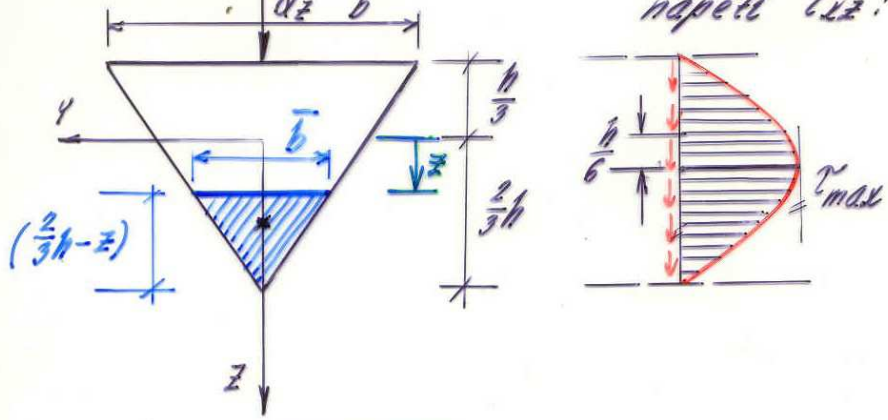
$\bar{S}_y = 0$ ... plocha je sym. vzhledem k y!

$\Rightarrow \tau_{xy} = 0$

Poznámka:

- Vyjde-li smykové napětí kladné, směřuje do plochy, z níž počítáme $\bar{S}$!

Příklad: Trojúhelníkový průřez, určete průběh napětí τ_{xz}!



$$\boxed{\tau_{xz} = \frac{Q_z \cdot \bar{S}_y(z)}{I_y \cdot \bar{b}(z)}}$$

$$\bar{S}_y = \frac{1}{2}\bar{b}\left(\frac{2}{3}h - z\right)\left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}h - z\right) + z\right]$$

$$= \frac{1}{2}\bar{b}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}h - z\right)^2 + \left(\frac{2}{3}hz - z^2\right)\right]$$

$$I_y = \frac{1}{36}bh^3$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_z \cdot \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{\bar{b}}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}h - z\right)^2 + \left(\frac{2}{3}hz - z^2\right)\right]}{18\,\cancel{\frac{1}{36}}\,bh^3 \cdot \cancel{\bar{b}}}$$

$$\tau_{xz}\left(z = \frac{2}{3}h\right) = 0$$

$$\tau_{xz}\left(z = -\frac{1}{3}h\right) = 0$$

Místo extrému:

$$\frac{d\tau_{xz}}{dz} = \frac{Q_z}{\frac{1}{18}bh^3}\left[-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}h - z\right) + \frac{2}{3}h - 2z\right] = 0$$

$$\boxed{z = \frac{1}{6}h}$$

Smyková napětí v nosnících s členěným průřezem

dosud: průřezy bez náhlých změn

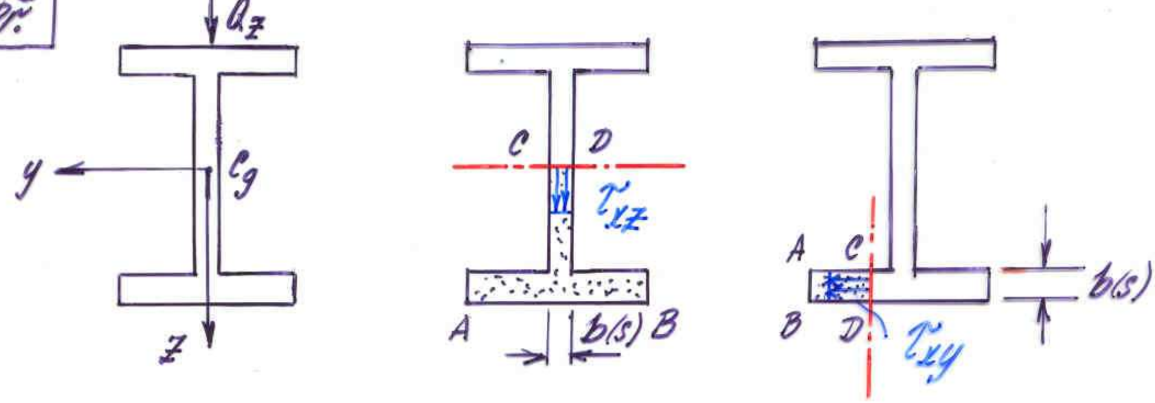
Tuhost nosníku v ohybu roste s momentem setrvačnosti

⇒ optimalizované průřezy mají podstatnou část průřez. plochy co nejdále od těžiště

(⇒ snížení hodnot σ_x při ohybu,

× pozor na přenesení smyku zúženými částmi průřezu)

Př:



Pozn.: při odvozování vzorce pro t resp. τ sklon podél. řezu CD byl libovolný

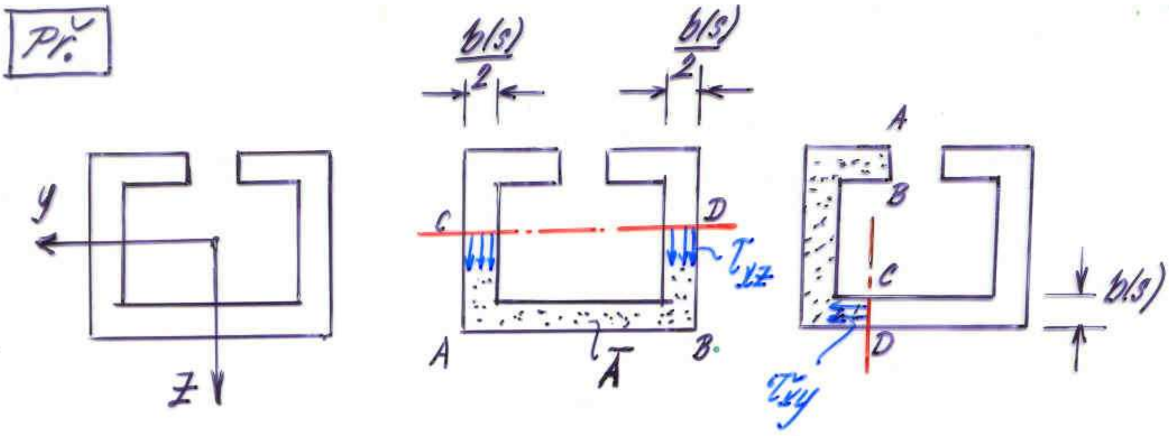
⇒ platí i pro průřezy členěné

Při zatížení $Q_z \neq 0$, $Q_y = 0$:

Smykové napětí působící ⊥ k $\overline{CD}$:

$$\boxed{\tau_{xs} = \frac{Q_z \cdot S_y(s)}{I_y \cdot b(s)}}$$

Př.

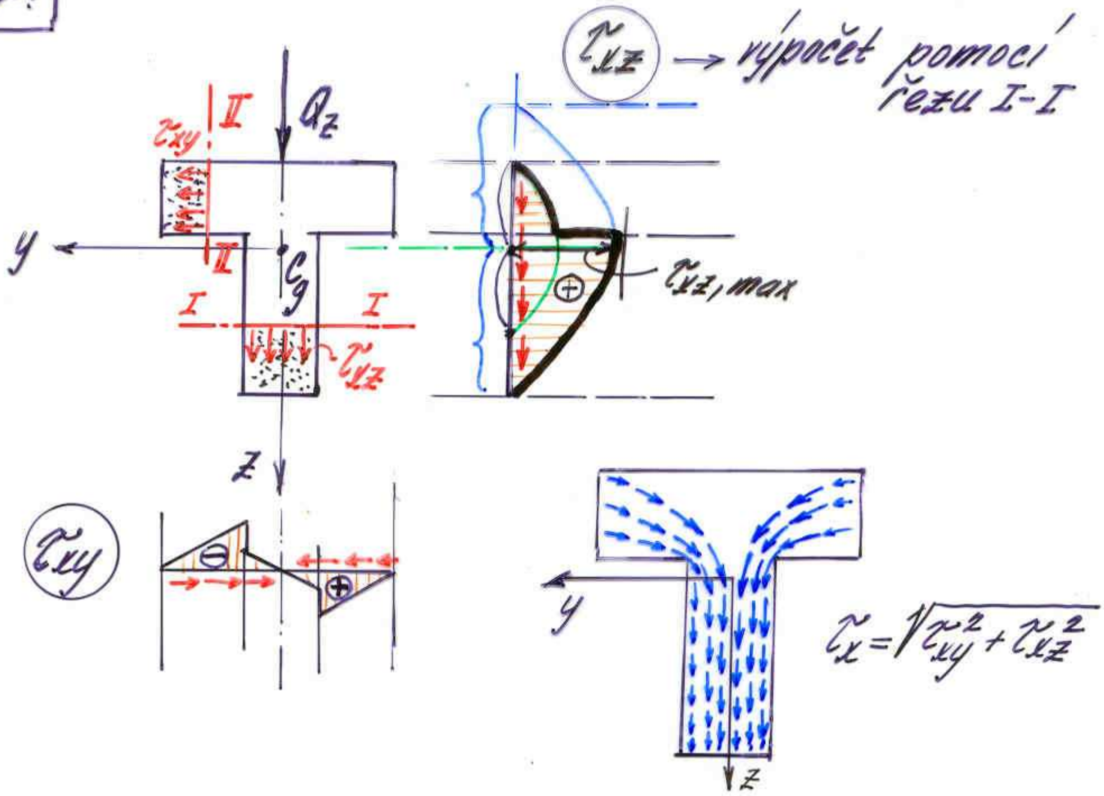


z obr. je vidět:

u vodorovných řezů: $\tau_{xs} = \tau_{xz}$

u svislých řezů: $\tau_{xs} = \tau_{xy}$

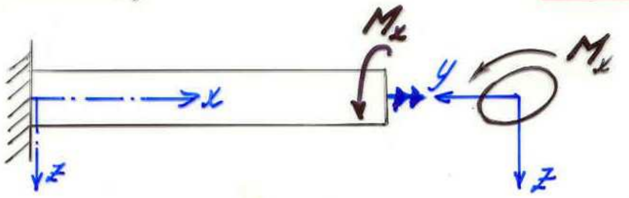
Př:

