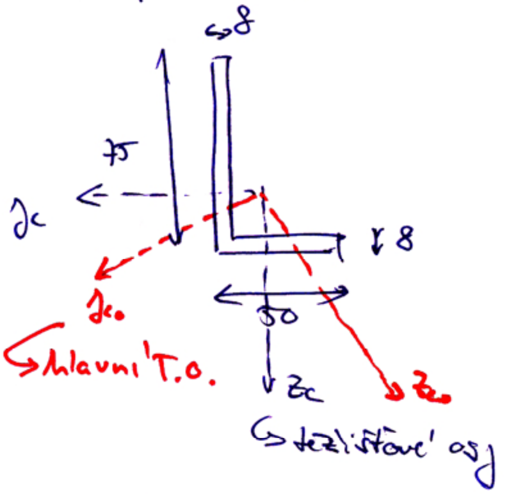
Opakování průřezových charakteristik

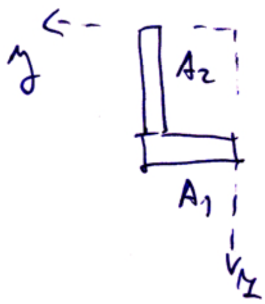
Určit: $A, I_y, I_z, I_{y0}, I_{z0}, D_{yz}$

průřez: tyč nerovnoramenného "L" 75 x 50 x 8



1) Poloha těžiště

... potřeba určit: A, S_y, S_z $\qquad S_y = \int_A z\,dA \qquad S_z = \int_A y\,dA$



$A = 50 \cdot 8 + (75-8) \cdot 8 = 936\ mm^2$

$A_1 = 400\ mm^2$

$A_2 = 536\ mm^2$

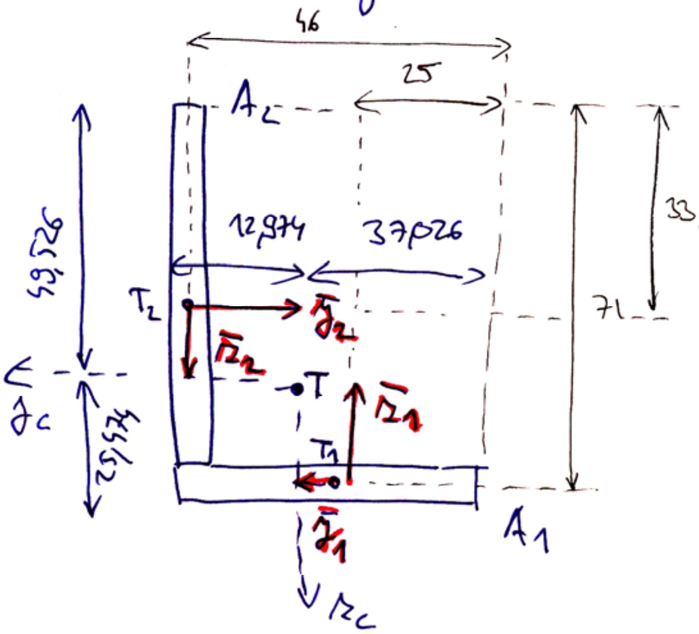
$$S_y = A_2 \cdot \frac{67}{2} + A_1 \cdot 71 = \frac{536 \cdot 67}{2} + 400 \cdot 71 = 46\,356\ mm^3$$

$$S_z = A_1 \cdot 25 + A_2 \cdot 46 = 400 \cdot 25 + 536 \cdot 46 = 34\,656\ mm^3$$

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{34\,656}{936} = 37{,}026\ mm$$

$$z_c = \frac{S_y}{A} = \frac{46\,356}{936} = 49{,}526\ mm$$

2) Momenty setrvačnosti k osám y_c, z_c



$\bar{y}_1 = 37{,}026 - 25 = 12{,}026$ mm

$\bar{z}_1 = 49{,}526 - 71 = -21{,}474$ mm

$\bar{y}_2 = 37{,}026 - 46 = -8{,}974$ mm

$\bar{z}_2 = 49{,}526 - 33{,}5 = 16{,}026$ mm

$$I_y = \int_A z^2 dA \;\ldots = \underbrace{\frac{1}{12}\cdot 50\cdot 8^3 + 400\cdot(-21{,}474)^2}_{①} + \underbrace{\frac{1}{12}\cdot 8\cdot 67^3 + 536\cdot 16{,}026^2}_{②} = \underline{\underline{524757\text{ mm}^4}}$$

