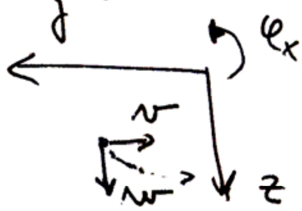
Kroucení – výtah z přednášky

výpočet posunů pro malé natočení φ_x

předpoklad – volné kroucení (bez deplanace)



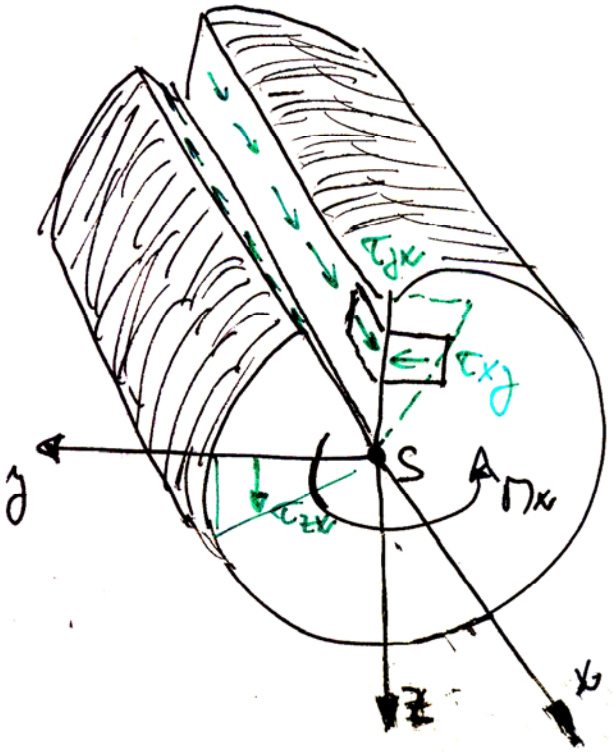
$$w = y \cdot \varphi_x$$

$$v = -z \cdot \varphi_x$$

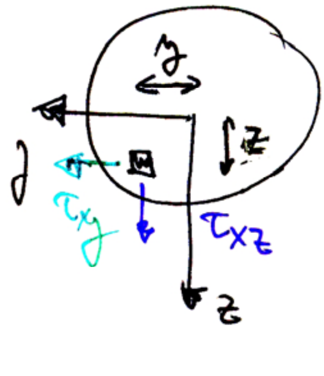
$$\gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0 + (-z)\frac{d\varphi_x}{dx} = \theta$$

$$\rightarrow \tau_{xy} = G\gamma_{xy} = -z \cdot G\theta$$

$$\gamma_{xz} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = 0 + y\theta \quad \ldots\ldots \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} = y\,G\theta$$



$$M_x = \int_A \tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z \, dA$$



$$M_x = \int_A G\theta (y^2 + z^2) = G\theta \underbrace{(I_y + I_z)}_{I_p\ [m^4]}$$

$G I_p$ – torzní tuhost

θ – zkroucení

Vztahy pro rovnoměrné kroucení ($\Theta = konst$)

zkroucení $\Theta = \frac{d\varphi}{dx}$ změna natočení

$\frac{dM_x}{dx} = 0 = m_x$

$\longrightarrow M_x = G I_k \Theta$

$G I_k \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$

I_k – moment tuhosti ve volném kroucení

pro kruhový průřez ... $\frac{d}{dx}\left(G I_p \frac{d\varphi}{dx}\right) + m_x = 0$

Pro cvičení:

úzký obdélník

$$I_k \doteq \frac{1}{3} b^3 h \left(1 - 0{,}63 \frac{b}{h}\right)$$

$$\tau_{max} \doteq \frac{M_x}{I_k} b$$

tenkostěnný průřez

OTEVŘENÝ

$$I_k = \sum_i \frac{1}{3} \delta_i^3 h_i$$

$$\tau_{max,i} = \frac{M_x}{I_k} \delta_i$$

UZAVŘENÝ

$$I_k = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}}$$

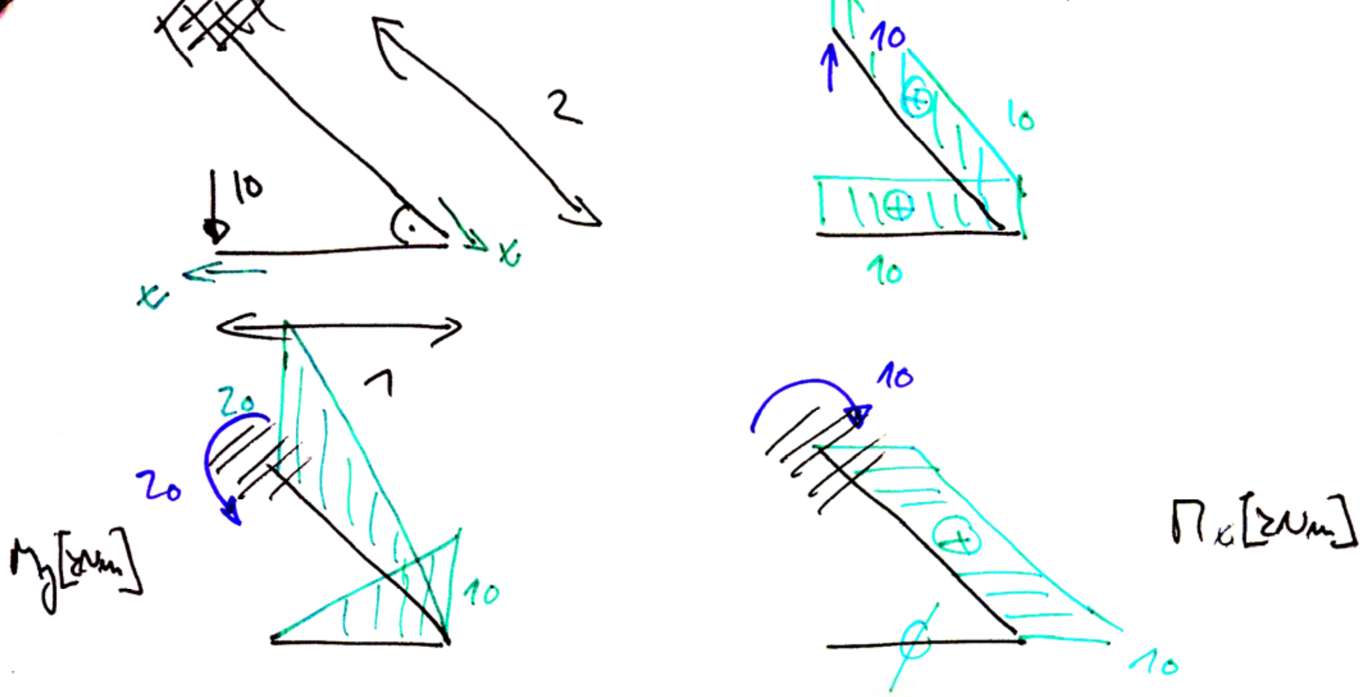
$$\tau_{max,i} = \frac{t_{xs}}{\delta_i}$$