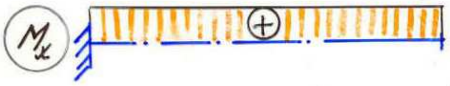


$$\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$$

Volné kroucení prutů

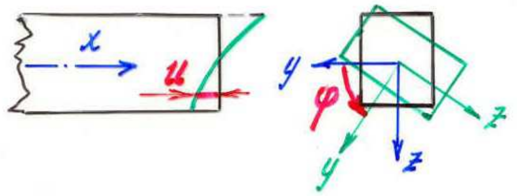
nastává, působí-li na průřez $M_x \neq 0$





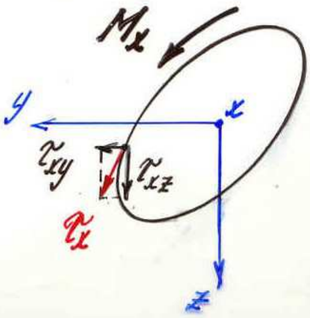
Jsou-li ostatní vnitřní síly (M_y, M_z, Q_y, Q_z, N_x) nulové
⇒ **prosté kroucení**

Účinek M_x
- průřezy se natáčejí kolem x (φ)
- ve směru osy x se zprohýbají ≡ **deplanují** (u)



- Pokud deplanace probíhá volně ⇒ **volné kroucení** (Saint-Venantovo)

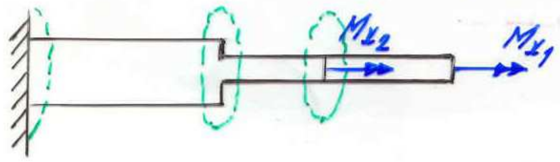
vznikají pouze smyk. napětí $\boxed{\tau_{xy}, \tau_{xz}}$



τ_x na hranici průřezu má směr tečný k obrysové křivce

- Volná deplanace obyčejně omezena (např. vetknutím, změnou průřezu, změnou M_x …) ⇒ **ohybové kroucení**

  v průřezu vzniká: τ_{xy}, τ_{xz}, σ_x



- Rozdíl mezi masivními a tenkostěnnými průřezy:
  - masivní – deplanují málo (nebo vůbec)

    $\Rightarrow \sigma_x \ll \tau \Rightarrow \sigma_x \doteq 0$ (σ_x lze zanedbat)

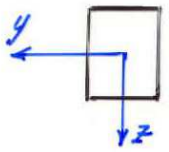
    → kroucení se počítá jako volné
  - tenkostěnné (zejména otevřené) deplanují značně, omezení deplanace je výrazné

    $\Rightarrow \sigma_x$ … významné

1. Volné kroucení prutů s průřezem masivním

- **Předpoklady výpočtu:** $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$

a) Průřez nemění svůj tvar a velikost

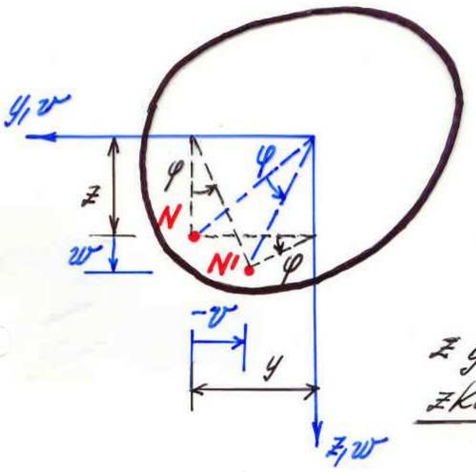


$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0$ $\quad (\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0)$

b) $\varepsilon_x = 0$ $\quad (\sigma_x \doteq 0)$

- **Kinematika přemístění průřezu** (jako tuhá deska v rovině)

$N[y, z]$ ... sledovaný bod



$$u = u(x, y, z)$$
$$-v = z \cdot \varphi(x)$$
$$w = y \cdot \varphi(x)$$

z geometrických rovnic zkosení v podélných rovinách:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} - z \cdot \underbrace{\boxed{\frac{d\varphi(x)}{dx}}}_{\vartheta(x)} = \frac{\partial u}{\partial y} - z\vartheta(x)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} + y \cdot \underbrace{\boxed{\frac{d\varphi(x)}{dx}}}_{\vartheta(x)} = \frac{\partial u}{\partial z} + y\vartheta(x)$$

$\boxed{\vartheta(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}}$ ... **relativní $\measuredangle$ zkroucení**

$\varphi(x)$ ... **skutečný $\measuredangle$ zkroucení**

$u(x,y,z)$... volí se jako součin dvou funkcí:

$$u(x,y,z) = \Theta(x)\cdot\psi(y,z)$$

$\psi(y,z)$... deplanační funkce

Poznámka:
Předpoklad b): $\varepsilon_x = 0$ ($\frac{\partial u}{\partial x} = 0$) je splněn, když buď
$\Theta(x) = konst. \Rightarrow \Theta' = 0$
nebo: $\psi(y,z) = 0$ (t.j. průřezy, které nedeplanují)

- Napětí (z fyzikálních rovnic)

$$\tau_{xy} = G\cdot\gamma_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} - z\Theta(x)\right) = G\Theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} - z\right)$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + y\Theta(x)\right) = G\Theta\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + y\right)$$

Statické rovnice (objemové síly X, Y, Z jsou nulové)

$$\frac{\partial\sigma_x}{\cancel{\partial x}} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + \cancel{X} = 0 \qquad \sigma_x = 0,\ X = 0$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}} + \cancel{Y} = 0 \qquad \sigma_y = \tau_{zy} = Y = 0$$

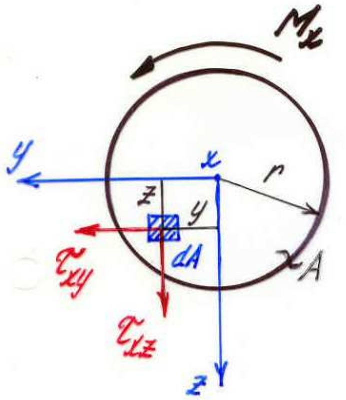
$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}} + \cancel{Z} = 0 \qquad \tau_{yz} = \sigma_z = Z = 0$$

1a) Kroucení prutů s kruhovým průřezem

Průřezy kruhové a mezikruhové nedeplanují ($u=0$)
$\psi(y,z)=0$

$$\tau_{xy} = -G\theta z$$

$$\tau_{xz} = G\theta y$$



θ lze vyjádřit pomocí M_x

Podmínka ekvivalence:

$$M_x = \iint_A (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) dA$$

$$= G\theta \underbrace{\iint (y^2+z^2) dA}_{I_p \text{... polární moment setrvačnosti}}$$

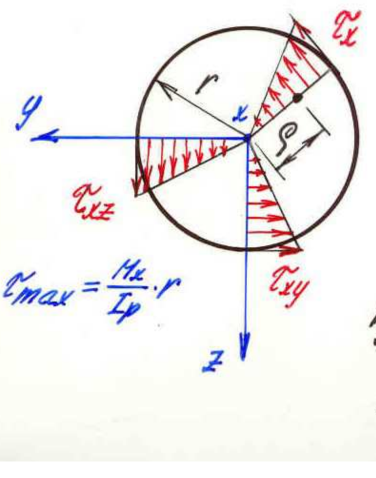
$$I_p = I_y + I_z = \frac{\pi r^4}{2}$$

$$= G\theta(x) I_p$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{M_x}{G I_p} = \frac{d\varphi}{dx}}$$

diferenciál. rov. volného kroucení
(φ získáme integrací dif. r.)

Napětí:



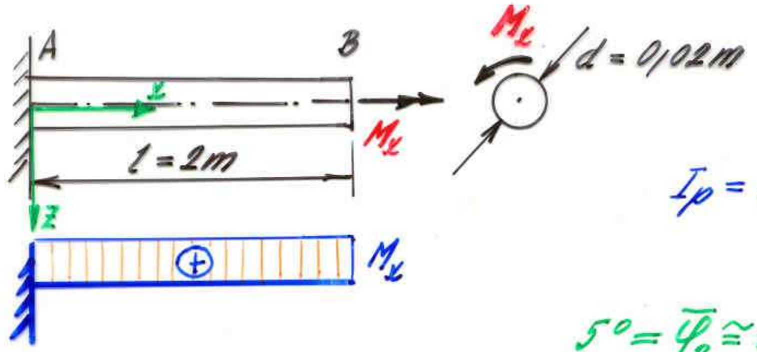
$$\tau_{max} = \frac{M_x}{I_p} \cdot r$$

$$\boxed{\tau_{xy} = -\frac{M_x}{I_p} \cdot z \qquad \tau_{xz} = +\frac{M_x}{I_p} \cdot y}$$

Výsledné smyk. napětí $\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_x = \frac{M_x}{I_p} \cdot \rho}$$

Př: Jak velkým kroutícím momentem je možno namáhat tyč o ϕ 20mm, nemá-li smykové napětí překročit $\bar{\tau} = 50\,MPa$ a nemá-li být pootočení v B větší než 5°. ($G = 0{,}8 \cdot 10^5\,MPa$)



$$I_p = 2 \cdot I_x = 2 \cdot \frac{\pi r^4}{4} = 1{,}57 \cdot 10^{-8}$$

$$5° = \bar{\varphi}_B \cong tg\,\bar{\varphi}_B = 0{,}0874$$

Řešení

a) pevnostní podmínka:

$$\tau_x = \frac{M_x}{I_p} \cdot r \leq \bar{\tau}$$

$$\Rightarrow M_x \leq \frac{\bar{\tau} \cdot I_p}{r} = \frac{50 \cdot 1{,}57 \cdot 10^{-8}}{0{,}01} = \underline{7{,}854 \cdot 10^{-5}\,MNm}$$

b) deformační podmínka:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{G I_p}$$

integrací $\varphi(x) - \varphi_A = \dfrac{M_x \cdot x}{G I_p}$

v průřezu B ($x = l$): $\varphi_B = \dfrac{M_x \cdot l}{G I_p} \leq \bar{\varphi}_B$

$$\Rightarrow M_x \leq \bar{\varphi}_B \frac{G I_p}{l} = 0{,}0874 \cdot \frac{0{,}8 \cdot 10^5 \cdot 1{,}57 \cdot 10^{-8}}{2} = \underline{5{,}492 \cdot 10^{-5}\,MNm}$$

1b) Prut s nekruhovým masivním průřezem

Elementární výpočet jako pro kruh nelze použít.

