Z předmětu PRPE:

Navierova–Bernoulliova hypotéza

DŮSLEDEK
- → průřez zůstává i po deformaci rovinný
- → průřez zůstává i po deformaci kolmý na deformovanou střednici

ZÁKLADNÍ ROVNICE PRO OHÝBANÉ PRUTY

$\boxed{\text{PRŮHYB}}$ $w(x)$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)=f_z$$

$\boxed{\text{ZATÍŽENÍ}}$ $f_z(x)$

GEOMETRICKÉ ROVNICE

$$\varkappa=-\frac{d^2w}{dx}\quad\left(\varkappa=\frac{d\varphi}{dx};\ \varphi=-\frac{dw}{dx}\right)$$

STATICKÉ ROVNICE

$$-\frac{d^2M(x)}{dx^2}=f_z$$

$\boxed{\text{KŘIVOST}}$ $\varkappa(x)$

FYZIKÁLNÍ RCE

$$M(x)=EI\cdot\varkappa(x)$$

$\boxed{\text{OHYBOVÝ MOMENT}}$ $M(x)$

SCHWEDLEROVY VĚTY

– odvozeno z podmínek rovnováhy na segmentu prutu

$$\frac{dN(x)}{dx}+f_x(x)=0\qquad(\text{tah}-\text{tlak})$$

(1) $$\frac{dQ(x)}{dx}+f_z(x)=0\qquad(\text{svislá podmínka rovnováhy})$$

(2) $$\frac{dM(x)}{dx}-Q(x)=0\qquad(\text{z momentové podmínky rovnováhy})$$

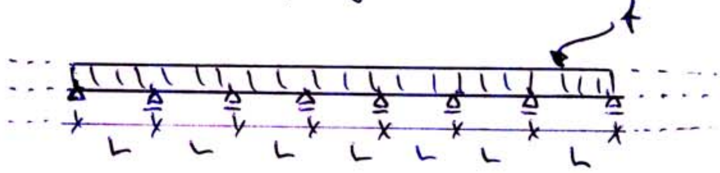
→ využíváme při hledání extrémních momentů

z (1) + (2): $$\frac{d^2(M(x))}{dx^2}+f_z(x)=0$$

Příklad 1

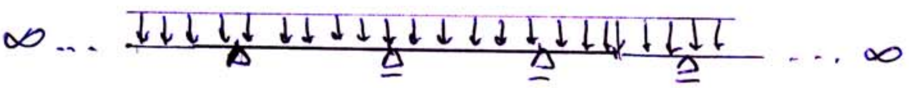
- určit průběh ohybových momentů a posouvajících sil na zadané konstrukci
- vypočítat hodnotu maximálního průhybu

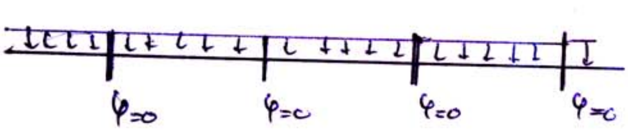
geometrie konstrukce:
= "nekonečný" spojitý nosník

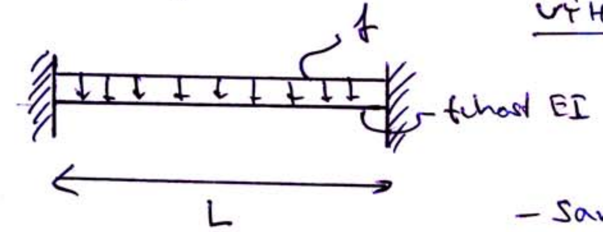


Řešení:

konstrukci zjednodušíme: nad podporami bude nulové pootočení, které lze nahradit "vetknutím" tj