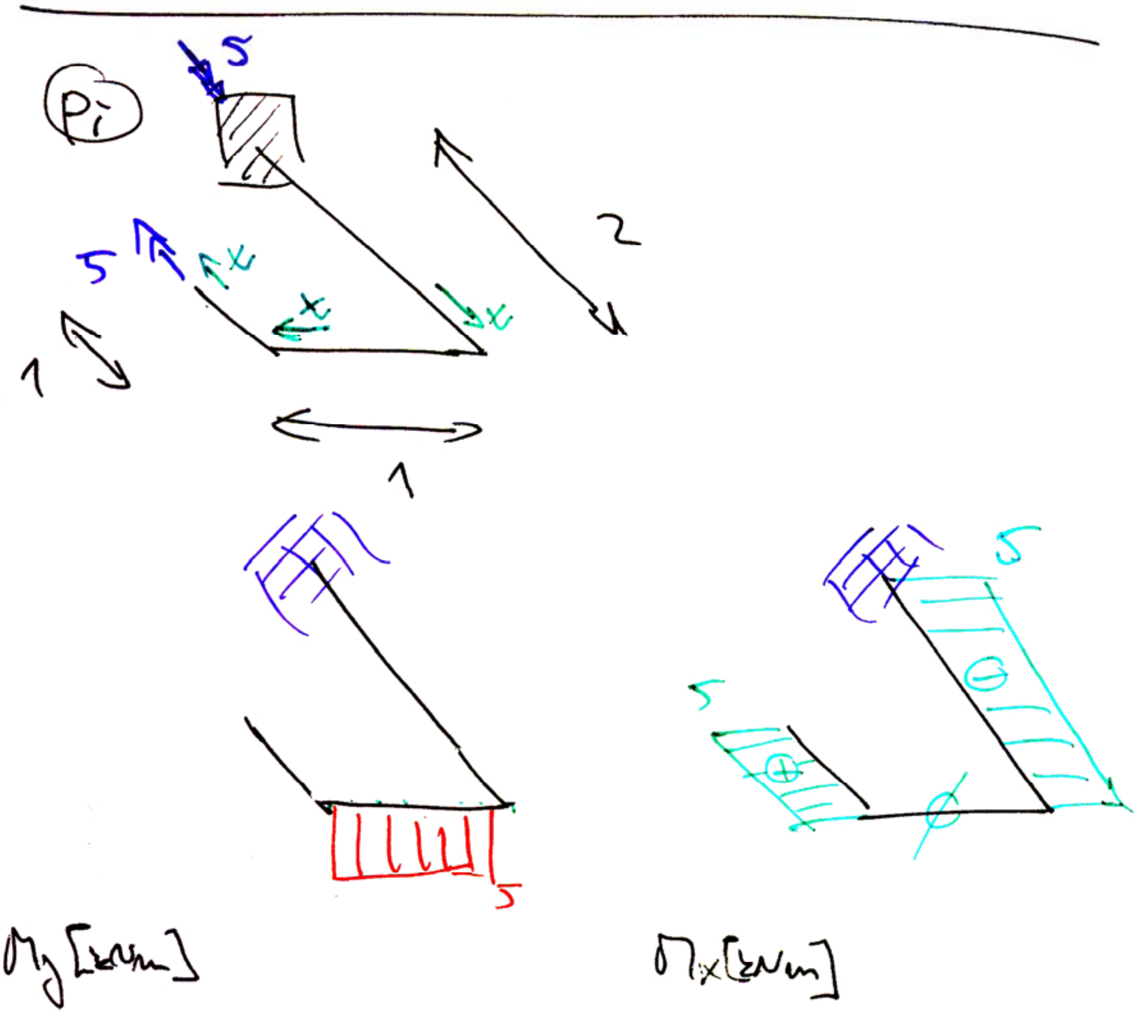
t_{xs} ... smykový tok =

$$= \frac{G \Omega \Theta}{\oint \frac{ds}{\delta_s}} = \underline{\underline{konst}}\ !$$

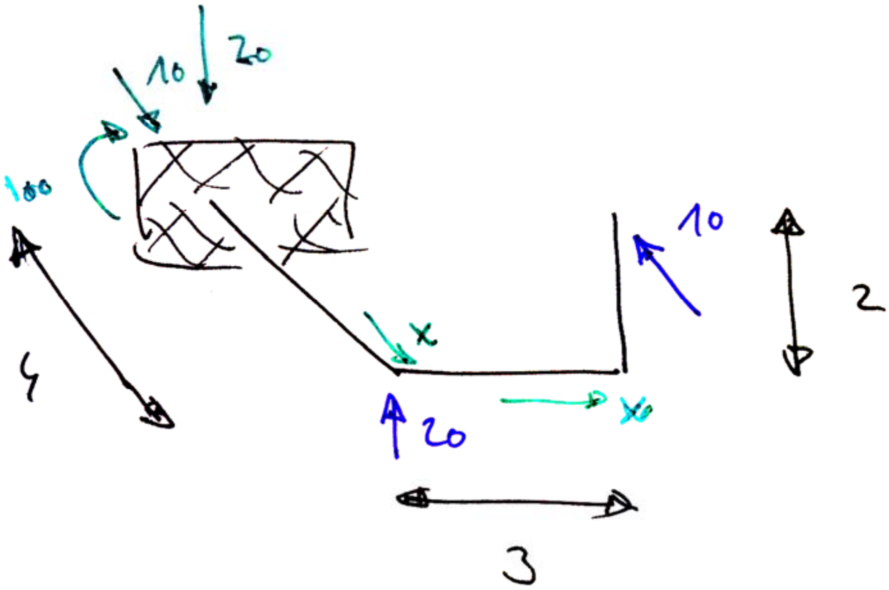
$$M_x = t_{xs} \Omega = \frac{G \Theta \Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta_s}}$$