Výsledky přibližného řešení:

- Přetvoření: $\boxed{\vartheta = \frac{M_x}{G I_k}}$

I_k (I_t) ... moment tuhosti průřezu ve volném kroucení

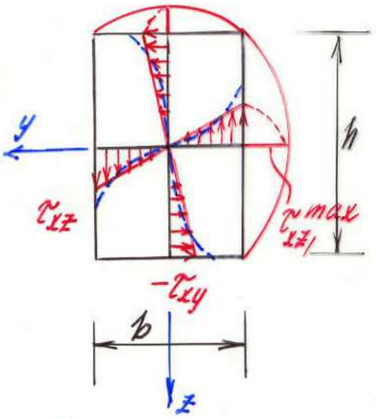
např. přibližný Saint Vénantův vzorec

$$\boxed{I_k \doteq \frac{A^4}{40 I_p}}$$

A ... plocha průřezu

$I_p = I_y + I_z$ ... polární moment setrvačnosti

- Napětí v obdélníkovém průřezu



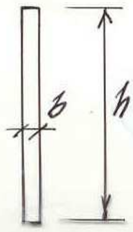
— teorie

--- skutečnost

$$\max \tau_{xz} \doteq \frac{9}{2}\,\frac{M_x}{2b^2h}$$

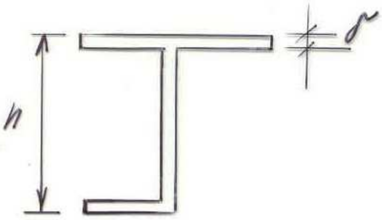
$$\boxed{I_k \doteq \frac{A^4}{36 I_p}}$$

- Úzký obdélník: $h \gg b \Rightarrow \frac{b}{h} \ll 1$



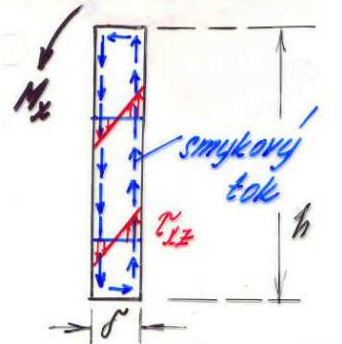
$$\boxed{I_k \doteq \frac{1}{3} h \cdot b^3}$$

2. Volné kroucení prutů s tenkostěnným otevřeným průřezem (orientačně: $\delta : h : l = 1 : 10 : 100$)



- Volné kroucení vzniká jako složka kroucení ohybového.
- Základem řešení – úzké obdélníky.

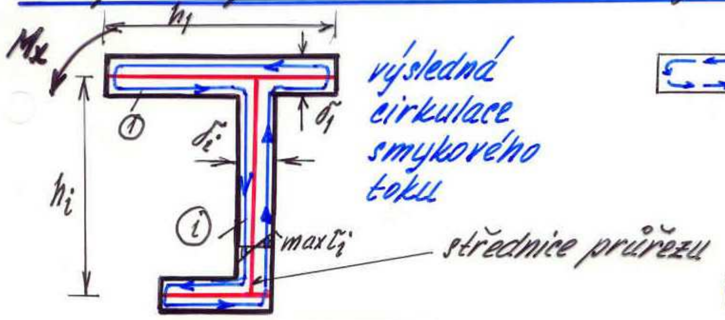
- Napětí v úzkém obdélníku – smyk. napětí nerovnoměrně rozdělena po tloušťce

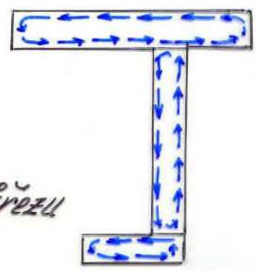


$$\boxed{\max \tau_{xz} = \frac{M_x}{I_k} \cdot \delta}$$

$$I_k = \frac{1}{3} h \cdot \delta^3$$

- Napětí v průřezu složeném z úzkých obdélníků





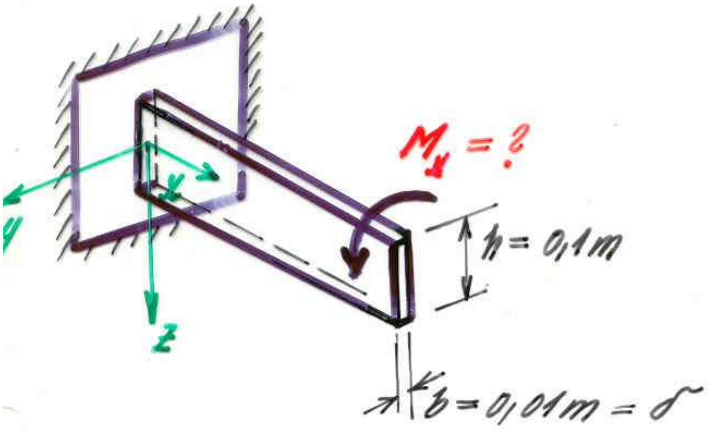
individuální cirkulace

Přetvoření: $\boxed{\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{G I_k}}$ $\boxed{I_k \doteq \frac{1}{3} \sum_i h_i \delta_i^3}$

Celý průřez přenese moment: $\boxed{M_x = \sum_i M_{x,i} = G\theta \frac{1}{3} \sum_i h_i \delta_i^3}$

Napětí v i-té větvi
(max. hodnota τ_i je na okraji): $\boxed{\max \tau_i = \frac{M_x}{I_k} \cdot \delta_i}$

Př. Jak velkým kroutícím momentem M_x je možno namáhat prut na obr., nemá-li τ_{max} překročit 50 MPa. ($G = 0{,}8 \cdot 10^5$ MPa)



$$\boxed{\tau_{max} = \frac{M_x}{I_k} \cdot \delta}$$

Řešení:

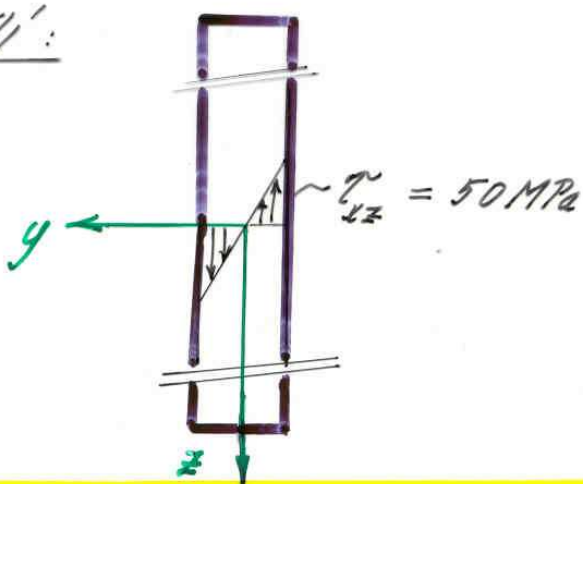
$$M_x \leq \bar{\tau} \frac{I_k}{b}$$

$$I_k = \frac{1}{3} b^3 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 0{,}01^3 \cdot 0{,}1 = 3{,}33 \cdot 10^{-8}\, m^4$$

$$M_x \leq \frac{50 \cdot 3{,}33 \cdot 10^{-8}}{0{,}01} = 1{,}666 \cdot 10^{-4}\, MNm$$

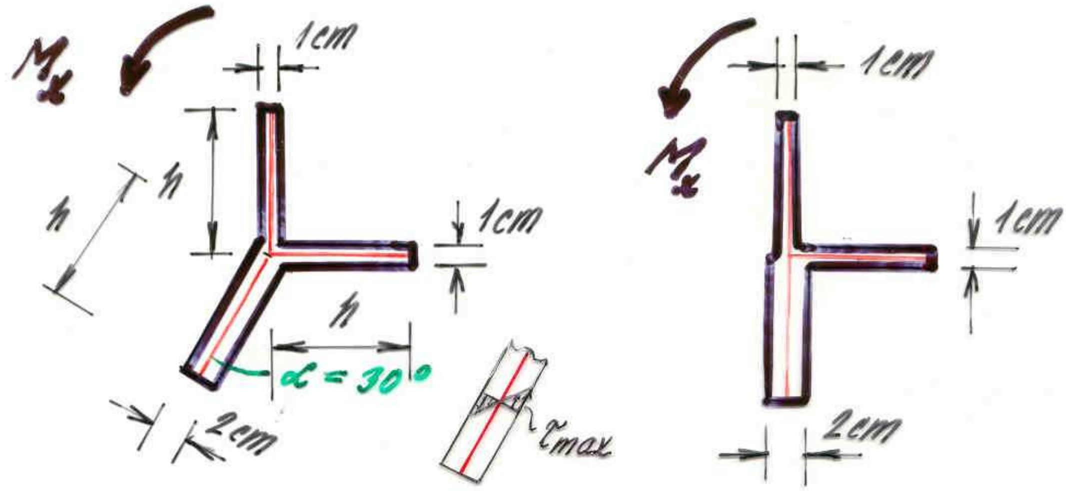
$$= \underline{0{,}167\, kNm}$$

Průběh napětí:



Př: Posuďte, který z průřezů na obr. má větší tuhost v kroucení a který bude více namáhán, bude-li přenášet kroutící moment $M_k = 0{,}5\ kNm$.

Všechny větve jsou dlouhé $h = 0{,}1\ m$.



Řešení Z hlediska kroucení jsou oba průřezy ekvivalentní.