$$I_z = \int_A y^2 dA \ldots = \underbrace{\frac{1}{12}\cdot 8\cdot 50^3 + 400\cdot 12{,}026^2}_{①} + \underbrace{\frac{1}{12}\cdot 67\cdot 8^3 + 536\cdot -8{,}974^2}_{②} = \underline{\underline{187207\text{ mm}^4}}$$

$$D_{yz} = \int_A yz\,dA \;\ldots = \underbrace{\cancel{D_{yz}}}_{0} + \bar{y}\bar{z}A$$

$$D_{yz} = A_1\bar{y}_1\bar{z}_1 + A_2\bar{y}_2\bar{z}_2 = 400\cdot 12{,}026\cdot(-21{,}474) + 536\cdot(-8{,}974)(16{,}026) =$$

$$= \underline{\underline{-180385\text{ mm}^4}}$$

3) Hlavní centrální momenty setrvačnosti

$$\tan 2\beta = \frac{2D_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2\cdot(-180385)}{187207 - 524757} = 1{,}06879$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{46{,}9045}{2} = 23{,}4522^\circ$$

$$I_{y_0} = I_y\cos^2\beta_0 + I_z\sin^2\beta_0 - D_{yz}\sin 2\beta_0$$

$$I_{z_0} = I_y\sin^2\beta_0 + I_z\cos^2\beta + D_{yz}\sin 2\beta_0$$

... nebo

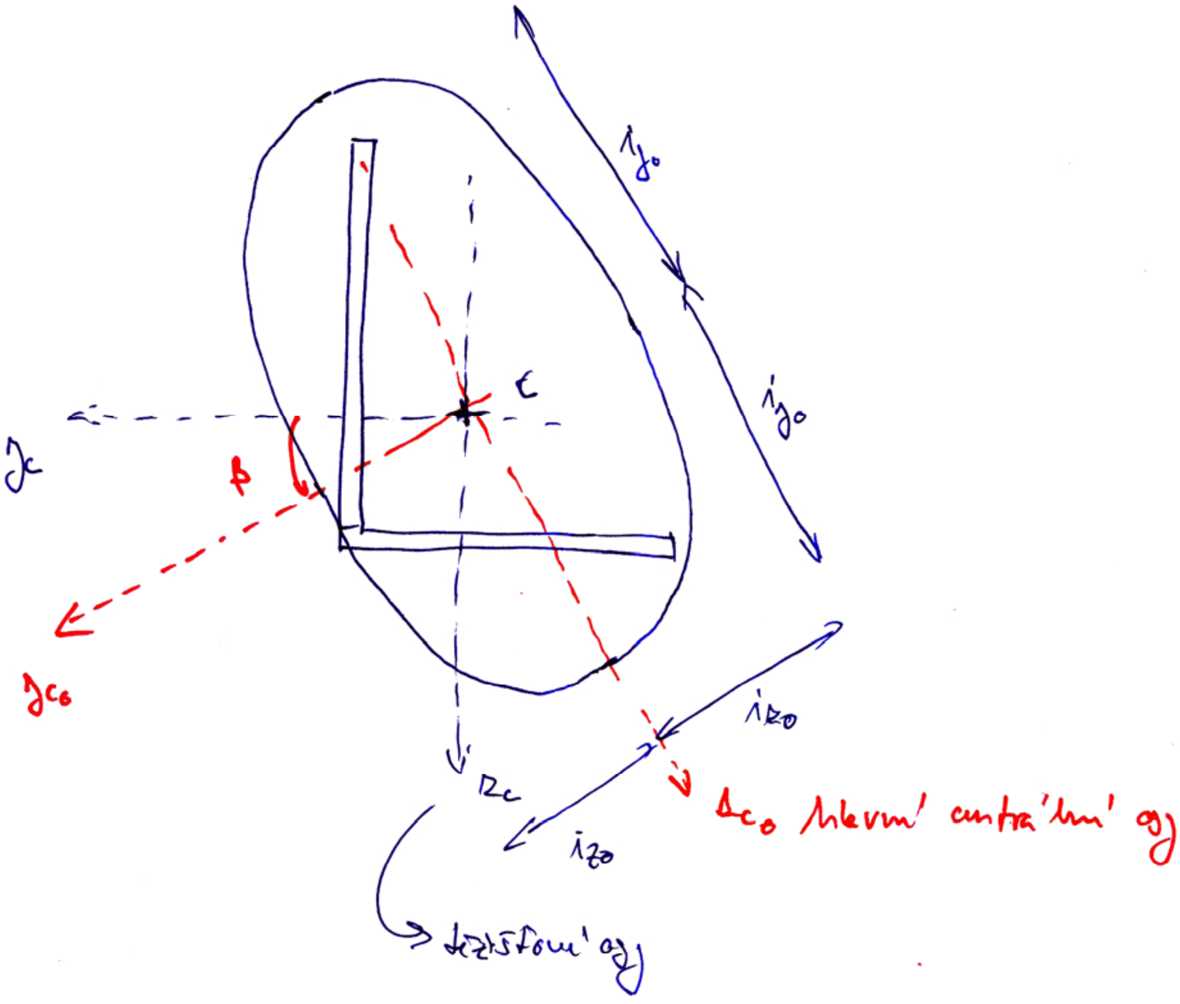
$$I_{y0}, I_{z0} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_y - I_z)^2}{4} + D_{yz}^2} =$$