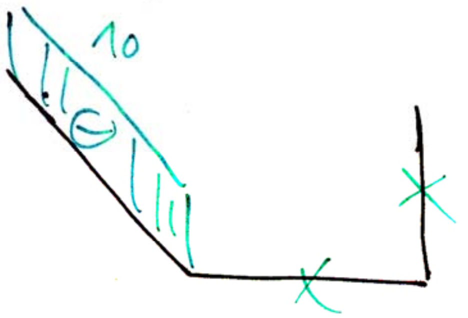
Pope, cv. 11, str. 3



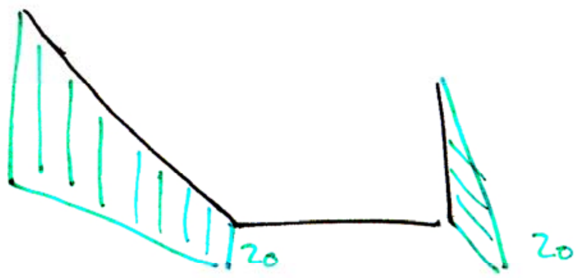


Prpe, cv. 11, str. 4

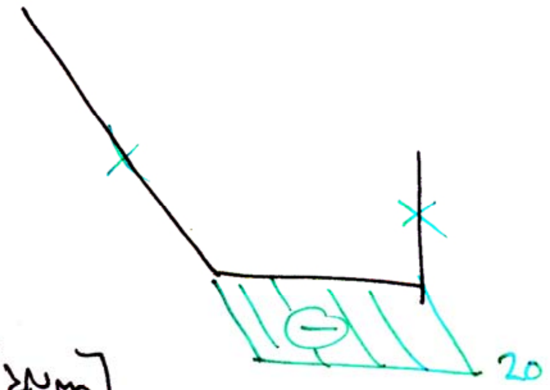




N(x) [kN]



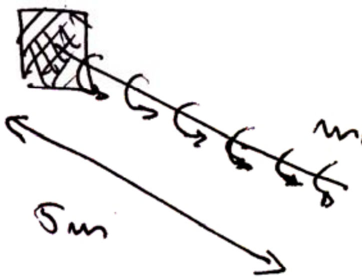
My [kNm]



Mx(x) [kNm]

Př. 1 Určete průběh vnitřních sil

- max. zkroucení + smykové napětí + vykreslení
- natočení na konci konzole



$m_x = \frac{10\,kNm}{m}$

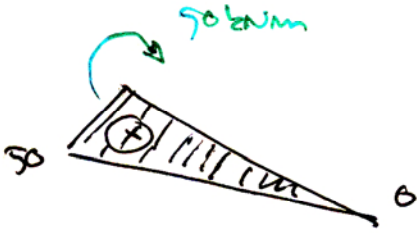
$E = 30\,GPa\,,\ \nu = 0{,}2$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{30}{2(1+0{,}2)} = 12{,}5\,GPa$

$\varnothing = 20\,cm$

$I_p = \pi R^4/2 = \frac{\pi \cdot 0{,}1^4}{2} = 0{,}000157\,m^4$

1) Průběh vnitřních sil



2) $M_x = G I_p \theta$

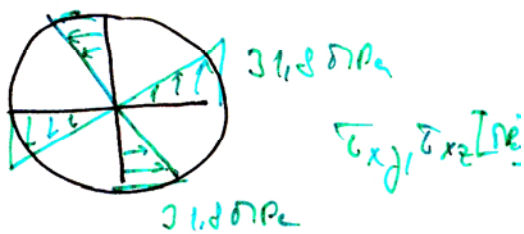
$\rightarrow$ max θ pro max M_x $\Rightarrow \theta_{max} = \frac{M_x}{G I_p} = \frac{50 \cdot 10^3}{12{,}5 \cdot 10^9 \cdot 0{,}000157} =$

jednotky: $\frac{Nm}{\frac{N}{m^2} \cdot m^4} = \frac{1}{m}$

$= \underline{\underline{0{,}025478\ \frac{1}{m}}}$

$\tau_{max} = r \cdot G\theta_{max} = 0{,}1 \cdot 12{,}5 \cdot 10^9 \cdot 0{,}025478 = 3{,}18 \cdot 10^7 = 31{,}8\,MPa$

(beton nepřenese ...)



3) natočení na konci?