Moment tuhosti stejný:

$$I_k \doteq \frac{1}{3}\sum h_i \cdot \delta_i^3 = \frac{1}{3}\cdot 0{,}1\,(0{,}01^3 + 0{,}01^3 + 0{,}02^3) =$$

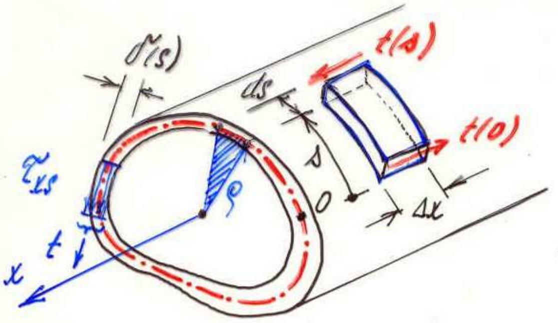
$$= 3{,}333 \cdot 10^{-7}\ m^4$$

Nejvíce namáhána nejsilnější větev ($\delta = 0{,}02\ m$)

$$\tau_{max} = \frac{0{,}5 \cdot 10^{-3}}{3{,}33 \cdot 10^{-7}} \cdot 0{,}02 = 30\ MPa$$

$$\tau_{(\delta = 0{,}01)} = \quad -"- \quad \cdot 0{,}01 = 15\ MPa$$

3. Volné kroucení prutů s tenkostěnným průřezem uzavřeným.



Podmínka rovnováhy sil působících na element délky Δx ($\sigma_x = 0$)

$$\leftarrow x : t(s) - t(0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad t(s) = t(0) = konst.$$

Předpoklad: τ_{xs} je po tloušťce průřezu konstantní, (podobně smyk za ohybu) má směr tečný ke střednici průřezu

$$t = \tau_{xs}(s) \cdot \delta(s) = konst.$$

Smykový tok v průřezu je konstantní

Moment od elementární smyk. síly $t \cdot ds$ kolem x:

$$\leftarrow x : \; dM_x = t \cdot \boxed{ds \cdot r} = t \cdot d\omega$$

$d\omega$.... dvojnásobek plochy výseče $\frac{1}{2} d\omega$

1. Bredtův vzorec (pro výsl. moment přenášený průřezem)

$$\boxed{M_x = t \cdot \Omega} = t \cdot \oint d\omega$$

$\Omega = \oint \rho \cdot ds$ ... dvojnásobek plochy opsané střednicí průřezu

ρ... průvodič

2. Bredtův vzorec (pro relativní ∢ zkroucení ϑ)

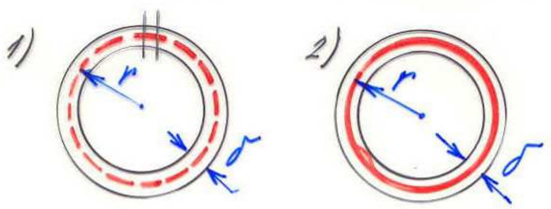
$$\boxed{\vartheta = \frac{M_x}{G I_k}}$$

$$\boxed{I_k = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}}}$$

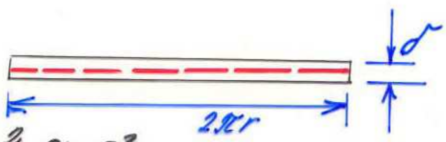
moment tuhosti ve volném kroucení

! **Torzní tuhost GI_k** je u uzavřených průřezů mnohonásobně vyšší nežli u průřezů otevřených.

Příklad: Porovnejte torzní tuhost duté trubky souvislé a rozříznuté



1) otevřený průřez



$$I_k^{1)} = \frac{1}{3}\cdot 2\pi r\cdot\delta^3 = \frac{2}{3}\pi r\delta^3$$

(Použít vz.: $I_k \doteq \frac{1}{3} l\cdot\delta^3$)

2) Uzavřený průřez:

$$I_k^{2)} = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}} = \frac{(2\cdot\pi r^2)^2}{\frac{2\pi r}{\delta}} = 2\pi r^3\delta$$

Pro tenkostěnné průřezy platí kriterium

$$\frac{2r}{\delta} > 10 \Rightarrow \frac{r}{\delta} > 5$$

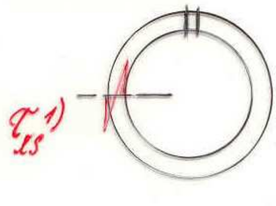
Porovnání tuhostí $I_k^{2)} / I_k^{1)}$:

$$\frac{I_k^{2)}}{I_k^{1)}} \geq \frac{2\pi r^3\delta}{\frac{2}{3}\pi r\delta^3} = 3\cdot\frac{r^2}{\delta^2} = 3\cdot 5^2 = 75$$

Porovnání $\max \tau_{xs}$:

1. otevřený průřez :

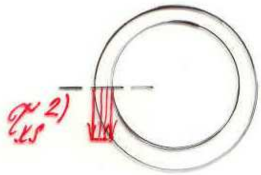
$$\max \tau_{xs}^{1)} = \frac{M_x}{I_k^{1)}}\,\delta = \frac{M_x \cdot \delta}{\frac{2}{3}\pi r \delta^3} = \frac{3}{2}\,\frac{M_x}{\pi r \delta^2}$$



2) uzavřený průřez :

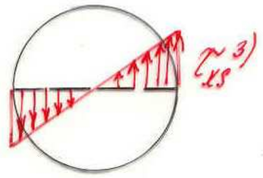
$$\max \tau_{xs}^{2)} = \frac{M_x}{2(\pi r^2)\cdot\delta}$$

$$M_x = t \cdot \Omega = \tau_{xs} \cdot \delta \cdot 2(\pi r^2)$$



3) plný kruhový průřez :

$$\max \tau_{xs}^{3)} = \frac{M_x}{I_p}\cdot r = \frac{M_x \cdot r}{\frac{\pi r^4}{2}} = \frac{2M_x}{\pi r^3}$$



Porovnání napětí

$$\frac{\max \tau_{xs}^{3)}}{\max \tau_{xs}^{2)}} = \frac{\frac{2M_x}{\pi r^3}}{\frac{M_x}{2\pi r^2 \cdot \delta}} = \frac{4\delta}{r} \leq \frac{4}{5}$$

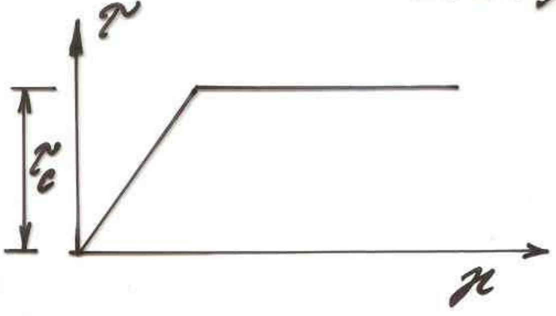
Napětí v průřezu masivním a tenkostěnném uzavřeném jsou řádově srovnatelná, ale v průřezu otevřeném tenkostěnném jsou napětí o řád vyšší.

$$\frac{\max \tau_{xs}^{2)}}{\max \tau_{xs}^{(1)}} = \frac{1}{3}\,\frac{\delta}{r} \leq \frac{1}{15} \Rightarrow \max \tau_{xs}^{1)} \geq 15 \cdot \tau_{xs}^{2)}$$

$$\frac{r}{\delta} \geq 5$$

Kroucení prutů s kruhovým průřezem v pružnoplastickém stavu:

Předpokládáme: pružnoplastický materiál ve smyku



τ_c ... mez plasticity pro smyk

↓ může být vyjádřena jako násobek meze kluzu $\sigma_0 \equiv f_y$

Působí-li v průřezu jak σ_x, tak τ_{xy}, τ_{xz}, rozhoduje o přechodu z pružného do plastického stavu v bodě „jistá" kombinace těchto napětí, tzv. **podmínka plasticity.**

Pro kovy: podmínka H-M-H (Huber-Mises-Hencky)

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_x^2} = \sigma_0 \equiv f_y$$

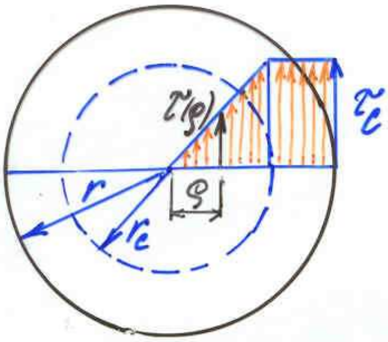
↓ srovnávací napětí

$$\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$$

Působí-li v průřezu pouze $M_x \equiv T$ $(\sigma_x = 0)$:

$$\tau_c \sqrt{3} = \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad \tau_c = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

Rozdělení smykových napětí po průřezu při pružnoplastickém namáhání:



$$\frac{\tau(\rho)}{\rho} = \frac{\tau_c}{r_c} \Rightarrow \tau(\rho) = \frac{\tau_c \cdot \rho}{r_c}$$

$$dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$$

Podmínka ekvivalence:

$$M_x \equiv T = \underbrace{\int_{\rho \le r_c} \tau(\rho) \cdot \rho \, dA}_{\text{„pružná" část průřezu}} + \underbrace{\int_{\rho \ge r_c} \tau_c \, \rho \, dA}_{\text{„zplastizovaná" část průřezu}}$$

$$M_x = \frac{\tau_c \pi}{6}\left(4r^3 - r_c^3\right)$$

2 mezní hodnoty:

a) kroutící moment na mezi pružného (elastického) namáhání ($r_c \equiv r$):

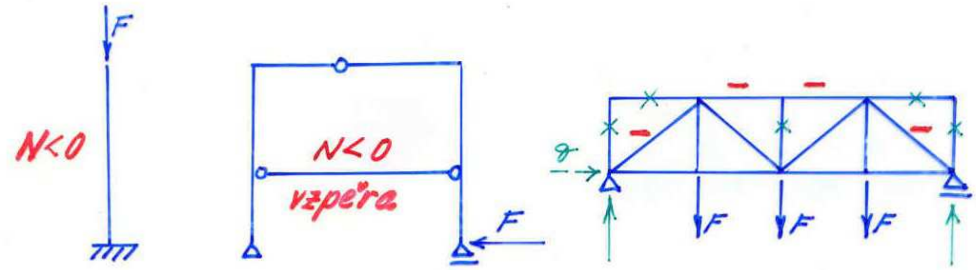
$$M_{x,e} = \frac{\pi r^3}{2} \tau_c$$

b) plně zplastizovaný průřez ($r_c = 0$)

$$M_{x,pl} = \frac{2\pi r^3}{3} \tau_c \, .$$

Stabilita přímých prutů

– štíhlé pruty namáhané tlakovou osovou silou jsou ohroženy ztrátou stability
(vybočení takto namáhaných prutů je jedna z nejčastějších příčin porušení mostních konstrukcí i kcí poz. stavitelství)



Charakteristika porušení konstrukce při ztrátě stability:

1) Kce zůstává neporušená, pokud tlakové osové síly v prutech nedosáhnou jisté, pro daný prut zcela specifické hodnoty (F_k).

2) Po překročení této hodnoty se prut zřetelně prohne (vybočí) (vzhledem k velikosti průhybů prut není schopen plnit statickou funkci v konstrukci)
nastává zhroucení, kolaps

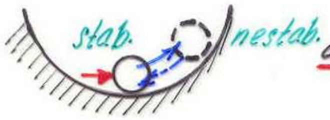
3) Při zhroucení (ztrátě stability) hraje značnou úlohu faktor času.

Problém namáhání štíhlých prutů tlakovou osovou silou se označuje jako **vzpěr**.