$$= \frac{524757 + 187207}{2} \pm \sqrt{\frac{(524757 - 187207)^2}{4} + (180385)^2} =$$

$$= \begin{cases} 603012 \text{ mm}^4 \rightarrow I_{y0} \\ 108952 \text{ mm}^4 \rightarrow I_{z0} \end{cases} \qquad D_{y0z0} = 0 \,!$$

$$i_{y0} = \sqrt{\frac{I_{y0}}{A}} = \sqrt{\frac{603012}{936}} = 25{,}382 \text{ mm}$$

$$i_{z0} = \sqrt{\frac{I_{z0}}{A}} = \sqrt{\frac{108952}{936}} = 10{,}789 \text{ mm}$$



$\varkappa = \frac{\Delta\varphi}{L}$ ... křivost

$\varepsilon(z) = \varkappa \cdot z$

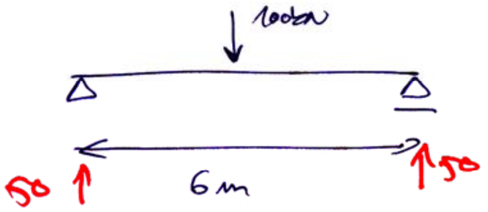
$\sigma = E \cdot \varkappa \cdot z = \frac{M}{I} \cdot z$

$M = EI \cdot \varkappa$

→ z předpokladu Navierovy-Bernoulliovy hypotézy

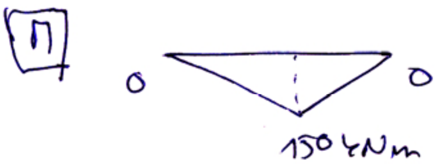
→ průřez zůstává i po deformaci rovinný + kolmý ke střednici

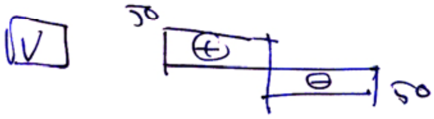
Příklad: vypočtěte maximální normálové napětí v dané konstrukci



$E = 30\,GPa$

1) určíme rozložení vnitřních sil po konstrukci





platí vztah $\sigma_x(z) = \frac{M}{I} \cdot z$ → maximální σ pro
- maximální M
- maximální z → okraj průřezu

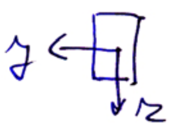
2) Průřezové charakteristiky:

$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}0054\,m^4$$

3) Rozložení napětí po nejvíce namáhaném průřezu

max $M = 150\,kNm$

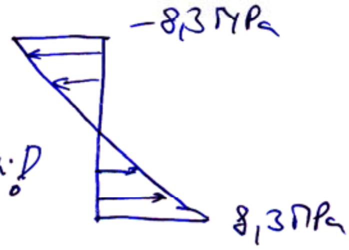
max $z = \pm 0{,}3\,m$



$$\sigma_x(z) = \frac{150 \cdot 10^3}{0{,}0054} \cdot z = 2{,}77 \cdot 10^7 \cdot z$$