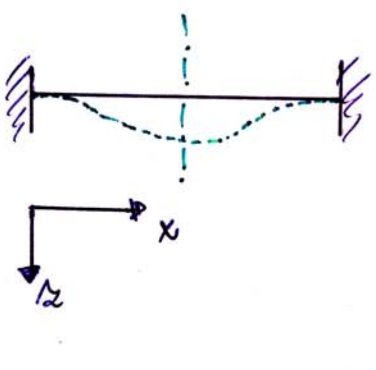




VÝHODA: MNOHOKRÁT (STATICKY) NEURČITOU KONSTRUKCI JSME NAHRADILI 3x NEURČITOU KCÍ

- Samozřejmě lze tohle uvažovat jen za předpokladu konstantního zatížení a stejných vzdáleností podpor

Zavedeme souřadný systém a určíme geometrické okrajové podmínky (=kinematické)



$w(0)=0$ (1)

$w(L)=0$ (2)

$w'(0)=0$ (3)

$w'(L)=0$ (4)

V tomto příkladu budeme postupovat podrobně, nejprve využijeme

A) statické rovnice

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -fz(x) = -f$$

zatížení je po délce prutu konstantní

$$\Rightarrow Q(x) = \int -f\,dx = -fx + C_1$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \Rightarrow M(x) = \int Q(x)\,dx$$

$$M(x) = -\frac{fx^2}{2} + C_1x + C_2$$

B) fyzikální rovnice

$$M(x) = \varkappa(x) \cdot EI$$

$$\Rightarrow \varkappa(x) = \frac{1}{EI}\left[-\frac{fx^2}{2} + C_1x + C_2\right]$$

C) geometrické rovnice

$$\varkappa(x) = \frac{d\varphi}{dx} \Rightarrow \varphi(x) = \int \varkappa(x)\,dx$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI}\left[-\frac{fx^3}{6} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3\right]$$

využijeme okrajovou podmínku (3) $w'(0) = 0 = -\varphi(0)$

$$\rightarrow C_3 = 0$$

z okrajové podmínky (4): $\varphi(L) = 0$

$$-\frac{fL^3}{6} + \frac{C_1L^2}{2} + C_2L = 0$$

$$C_2 = \frac{fL^2}{6} - \frac{C_1L}{2} \quad (A)$$

$$\varphi(x) = -\frac{dw(x)}{dx}$$

$$\rightarrow w(x) = -\int \varphi(x)\,dx = \frac{1}{EI}\int \frac{fx^3}{6} - \frac{C_1x^2}{2} - x \cdot \underbrace{\left(fL^2/6 - C_1L/2\right)}_{\text{dosazeno z (A) za } C_2} dx$$

$$w(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{fx^4}{24} - \frac{C_1x^3}{6} - \frac{fx^2L^2}{12} + \frac{C_1x^2L}{4} + C_4\right]$$

z okrajové podmínky (1) $w(0)=0 \Rightarrow C_4 = 0$

z poslední podmínky (2) $w(L)=0$ vyřešíme C_1

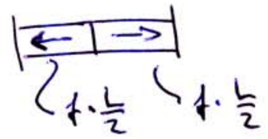
$$\frac{fL^4}{24} - \frac{fL^4}{12} - \frac{C_1L^3}{6} + \frac{C_1L^3}{4} = 0$$

$$-\frac{1}{24}fL^4 + \frac{C_1L^3}{12} = 0 \quad \Rightarrow C_1 = \frac{fL}{2}$$

dosazením C_1 do (A): $C_2 = \frac{fL^2}{6} - \frac{C_1L}{2} = \frac{fL^2}{6} - \frac{fL^2}{4} = -\frac{1}{12}fL^2$

Dosazením do základních rovnic pro $Q(x)$, $M(x)$, $\varphi(x)$, $w(x)$:

$Q(x) = -f(x)\,x + \frac{fL}{2}$ (kontrola – zatížení se rozdělí na polovinu, tj



$$M(x) = -\frac{fx^2}{2} + \frac{fLx}{2} - \frac{1}{12}fL^2$$

$$M(0) = M(L) = -\frac{1}{12}fL^2 \qquad M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{24}fL^2$$