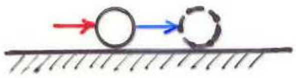
Definice pojmu stabilita

↳ znamená kvalitu rovnováhy

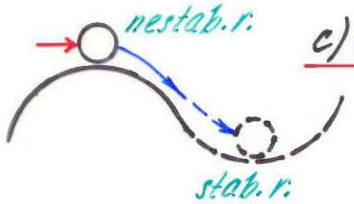
• Stabilita tuhých objektů



a) stabilní rovnováha

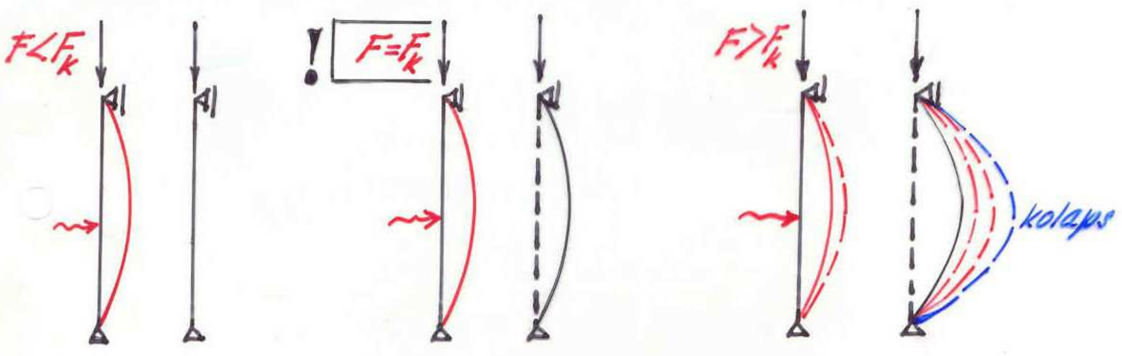


b) indiferentní rovnováha



c) labilní rovnováha

• Stabilita pružných soustav – ideální prut



a) stabilní rovnováha

b) indiferentní rov.

c) labilní rov.

Řešení stability skutečného prutu

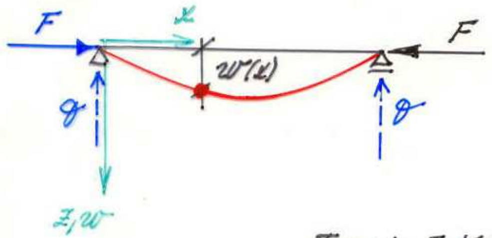
Nutno rozlišovat mezi původní a deformovanou kcí.
Stabilitní výpočty – podle **teorie II. řádu**.

Teorie II. řádu :

Posuny u ve směru střednice x a rotace φ_y zůstávají malé, průhyby w jsou velké

nejsou zanedbatelné vzhledem k základním rozměrům kce

⇒ **Podmínky rovnováhy je nutno sestavovat na deformované konstrukci !**



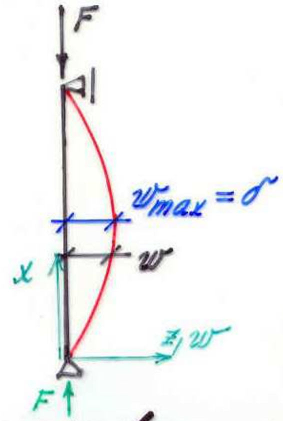
Teorie I. řádu : $M(x) = 0$

Teorie II. řádu : $M(x) = F \cdot w(x)$

sestaveno k bodu na deformované střednici

Matematický model:

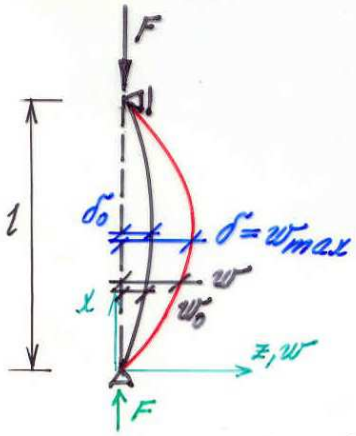
Ideální prut
- dokonale přímý
- dokonale centricky zatížený a uložený



- slouží k určení tzv. **kritického břemene F_k**
- k vybočení je třeba příčného impulsu (příčná síla, nerovnoměrná teplota)

$$\boxed{\frac{1}{\rho} \doteq -w'' = \frac{M_y}{EI_y}} \qquad \boxed{M_y = F \cdot w}$$

Skutečný prut
- má jisté odchylky (imperfekce) w_0 od ideálního geometrického tvaru (mají náhodný charakter)



- odchylky δ_0 jsou malé

$$\left(\frac{1}{500} \div \frac{1}{1000}\right) l$$

odlišná kvalita namáhání
→ **kombinace tlaku s ohybem**

$w_0\ (\delta_0)$ ... počáteční průhyb (amplituda průhybu)
$w\ (\delta)$ ... konečný průhyb (amplituda průhybu)

$\frac{1}{\rho_0}$ ... počáteční křivost $\qquad \frac{1}{\rho}$ ... konečná křivost

$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}$ ... změna křivosti vyvolaná ohyb. momentem

$$\boxed{M_y = F \cdot w}$$

dif. rovnice ohyb. čáry:
$$\boxed{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{F \cdot w}{EI_y}}$$

Poznatky o chování tlačených štíhlých prutů lze získat:

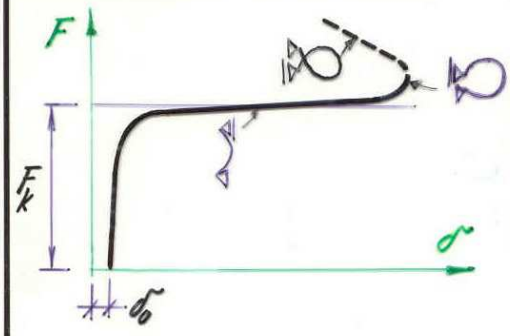
a) z **teorie geometricky nelineární** (nelineární závislost mezi silami a posuny)

b) z **teorie geometricky lineární** (zjednodušené)

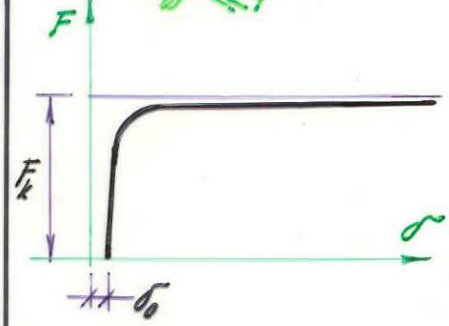
Přehled základních výsledků teorie stability

	nelineární teorie	lineární teorie
prut imperfektní	změna křivosti $\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}=\frac{M}{EI}$	$\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_0}=\frac{M}{EI}$ $\qquad \frac{1}{\rho_0}\doteq -w_0''$
	$\boxed{-\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}}+w_0''=\frac{F}{EI}w}$	$\boxed{-(w''-w_0'')=\frac{F}{EI}w}$ $\qquad w'^2\ll 1$
prut ideální	$\boxed{\frac{1}{\rho}=-\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}}=\frac{F}{EI}w}$	$\boxed{\frac{1}{\rho}\doteq -w''=\frac{F}{EI}w}$

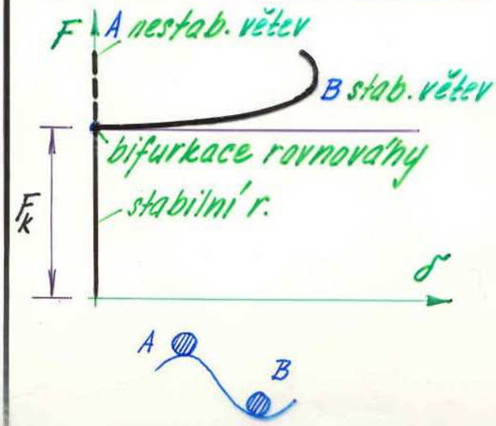
prut imperfektní – nelineární teorie



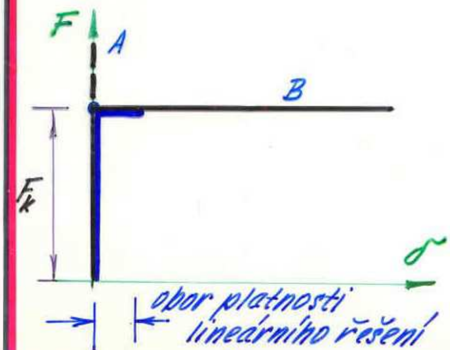
prut imperfektní – lineární teorie



prut ideální – nelineární teorie



prut ideální – lineární teorie



$(1+w'^2)\approx 1$

nelineární řešení ⇒ velké deformace

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}}$$

nutno použít pro zakřivené pruty (oblouky)

lineární řešení ⇒ malé deformace
(t.j. teorie II. řádu)

$$\frac{1}{\rho} \cong -w'' \quad \text{neboli} \quad 1+w'^2 \cong 1$$

$$(w'' - w_0'') + \frac{F}{EI} w = 0 \Rightarrow \delta = \frac{\delta_0}{1-\frac{F}{F_k}}$$

lze použít pro přímé pruty
a prutové soustavy tvořící ortogonální systém (rámové konstrukce)

Výpočet kritických sil při různých způsobech podepření ideálního prutu

Při různých způsobech podepření prutu → změní se hodnota kritického břemene F_k

Přidáním podpor (vazeb) zvýší se tuhost prutu
⇒ vzroste hodnota F_k

2 základní metody výpočtu F_k

1) Geometrická (Eulerova) metoda → přesná

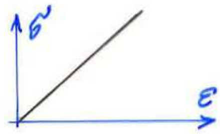
Vyžaduje sestavení a řešení diferenciální rovnice ohybové čáry.

2) Energetická (Ritzova) metoda → přibližná

Založena na porovnání energie vnitřních a vnějších sil.