- $z = 0{,}3\,m \rightarrow \sigma_x = 8{,}3 \cdot 10^6\,Pa = 8{,}3\,MPa$
- $z = -0{,}3 \rightarrow \sigma_x = -8{,}3\,MPa$

→ rozložení napětí

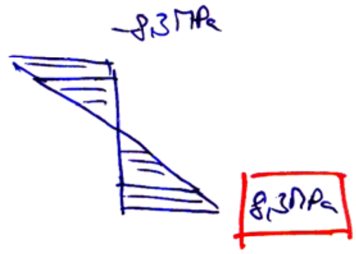


→ nezávisí na modulu pružnosti!

Rozšíření z 1. příkladu:

maximální moment ... $M_{max} = 150$ kNm

⇒ tomu odpovídá rozložení napětí

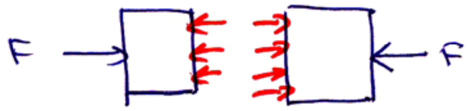


... beton má tahovou pevnost 2,5 MPa

→ Jak velkou centrickou silou musím působit, aby se nosník nezlomil?

→ určete výsledné rozložení napětí

• účinek od normálové centrické síly: $\sigma_x = \frac{F}{A}$ → hledaná síla; → $0{,}18\,m^2$



Aby se nosník neporušil, musí platit:

$$f_t = 2{,}5\,MPa \boxed{>} 8{,}3\,MPa + \frac{F}{A} = 8{,}3\,MPa + \frac{F}{0{,}18}$$

... mezní případ →

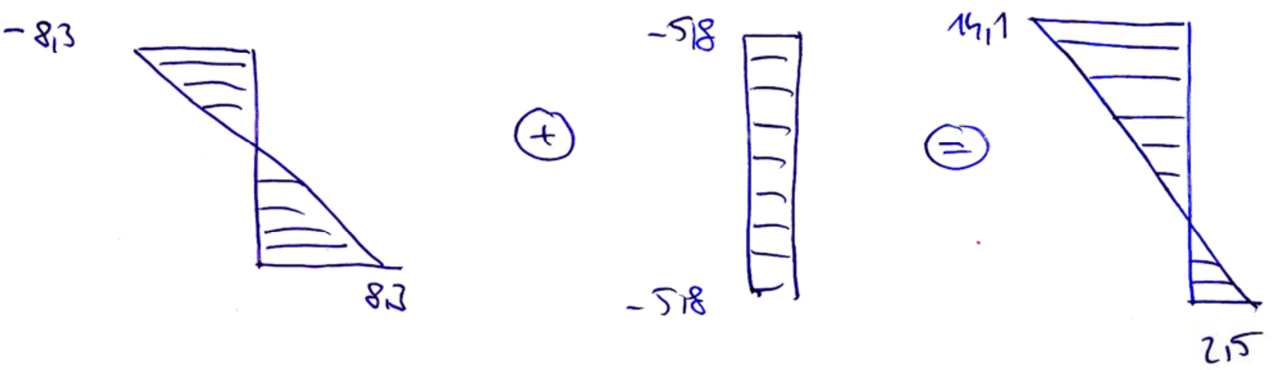
$$2{,}5\,MPa = 8{,}3\,MPa + \frac{F}{0{,}18}$$

$$F = 0{,}18 \cdot (-5{,}8) = -1{,}044\,MN$$

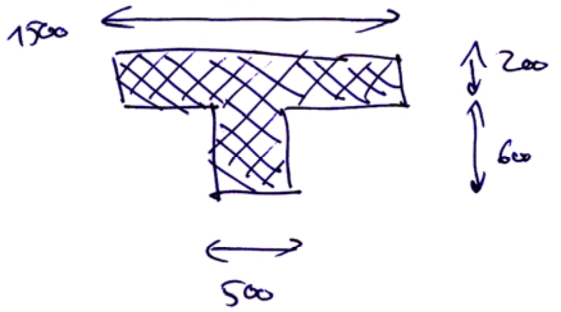
→ síla musí mít "minimální" velikost 1,044 MN.