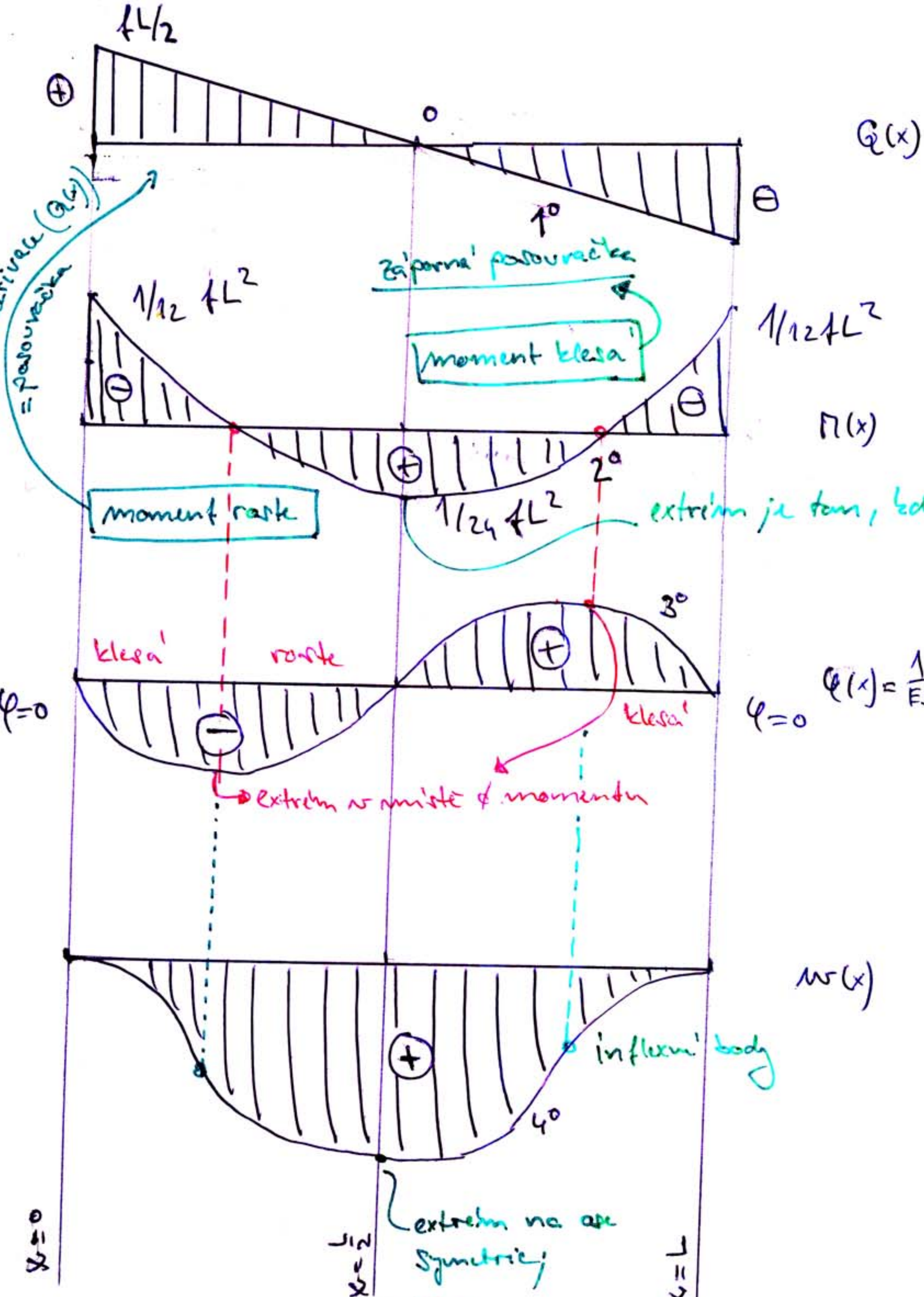
$$w(x) = \frac{f}{24EI}\left[x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2\right]$$ (kontrola $w(0)=0$ $w(L)=0$)

extrémní průhyb je díky symetrii konstrukce (kde je nulové pootočení)