Základní předpoklady (obou metod)

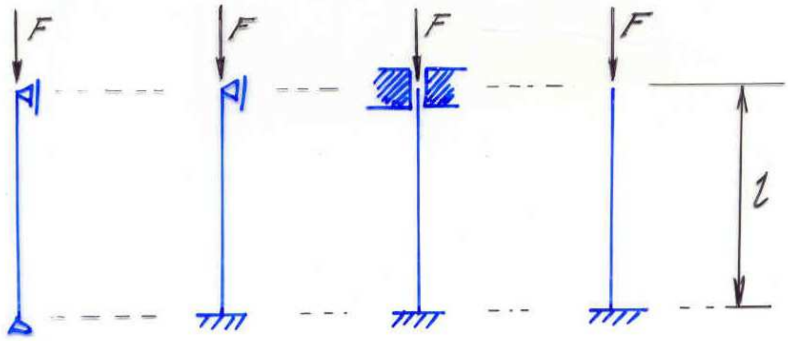
- lineárně pružný materiál



- deformace ε jsou dostatečně malé (nikoliv průhyby w)
- rovnováha na deformovaném prutu

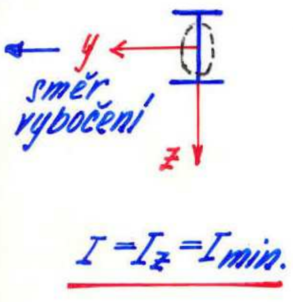
1. Geometrická (Eulerova metoda)

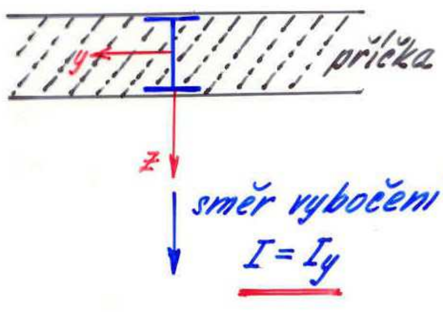
Euler odvodil výrazy pro kritické břemeno ve čtyřech tzv. základních Eulerových případech
(t.j.: pruty s konstantním průřezem a konstantní normálovou silou):



Obecně používaný vzorec: $\boxed{F_k = EI\frac{\pi^2}{L^2}}$

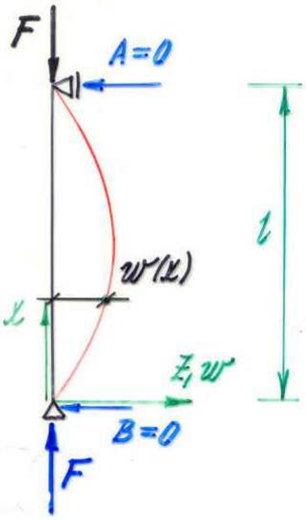
I... moment setrvačnosti k ose kolmé na směr vybočení
(jsou-li podmínky vybočení stejné ve všech směrech, pak $I = I_{min.}$)





L... vzpěrná délka

1. případ – nosník prostě podepřený



$$M_y(x) = F \cdot w(x)$$

$$w''(x) = -\frac{F}{EI}\, w(x) \qquad \frac{F}{EI} = \alpha^2$$

$$\boxed{w''(x) + \alpha^2 w(x) = 0}$$

Řešení: $w(x) = C_1 \sin\alpha x + C_2 \cos\alpha x$

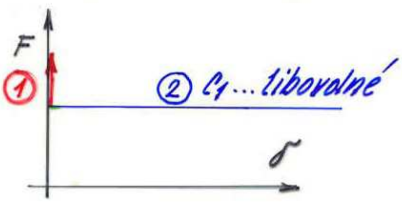
Pootočení: $w'(x) = C_1 \alpha \cos\alpha x - C_2 \alpha \sin\alpha x$

$$w''(x) = -C_1 \alpha^2 \sin\alpha x - C_2 \alpha^2 \cos\alpha x = -w(x)\alpha^2$$

Okrajové podmínky:

$x = 0 \;:\; w(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$x = l \;:\; w(l) = 0 \Rightarrow C_1 \sin\alpha l = 0 \Rightarrow$ ② $\boxed{\sin\alpha l = 0}$; ① $C_1 = 0$ (prut nevybočí)



Charakteristická rovnice

$$\boxed{\sin\alpha l = 0}$$

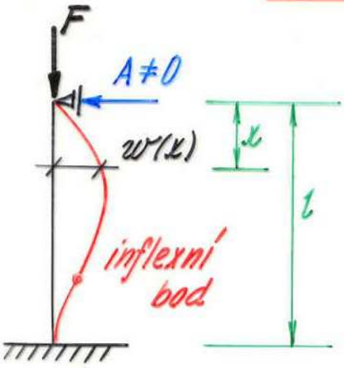
$\Rightarrow \alpha l = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi \ldots\ldots$

$(\alpha l)_{min.} = \pi$ .... hodnota kritická $\Rightarrow \alpha = \alpha_k$

$$\alpha_k^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \qquad \alpha_k^2 = \frac{F_k}{EI}$$

Eulerův vzorec: $\boxed{F_k = EI\,\frac{\pi^2}{l^2}}$ kritické břemeno

2. případ – nosník na jedné straně vetknutý, na druhé straně kloubově podepřený



$$M_y(x) = F\,w(x) + A\cdot x$$

$$w'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{1}{EI}(F\cdot w + A\cdot x)$$

$$= -\underbrace{\frac{F}{EI}}_{\alpha^2}\left(w + \frac{A}{F}x\right)$$

$$\boxed{w''(x) + \alpha^2 w(x) = -\alpha^2 \frac{A}{F} x}$$

diferenciální rov. 2. řádu nehomogenní

Řešení: $w(x) = w_{homog.} + w_{partik.}$

$$w(x) = \underbrace{C_1 \sin\alpha x + C_2 \cos\alpha x}_{\text{homog. řeš.}} + \underbrace{\left(-\frac{A}{F}x\right)}_{\text{part. řeš.}}$$

Pootočení: $w'(x) = C_1\alpha\cos\alpha x - C_2\alpha\sin\alpha x - \frac{A}{F}$

3 neznámé: $C_1, C_2, \frac{A}{F}$

Okrajové podmínky:

$x = 0$: $w(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$x = l$: $w'(l) = 0 \Rightarrow C_1\alpha\cos\alpha l - \frac{A}{F} = 0$

$w(l) = 0 \Rightarrow C_1 \sin\alpha l - \frac{A}{F} l = 0$

2 rovnice pro 2 neznámé $\left[C_1, \frac{A}{F}\right]$

maticový zápis:

$$\begin{bmatrix} \alpha\cos\alpha l & -1 \\ \sin\alpha l & -l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ \frac{A}{F} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Soustava má dvojí řešení: 1) **triviální** $C_1 = 0$; $A/F = 0$

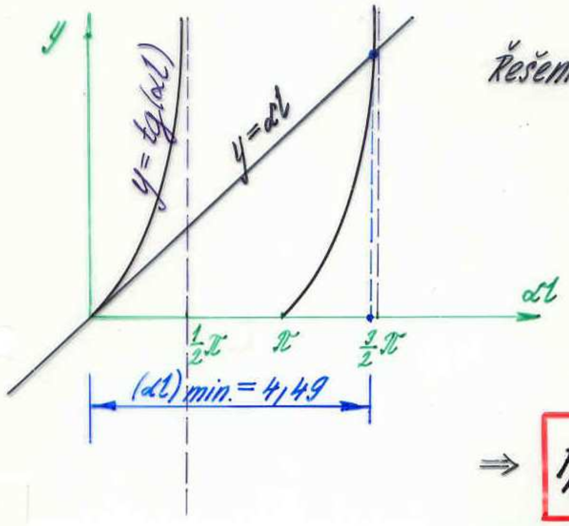
2) **netriviální** $C_1 \neq 0$, $A/F \neq 0$

> Homogenní soustava má **netriviální řešení** jedině tehdy, je-li její determinant nulový.

Charakteristická rovnice :

$$\det \left[\begin{array}{c|c} \cdot & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot \end{array} \right] = \sin\alpha l - \alpha l \cos\alpha l = 0 \Rightarrow \boxed{tg\,\alpha l = \alpha l}$$

transcendentní rovnice



Řešení pouze **přibližné** :

$y = tg(\alpha l)$

$y = (\alpha l)$

$$(\alpha l)^2 = \underbrace{\frac{F}{EI}}_{\alpha^2} l^2 = 4{,}49^2$$

$$(\alpha l)_{min.} = (\alpha l)_k$$

$$\Rightarrow \boxed{F_k = 4{,}49^2 \frac{EI}{l^2} = \frac{EI\pi^2}{(0{,}7071)^2}}$$

$L = 0{,}7l$ ... vzpěrná délka

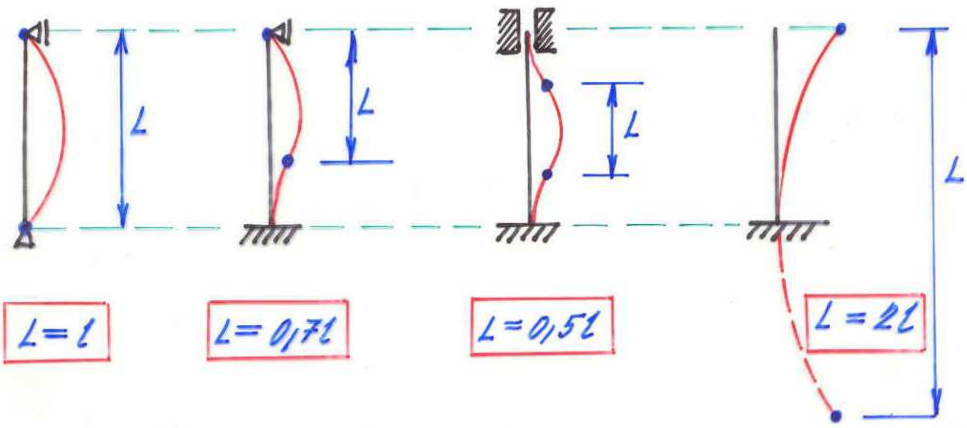
l ... skutečná délka

Vzpěrná délka L = vzdálenost dvou sousedních inflexních bodů na vybočené střednici prutu

Různé způsoby podepření prutu → různé L.
Určí se ze vz.:

$$F_k = \frac{EI\pi^2}{L^2}$$

Základní Eulerovy případy :



Pozn. : Čím větší vzpěrná délka L
⇒ tím menší hodnota F_k

V obecnějších případech (proměnné EI, N) je nutno vzpěrnou délku stanovit z řešení F_k.