Finální rozložení napětí:

napětí způsobené M: napětí od síly F, $\sigma = \frac{-1{,}044}{0{,}18}$ [MPa]



Příklad: T-průřez

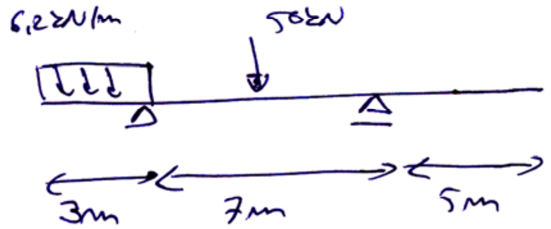


$\rho = 23\ kN/m^3$

$A_{▭} = 1{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}3\ m^2$

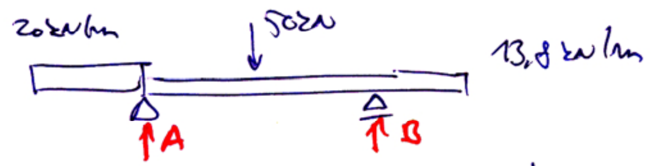
$A_{▯} = 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}3\ m^2$

$\sum A = 0{,}6\ m^2$



nosník je zatížen silově i vlastní tíhou.

zatížení od vlastní tíhy: $g = A \cdot \rho = 0{,}6 \cdot 23 = 13{,}8\ kN/m$



→ vyřešíme průběh vnitřních sil

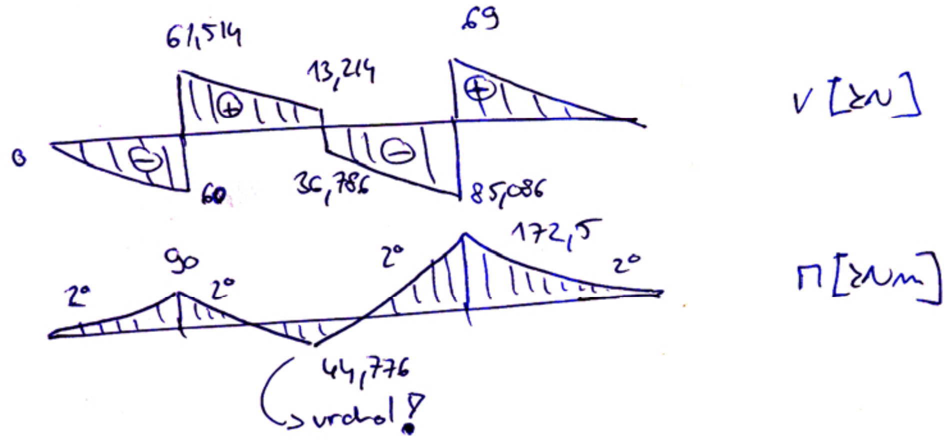
$\uparrow: A + B = 20 \cdot 3 + 13{,}8 \cdot (7+5) + 50 = 275{,}6\ kN$

$\circlearrowleft b: A \cdot 7 = 20 \cdot 3 \cdot 8{,}5 + 50 \cdot 3{,}5 + 13{,}8 \cdot 7 \cdot 3{,}5 - 13{,}8 \cdot 5 \cdot 2{,}5 \quad \Rightarrow A = 121{,}514\ kN$

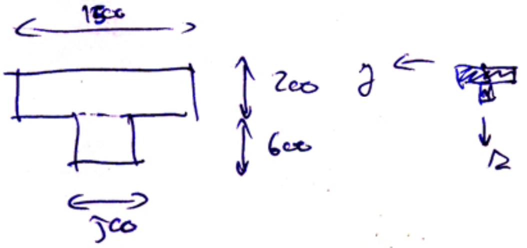
$\rightarrow B = 275{,}6 - 121{,}514 = 154{,}086\ kN$

→ kontrola $\circlearrowleft a$: $20 \cdot 3 \cdot 1{,}5 + 7 \cdot B - 50 \cdot 3{,}5 - 13{,}8 \cdot 12 \cdot 6 = 0{,}002$ ... ok!