$\varphi = \int_0^L \theta\, dx = \frac{1}{G I_p} \int_0^L M_x(x)\, dx$

$M_x(x) = 50 - 10 \cdot x$

$\varphi = \frac{1}{G I_p} \left[50x - \frac{10x^2}{2} \right]_0^L = \frac{(50L - 10L^2/2) \cdot 10^3}{G I_p} =$

$= \frac{(50 \cdot 5 - 5^3) \cdot 10^3}{12{,}5 \cdot 10^9 \cdot 0{,}000157} = 0{,}063694\,rad = \underline{\underline{63{,}7\,mrad}}$

Prpe (cv. 11, str. 6

(PT)

(kruh z př. 1 ... $S = \pi r^2 = 3{,}14 \cdot 10^{-2}\,m^2$)

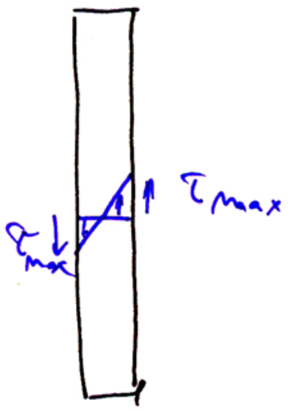
② Určete max smykové napětí v průřezu, který má ▯ tvar

$b = 52\ mm \qquad h = 600\ mm \qquad M_k = 50\,kNm$

$$I_z \doteq \frac{1}{3} b^3 h \left(1 - 0{,}63 \frac{b}{h}\right) = \frac{52^3 \cdot 600}{3}\left(1 - 0{,}63 \frac{52}{600}\right) = 2{,}659 \cdot 10^7\,mm^4$$

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{I_z} \cdot b = \frac{50 \cdot \cancel{10^3}}{2{,}659 \cdot \underbrace{10^7 \cdot 10^{-12}}_{10^{-5}}} \cdot 52 \cdot \cancel{10^{-3}} = 9{,}778 \cdot 10^7\,Pa = \underline{\underline{97{,}8\,MPa}}$$

... cca 3× větší napětí



P1 ◯ vs. ◯

průměr D (poloměr R) tloušťka t

ZADÁNÍ: Určete poměr tuhostí I_k a maximálních napětí τ_{xs} u uzavřené a otevřené kruhové trubky

◯

$$I_k = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta s}} \qquad \Omega = 2 \cdot \pi \cdot \left(R - \frac{t}{2}\right)^2$$

$$\oint \frac{ds}{\delta s} = \frac{1}{t} \cdot 2\pi \left(R - \frac{t}{2}\right)$$

$$I_k = \frac{4\pi^2 \left(R - \frac{t}{2}\right)^4 \cdot t}{2\pi \left(R - \frac{t}{2}\right)} = 2\pi t \left(R - \frac{t}{2}\right)^3 = I_k^1$$

$$M_x = t_{xs} \cdot \Omega \Rightarrow t_{xs} = \frac{M_x}{\Omega} = \frac{M_x}{2\pi \left(R - \frac{t}{2}\right)^2}$$

$$\tau = t_{xs} / t = \frac{M_x}{2\pi t \left(R - \frac{t}{2}\right)^2} = \tau_1$$

Ο

$$I_k = \sum \frac{1}{3} t^3 h = \frac{1}{3} t^3 2\pi \left(R - \frac{t}{2}\right) = I_k^2$$

$$\frac{I_k^1}{I_k^2} = \frac{2\pi t \left(R - \frac{t}{2}\right)^3}{\frac{1}{3} \cdot 2\pi t^3 \left(R - \frac{t}{2}\right)} = \frac{3 \left(R - \frac{t}{2}\right)^2}{t^2}$$

pro $R = 0{,}2\,m$, $t = 0{,}005\,m$

$$\frac{I_k^1}{I_k^2} = 4680{,}75$$

pro $R = 0{,}2\,m$, $t = 0{,}02\,m$

$$\frac{I_k^1}{I_k^2} = 270{,}75$$

$$\tau = \frac{M_x}{I_k} \cdot \delta = \frac{M_x t}{\frac{1}{3} t^3 2\pi \left(R - \frac{t}{2}\right)} =$$