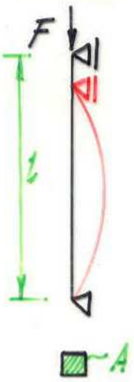
2.) Energetická metoda

– při řešení porovnáváme energii vnějších sil s energií vnitřních sil

<u>Potenciální energie vnějších sil</u> (E_e) je mírou (měřítkem) sil budicích, které se snaží prut ohnout

<u>Potenciální energie vnitřních sil</u> (E_i) je měřítkem sil, které kladou vybočení odpor

Rovnováha je

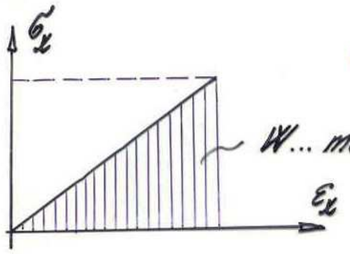


stabilní	$E_i > E_e$	($F < F_k$)
indiferentní	$E_i = E_e$	($F = F_k$)
labilní	$E_i < E_e$	($F > F_k$)

t.j. tzv. <u>energetické kriterium</u>

a) Energie vnitřních sil = práce vnitřních sil, energie deformace $\equiv E_i$

Hookeův z. pro jednoosou napjatost
$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$



W... měrná energie deformace : $W = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x$ [J/m³]

$$E_i = \iiint_V W\,dV = \frac{1}{2}\iiint_V \sigma_x \cdot \varepsilon_x\,dV = \frac{E}{2}\iiint_V \varepsilon_x^2\,dV$$

(objem prutu)

Při ohybu: $\varepsilon_x = -z\,\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = -z\,w''$

$\downarrow$ vzdálenost vláken od n.o.

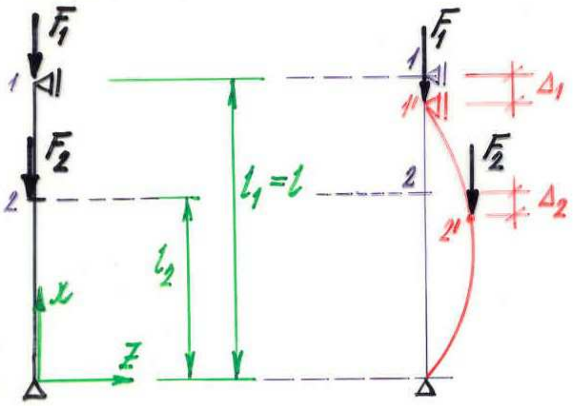
$$E_i = \frac{E}{2}\iint_{A(x)} z^2\,dA \int_0^l (w'')^2\,dx$$

$\iint_A z^2\,dA = I_y(x)$ ... může být proměn.

$$\boxed{E_i = \frac{E}{2}\int_0^l I_y\,(w'')^2\,dx}$$

Energie vnitř. sil
– vždy z celé konstrukce

b) Energie vnějších sil = práce vnějších sil = E_e



prut se nejprve stlačuje, pak vybočí

V okamžiku vybočení má síla F již konečnou hodnotu.

Δ_1, Δ_2 ... posuny působišť sil, které vznikly vybočením prutu

$$E_e = F_1\Delta_1 + F_2\Delta_2$$

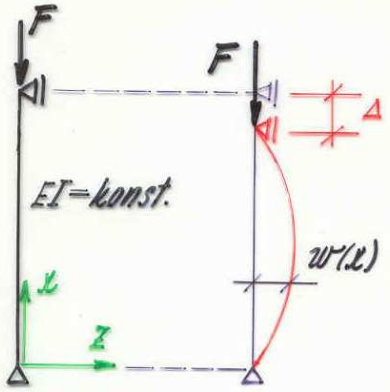
obecně $\boxed{E_e = \sum_i F_i\,\Delta_i \quad , \quad \Delta_i = \frac{1}{2}\int_0^{l_i} (w')^2\,dx}$

c) Kritické břemeno se počítá ze vztahu

$E_e = E_i$ (indiferentní rovnováha)

$$\boxed{\sum_i F_i\,\Delta_i = \frac{E}{2}\int_0^l I_y\,(w'')^2\,dx}$$

Příklad Vypočtěte hodnotu kritického břemene pro první Eulerův případ pomocí energetické metody. Tvar vybočení uvažujte z řešení geometrickou metodou (sinusovka):



$$w(x) = a \sin\frac{\pi x}{l}$$

$$w'(x) = a\frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi x}{l}$$

$$w''(x) = -a\frac{\pi^2}{l^2}\sin\frac{\pi x}{l}$$

$a \ldots$ koeficient $\quad a = \delta = w(l/2)$

Řešení:

$$E_i = \frac{1}{2}EI\int_0^l (w'')^2\,dx = \frac{1}{2}EI a^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \overbrace{\int_0^l \sin^2\frac{\pi x}{l}\,dx}^{l/2}$$

$$= \frac{1}{2}EI a^2\frac{\pi^4}{l^4}\cdot\frac{l}{2}$$

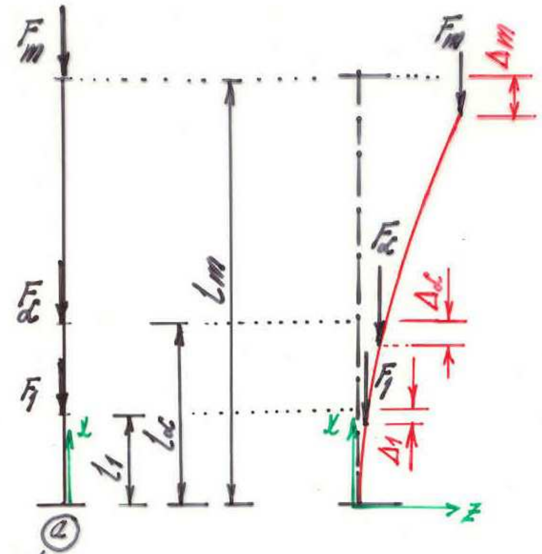
$$\Delta = \frac{1}{2}\int_0^l (w')^2\,dx = \frac{1}{2}a^2\frac{\pi^2}{l^2}\int_0^l \cos^2\frac{\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{2}a^2\frac{\pi^2}{l^2}\cdot\frac{l}{2}$$

Podmínka indiferentní rovnováhy

$$F\cdot\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{a^2}\frac{\pi^2}{l^2}\cdot\cancel{\frac{l}{2}} = \cancel{\frac{1}{2}}EI\cancel{a^2}\frac{\pi^4}{l^4}\cdot\cancel{\frac{l}{2}}$$

$$\boxed{F_k = \frac{EI\pi^2}{l^2}}$$

$\equiv$ s řešením geometrickou metodou



$$\Delta_\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{l_\alpha} (w')^2\,dx$$

$$F_\alpha = \varkappa_\alpha F$$

F... srovnávací hodnota zatížení

$\varkappa_\alpha$ ... koeficient zatížení

bod neposuvně podepřený ve směru x (počátek osy x!)

$$E_e = \sum_{\alpha=1}^{m} F_\alpha \cdot \Delta_\alpha = F\sum_{\alpha=1}^{m} \varkappa_\alpha \cdot \Delta_\alpha = F\sum_{\alpha=1}^{m} \varkappa_\alpha \frac{1}{2}\int_0^{l_\alpha} (w')^2\,dx$$

$$E_i = \frac{1}{2}\int_0^{l} EI(x)(w'')^2\,dx$$

Podmínka indiferentní rovnováhy ($F = F_k$)

$E_e = E_i$ $\Rightarrow$ vzorec pro kritické břemeno F_k

$$\boxed{F_k = \frac{\displaystyle\int_0^{l} EI(x)(w'')^2\,dx}{\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{m} \varkappa_\alpha \int_0^{l_\alpha} (w')^2\,dx}}$$

Přesný vzorec za předpokladu, že je známý přesný tvar ohyb. čáry w.

Přibližné řešení z energetické metody

- použijeme-li přesný tvar vybočení, vyjde z podmínky $E_i = E_e$ přesná hodnota F_k ;

- zvolíme-li přibližný tvar vybočení $\tilde{w}$, vyjde z podmínky $\tilde{E}_i = \tilde{E}_e$

$$\boxed{\tilde{F}_k > F_k} \Rightarrow$$ energetické řešení není na straně bezpečnosti

Postup výpočtu

1) ohybovou čáru volíme ve tvaru řady

$$\tilde{w}(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_n \varphi_n(x)$$

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_n(x)$ ... známé, zvolené funkce, které splňují geometrické okrajové podmínky (alespoň) !

$a_1, a_2, \dots a_n$ ... neznámé koeficienty

2) sestavíme podmínku energetické rovnováhy

$$\tilde{E}_i = \tilde{E}_e \Rightarrow \tilde{F}_k = f(a_1, a_2, \dots a_n)$$

Konstanty $a_1, a_2, \dots a_n$ „určíme" z podmínky minima :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}_k}{\partial a_1} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{F}_k}{\partial a_2} &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}\right\}$$ dostaneme homogenní soustavu lineárních algebraických rovnic

Z podmínky : determinant soustavy $= 0 \Rightarrow \tilde{F}_{k,min.}$
(vyhovuje nenulovému řešení)
(koeficienty a_i nelze určit)

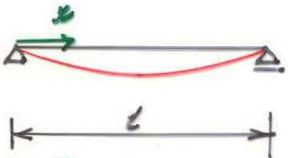
Pro $n=1$: Energetická metoda v užším smyslu

$$\tilde{w}(x) = a_1 \varphi_1(x) \qquad \tilde{w}'(x) = a_1 \varphi_1'(x)$$

$$\tilde{w}''(x) = a_1 \varphi_1''(x)$$

$$\tilde{F}_k = \frac{\int_0^l EI\,(a_1 \varphi_1'')^2\,dx}{\sum_\alpha \varkappa_\alpha \int_0^{l_\alpha} (a_1 \varphi_1')^2\,dx} = \frac{\int_0^l EI\,(\varphi_1'')^2\,dx}{\sum_\alpha \varkappa_\alpha \int_0^{l_\alpha} (\varphi_1')^2\,dx}$$

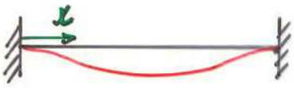
Goniometrické bázové funkce pro průhyb



$$\varphi_1(x) = \sin\frac{\pi x}{l}$$

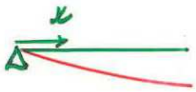
$$\varphi_1(x) = 1 - \cos\frac{\pi x}{2l}$$

$$\varphi_1(x) = \cos\frac{\pi x}{2l} - \cos\frac{3\pi x}{2l}$$



$$\varphi_1(x) = 1 - \cos\frac{2\pi x}{l}$$

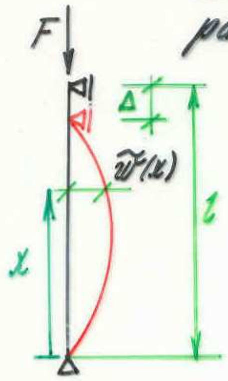
Poznámka: Geometrické okrajové podmínky



$x=0:\quad w=0$

$x=0:\quad w=0,\ w'=0$

Příklad Vypočtěte přibližnou hodnotu $\tilde{F}_k$.
Zvolte ohybovou čáru ve tvaru kvadratické paraboly:



$$\boxed{\tilde{w}(x) = ax(l-x) = a(xl - x^2)}$$

$$\tilde{w}'(x) = a(l-2x)$$

$$\tilde{w}''(x) = a\cdot(-2)$$

<u>Splnění okrajových podmínek</u>

<u>geometrické:</u>
$x=0: \quad \tilde{w}(0)=0$
$x=l: \quad \tilde{w}(l)=0$
} splněno