pro $x = \frac{L}{2}$

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{fL^4}{384EI}$$

Vykreslení vnitřních sil

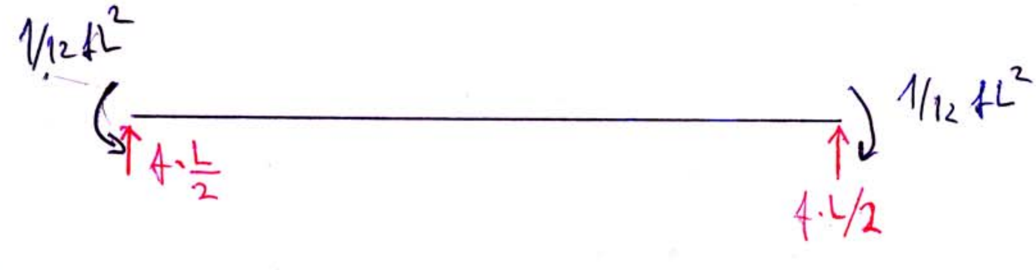


$$\varphi(x) = \frac{1}{EI}\left[-\frac{fx^3}{6} + \frac{fLx^2}{4} - \frac{1}{12}fL^2x\right]$$

$\varphi\left(\frac{L}{2}\right) = 0$

$w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{fL^4}{384EI}$

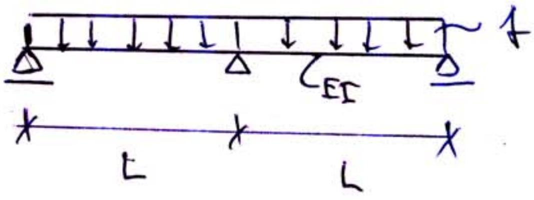
Reakce v podporách



Př. 2

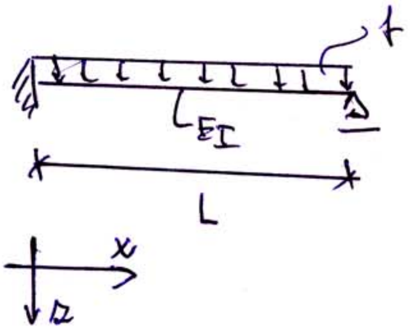
Stejné zadání, úkolem je kromě jiného určit polohu a velikost max M

Geometrie úlohy



Řešení: Je zadaná symetrická konstrukce symetricky zatížená.
Průhyby budou symetrické a pootočení antisymetrické!
Nad podporou na ose symetrie bude $\varphi = 0$

=> konstrukci zjednodušíme, zavedeme souřadný systém



okrajové podmínky:

$w(0) = 0$ (1)

$w'(0) = 0$ (2)

$w(L) = 0$ (3)

$w''(L) = 0$ (4)

Nyní budeme postupovat rychleji. Průhyb je dán: $w(x) = \iint \frac{\iint f_z(x)\,dx\,dx}{EI}\,dx\,dx$

$$\Rightarrow w(x) = \frac{fx^4}{24EI} + C_1x^3 + C_2x^3 + C_3x + C_4$$

$C_4 = 0$ (z podmínky (1))

$C_3 = 0$ (— " — (2))

$f = \text{const}$

$$w(x) = \frac{fx^4}{24EI} + C_1x^3 + C_2x^2 \rightarrow \text{podmínka (3) } w(L) = 0$$

$$\frac{fL^4}{24EI} + C_1L^3 + C_2L^2 = 0$$

2. deriv.