$$= \frac{3 \cdot M_x}{2 t^2 \pi \left(R - \frac{t}{2}\right)} = \tau_2$$

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\frac{3 \cancel{M_x}}{\cancel{2 t^2 \pi \left(R - \frac{t}{2}\right)}}}{\frac{\cancel{M_x}}{\cancel{2\pi t} \left(R - \frac{t}{2}\right)^{\cancel{2}}}} = \frac{3 \left(R - \frac{t}{2}\right)}{t}$$

pro $R = 0{,}2\,m$, $t = 0{,}005\,m$

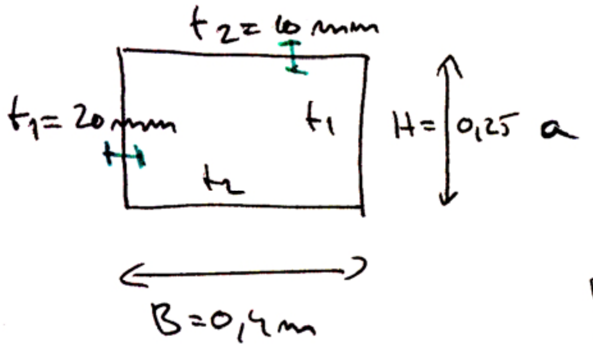
$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = 118{,}5$$

$R = 0{,}2\,m$ $t = 0{,}02\,m$

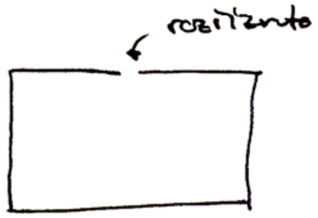
$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = 28{,}5$$

PT - kroucení uzavřeného a otevřeného tenkostěnného průřezu

Porovnejte: τ_{max}, $\Delta\varphi$, rozložení napětí pro profily:



a



$E = 210$ GPa $\quad L = 6$ m

$\nu = 0{,}3 \quad M_k = 100$ kNm

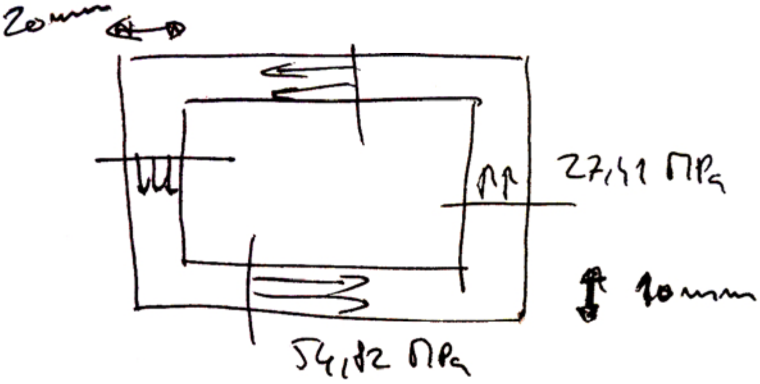
① uzavřený průřez

a) $M_k = t_{xs} \cdot \Omega \qquad \Omega = (0{,}4 - 0{,}02)(0{,}25 - 0{,}01) \cdot 2 = 0{,}1824 \text{ m}^2$

$$\rightarrow t_{xs} = \frac{M_k}{\Omega} = \frac{100 \cdot 10^3}{0{,}1824} = 548246 \ \frac{N}{m} \qquad \tau_{xy} = \frac{t_{xs}}{t_2} = \frac{548246}{0{,}01} = 54{,}82 \cdot 10^7 \text{ Pa} =$$

$$= 54{,}82 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = \frac{t_{xs}}{t_1} = \frac{548246}{0{,}02} = 2{,}741 \cdot 10^7 \text{ Pa} = 27{,}41 \text{ MPa}$$



NEJVĚTŠÍ NAPĚTÍ V NEJTENČÍ ČÁSTI

$$I_2 = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}} = \frac{0{,}1824^2}{110} = 0{,}000302 \text{ m}^4$$