<u>statické:</u>
$x=0: \quad M(0) = -EI\,\tilde{w}''(0) \neq 0$
$x=l: \quad M(l) = -EI\,\tilde{w}''(l) \neq 0$
} splněno není

<u>Energetická podmínka</u>

$$\tilde{F}_k \frac{1}{2}\int_0^l (\tilde{w}')^2\,dx = \frac{1}{2} EI \int_0^l (\tilde{w}'')^2\,dx$$

$$\tilde{F}_k = \frac{\frac{1}{2}EI\int_0^l (-2a)^2\,dx}{\frac{1}{2}\int_0^l a^2(l^2 - 4lx + 4x^2)\,dx} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}EI\,\cancel{a^2}4l}{\cancel{\frac{1}{2}}\cancel{a^2}\frac{1}{3}l^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{F}_k = \frac{12EI}{l^2} > \frac{EI\pi^2}{l^2} = F_k}$$ (chyba 21,6 %)

Nepřesnost způsobena tím, že jsme nesplnili statické okrajové podmínky. Při volbě 1 členu řady je účelné splnit nejen geometrické, ale i statické okraj. podmínky.

Kritické napětí a Eulerova hyperbola

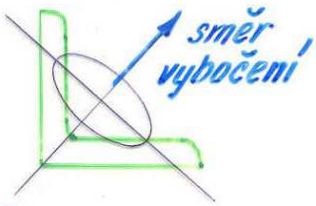
Je-li prut namáhán centricky tlakovou silou F, vzniká v něm normálové napětí $\sigma = \frac{N}{A} = -\frac{F}{A}$

kritické napětí $F = F_k$

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} = \frac{\frac{EI\pi^2}{L^2}}{\frac{I}{i^2}} = \frac{E\pi^2}{\left(\frac{L}{i}\right)^2} = \frac{E\pi^2}{\lambda^2}$$

L … vzpěrná délka prutu

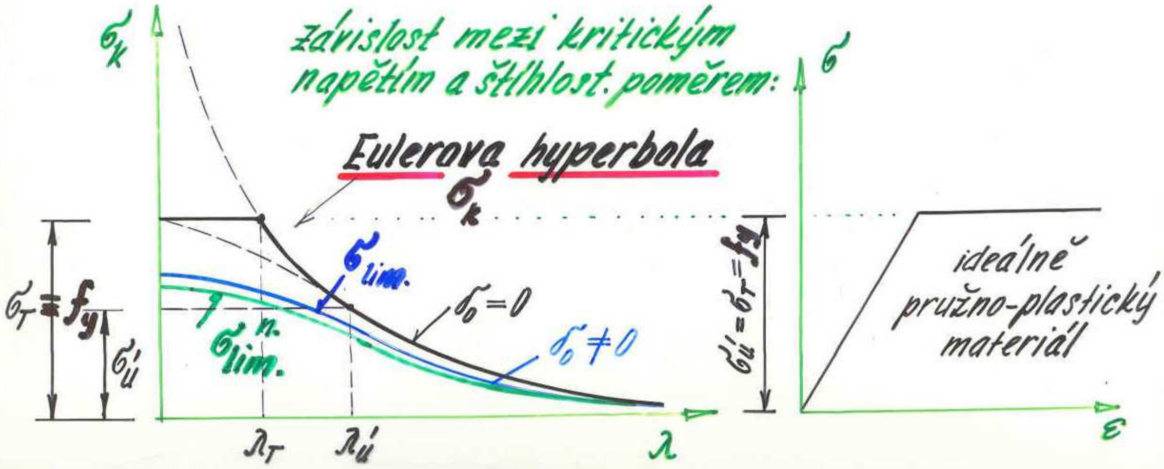
$i^2 = \frac{I}{A}$ …. jsou-li podmínky uložení ve všech směrech v rovině průřezu stejné, uvažuje se $i_{min.}$



…. při různých poměrech uložení prutu v podporách, rozhoduje směr vybočení

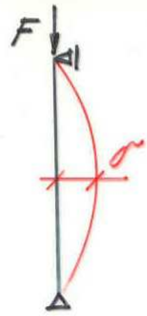
$$\boxed{\lambda = \frac{L}{i}}$$ štíhlostní poměr prutu

závislost mezi kritickým napětím a štíhlost. poměrem:



ideální prut

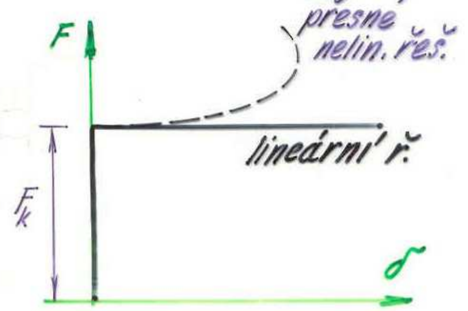
$\boxed{\delta_0 = 0}$



$$F_k = \frac{EI\pi^2}{L^2}$$

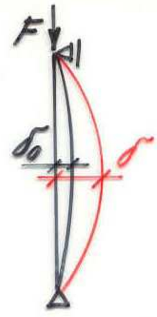
$$\lambda = \frac{L}{i_{min.}}$$

$$\sigma_k = \frac{F_k}{A}$$

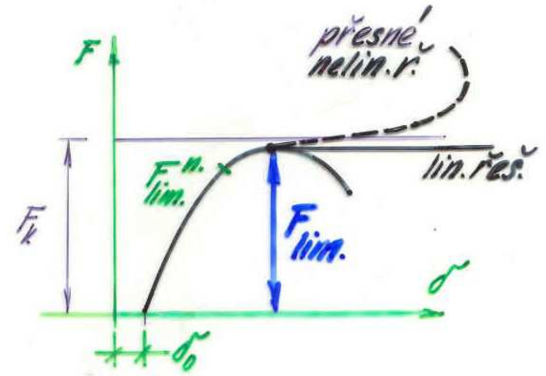


skutečný (imperf.) prut

$\boxed{\delta_0 \neq 0}$



$$\sigma_{lim.} = \frac{F_{lim.}}{A} < \sigma_k$$



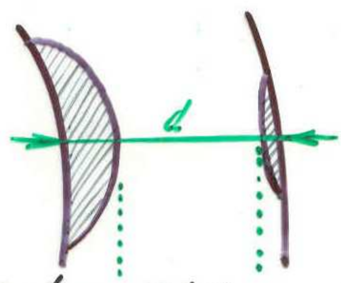
— při zvětšení průhybů — napětí v krajních vláknech dosáhne meze úměrnosti $\sigma_u = \sigma_T = f_y$

⇒ začnou se tvořit **plastické oblasti prutu**

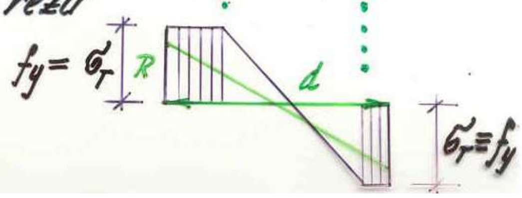
— zvětšením zatížení

⇒ zvětší se plastická oblast

— při výrazném zmenšení pružné oblasti není průřez schopen přenášet zvětšující se zatížení, ⇒ nastává kolaps



Rozdělení napětí σ_x po průřezu



Navrhování tlačených prutů podle norem

a) U masivních prutů (u kterých se neuplatňuje vzpěr)

–posuzuje se namáhání při prostém tlaku

$$\boxed{\frac{F}{A} \leq R}$$

R... výpočtové namáhání (= max. přípustné napětí v prutu)

F... výpočtové zatížení (= stanoveno dle normy o zatíž., s ohledem na pravděpodobná maxima)

b) U štíhlých prutů

– ČSN přihlíží k imperfekcím
výpočet se nazývá **pevnostní**

$$\boxed{\frac{F}{A} \leq R \cdot \Phi}$$

$$\Phi = f(\lambda, E, \sigma_T, \frac{\delta_0}{l}) = \frac{\sigma^{n}_{lim}(\lambda)}{\sigma^{n}_{lim.}(\lambda = 0)} \leq 1$$

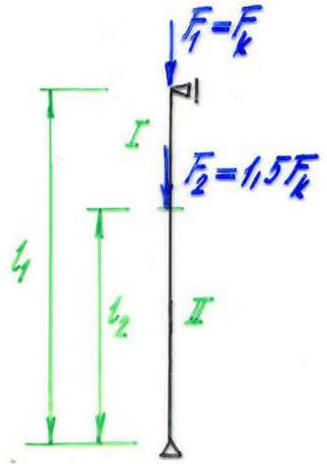
$$\Phi \begin{cases} = 1 \text{... masivní pruty} \\ < 1 \text{... štíhlé pruty} \end{cases}$$

Funkce Φ je tabelovaná pro různé materiály (E, σ_T) v závislosti na λ. Imperfekce δ_0 jsou v tabulkách a normových vzorcích již zraženy.

Postup výpočtu :

1) Ze způsobu podepření a zatížení konstrukce (ideálního prutu) určíme F_k.

2) Určíme vzpěrnou délku prutu L (u členěného prutu – v každém intervalu)



$$\boxed{-N_i = \frac{E_i I_i \pi^2}{(L_i)^2}}$$

Příklad : $i = I, II$

část I : $N_I = -F_1 = -F_k \Rightarrow L_I$

část II : $N_{II} = -F_1 - F_2 = -2{,}5 F_k \Rightarrow L_{II}$

3) Stanovíme štíhlostní poměr

$$\lambda = \frac{L}{i_{min.}}$$

4) Podle druhu materiálu určíme v závislosti na λ hodnotu součinitele vzpěrnosti

$$\phi \leq 1$$

5) Prokážeme (posouzení prvku), že výpočtové zatížení F prutu vyhovuje nerovnosti

$$\frac{F}{A} \leq R \cdot \phi .$$