T-průřez – vykreslení vnitřních sil



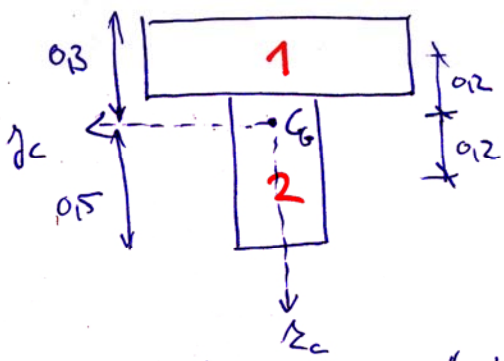
Výpočet průřezových charakteristik



$$y_c = \frac{0,3 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot (0,2+0,3)}{0,6} = 0,3\ m$$

→ Těžiště průřezu leží 0,3 m od horní hrany

→ výpočet momentu setrvačnosti I_y



$$I_y = \underbrace{\frac{1}{12} \cdot 1,5 \cdot 0,2^3 + \overbrace{0,3 \cdot 0,2^2}^{\text{Steinerův doplněk}}}_{1} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{12} \cdot 0,5 \cdot 0,6^3 + 0,3 \cdot 0,2^2}_{2} = 0,034\ m^4$$

Výpočet extrémních normálových napětí

→ max. kladný moment 44,776 kNm

záporný −172,5 kNm

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot z$$

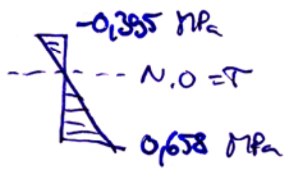
1) kladný moment $\sigma_x(z) = \frac{44,776 \cdot 10^3}{0,034} \cdot z = 1,317 \cdot 10^6 \cdot z$ pro $z = -0,3$ $\sigma_x = -0,395$ MPa

$z = 0,5$ $\sigma_x = 0,658$ MPa

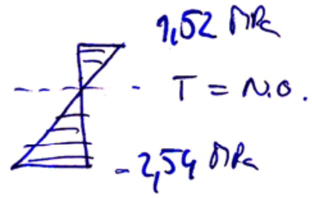
2) záporný moment $\sigma_x(z) = \frac{-172,5 \cdot 10^3}{0,034} \cdot z = 5,074 \cdot 10^6 \cdot z$ pro $z = -0,3$ $\sigma_x = 1,52$ MPa

$z = 0,5$ $\sigma_x = -2,54$ MPa

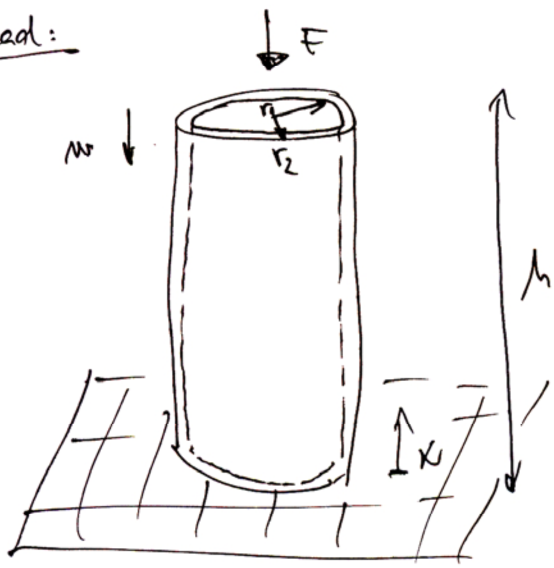
1)



2)



Příklad:



$h = 8\,m$

$F = 3\,MN$

$E_c = 30\,GPa$

$E_s = 210\,GPa$

$r_2 = 0{,}2\,m$

$r_1 = 0{,}18\,m$

Vypočtěte svislý posun, napětí v betonu a oceli

---

musí platit: $\varepsilon_c = \varepsilon_s = \varepsilon$

Silová podmínka rovnováhy: $F = N_s + N_c = \sigma_s \cdot A_s + \sigma_c A_c = E_s\,\varepsilon \cdot A_s + E_c \cdot \varepsilon \cdot A_c$

$$\varepsilon = \frac{F}{E_c A_c + E_s A_s} = \frac{-3 \cdot 10^6}{30 \cdot 10^9 \cdot 0{,}11341 + 210 \cdot 10^9 \cdot 0{,}01225} = -0{,}000502$$

$u(L) = \varepsilon \cdot h = -4{,}01687\ mm$

$w = -u(L) = \underline{4{,}02\ mm}$

$\sigma_c = E_c \cdot \varepsilon = \underline{-15{,}06\ MPa}$

$\sigma_s = E_s \cdot \varepsilon = -\underline{105{,}443\ MPa}$