b) $\Delta\varphi$

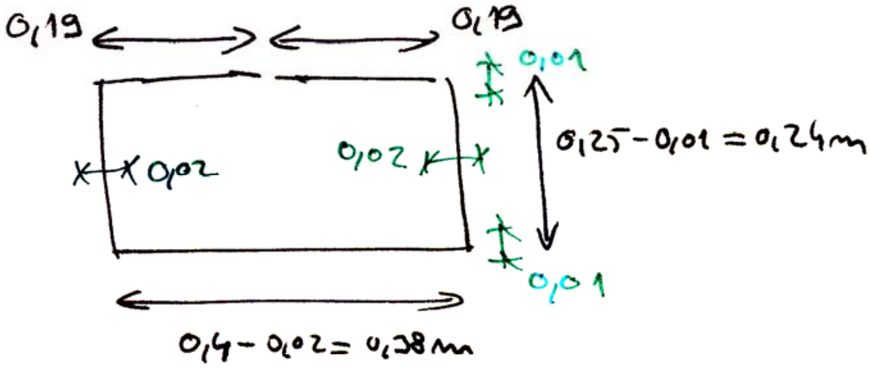
$$t_{xs} = \frac{G \Omega \theta}{\oint \frac{ds}{\delta s}} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{210 \cdot 10^9}{2(1+0{,}3)} = 80{,}77 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

$$\oint \frac{ds}{\delta s} = 2 \cdot \left(\frac{0{,}42}{0{,}01} + \frac{0{,}26}{0{,}02} \right) = 110$$

$$\rightarrow \theta = \frac{t_{xs} \oint \frac{ds}{\delta s}}{G \Omega} = \frac{548246 \cdot 110}{80{,}77 \cdot 10^9 \cdot 0{,}1824} = 0{,}004093 \ 1/\text{m}$$

$$\varphi = \theta \cdot L = 0{,}004093 \cdot 6 = 0{,}024561 \text{ rad} = 24{,}561 \text{ mrad}$$

② Otevřený průřez



$$I_k = \sum_i \frac{1}{3} \delta_i^3 h_i = \frac{2 \cdot 0{,}01^3 \cdot 0{,}19 + 2 \cdot 0{,}02^3 \cdot 0{,}24 + 0{,}01^3 \cdot 0{,}38}{3} =$$

$$= 1{,}53 \cdot 10^{-6}\ m^4$$

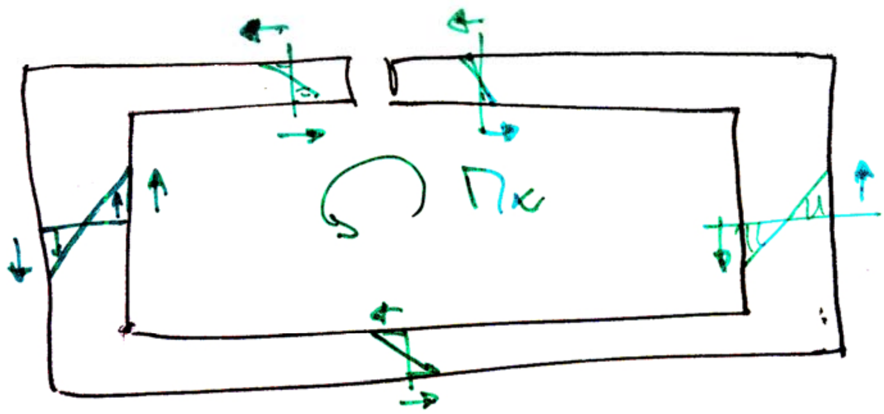
ve stěně tl. 0,01 m

$$\tau = \frac{M_x}{I_k} \delta = \frac{100 \cdot 10^3}{1{,}53 \cdot 10^{-6}} \cdot 0{,}01 = 6{,}536 \cdot 10^8\ Pa = 653{,}6\ MPa$$

tl. 0,02

$$\tau = \frac{M_x}{I_k} \cdot \delta = \frac{100 \cdot 10^3}{1{,}53 \cdot 10^{-6}} \cdot 0{,}02 = 1{,}307 \cdot 10^9\ Pa = 1307\ MPa$$

$\tau \gg \tau_0$ (daný průřez při běžné hodnotě pevnosti oceli není schopen namáhání přenést)



NEJVĚTŠÍ NAPĚTÍ V NEJTLUSTĚJŠÍ ČÁSTI PRŮŘEZU

$$M = G I_k \theta$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{M}{G I_k} = \frac{10 \cdot 10^3}{80{,}77 \cdot 10^9 \cdot 1{,}53 \cdot 10^{-6}} = 0{,}8092 \ \frac{1}{m}$$

$$\varphi = L \cdot \theta = 6 \cdot 0{,}8092 = 4{,}85523 \text{ rad} \ !!$$