$$w''(x) = \frac{fx^2}{2EI} + 6C_1x + 2C_2 \rightarrow \text{podmínka (4) } w''(L) = 0$$

$$\frac{fL^2}{2EI} + 6C_1L + 2C_2 = 0$$

$$C_1 = -\frac{5fL}{48EI}$$

$$C_2 = \frac{3fL^2}{48EI}$$

Průhyb

po dosazení

$$w(x) = \frac{fx^4}{24} - \frac{5fL}{48EI}x^3 + \frac{fL^2}{16EI}x^2$$

kontrola

$$w(L) = \frac{fL^4}{24} - \frac{5fL^4}{48EI} + \frac{3fL^4}{48EI} = \emptyset$$

Momenty

$$M(x) = EI\varkappa(x) = -EI w''(x) = -\frac{fx^2}{2} + \frac{5}{8} fLx - \frac{1}{8} fL^2$$

kontrola

$$M(L) = -\frac{fL^2}{2} + \frac{5}{8} fL^2 - \frac{1}{8} fL^2 = \emptyset$$

$$M(0) = -\frac{3}{24} fL^2 = -\frac{1}{8} fL^2$$

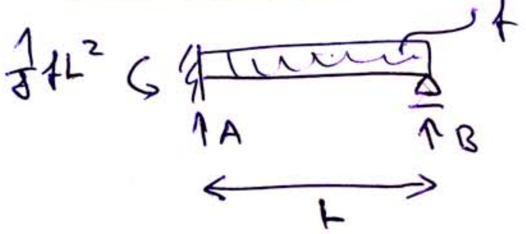
Poloha extrému ; derivujeme

$$M'(x) = -fx + \frac{5}{8} fL \Rightarrow x = \frac{5}{8} L$$

dosadíme do funkce pro $M(x)$

$$M\left(\frac{5}{8}L\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot fL^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2 fL^2 - \frac{1}{8} fL^2 = \frac{9}{128} fL^2$$

Výpočet reakcí:

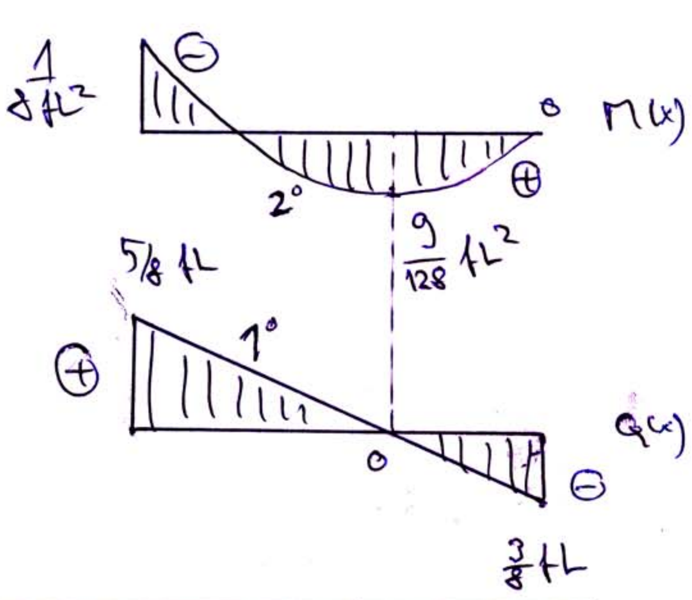


momentové podmínka kolem vetknutí!

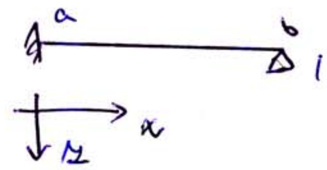
$$\frac{1}{8} fL^2 + BL - \frac{fL^2}{2} = 0$$

$$B = \frac{3}{8} fL$$

$$A = fL - \frac{3}{8} fL = \frac{5}{8} fL$$



$\boxed{\text{Pr 3}}$ Zadaný nosník:



, na levé straně předepsané pootočení $\bar{\varphi}$

Tvar zdeformované konstrukce:

Určit:
- průběh sil
- poloha max. průhybu, velikost

---

okrajové podmínky

$w(0) = 0 \quad (1)$

$w'(0) = -\bar{\varphi}_a \quad (2)$

$w(L) = 0 \quad (3)$

$w''(L) = 0 \quad (4)$

$f = 0$

dif. rovnici ohybové čáry odintegrujeme

$w(x) = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$

z (1) $c_4 = 0$

derivujeme: $w'(x) = 3c_1 x^2 + 2c_2 x + c_3$; $w''(x) = 6c_1 x + 2c_2$

z (2) $c_3 = -\bar{\varphi}_a$

z (3) $w(L) = 0 = c_1 L^3 + c_2 L^2 - \bar{\varphi}_a L \Rightarrow c_1 = \dfrac{\bar{\varphi}_a L - c_2 L^2}{L^3} = \dfrac{\bar{\varphi}_a - c_2 L}{L^2}$

z (4) $w''(L) = 0 = 6c_1 L + 2c_2$

$\Rightarrow c_1 = \dfrac{-\bar{\varphi}_a}{2L^2} \quad c_2 = \dfrac{3\bar{\varphi}_a}{2L}$

po dosazení integračních konstant do výše uvedených vztahů:

$$w(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x$$

$$w(x) = -\frac{\bar\varphi_a}{2L^2}x^3 + \frac{3\bar\varphi_a}{2L}x^2 - \bar\varphi_a x$$

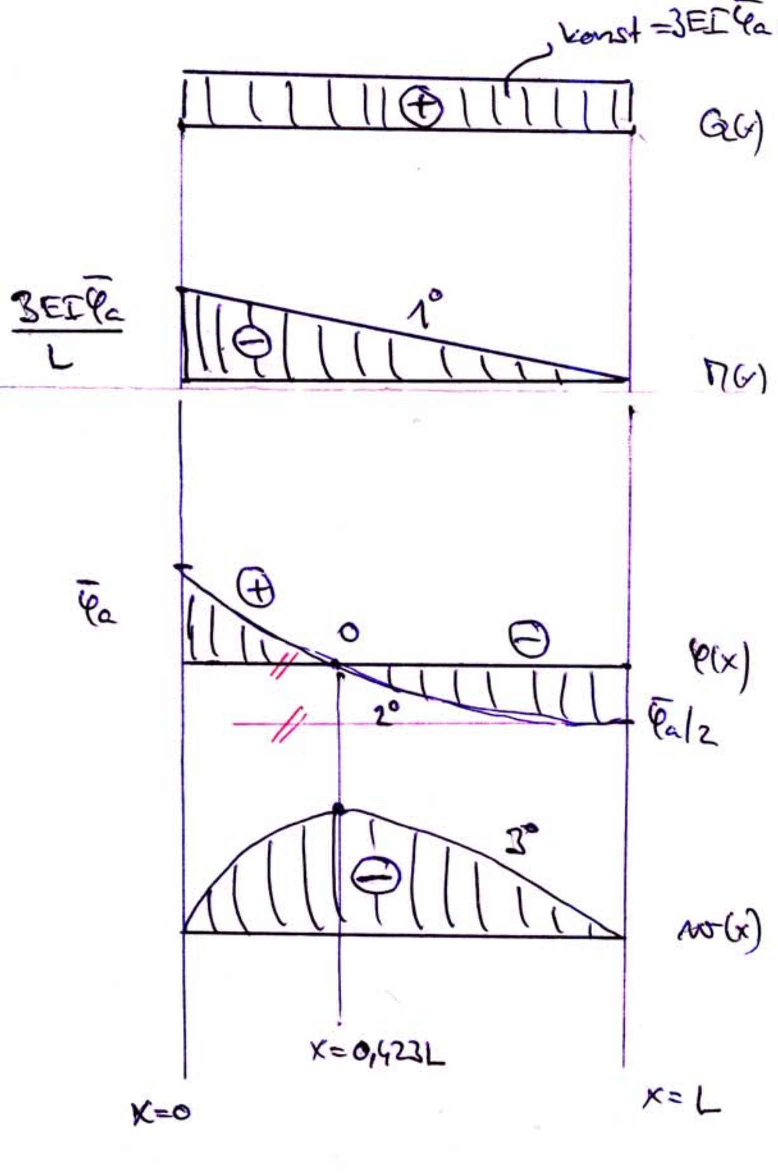
$$w'(x) = -\frac{3\bar\varphi_a x^2}{2L^2} + \frac{3\bar\varphi_a}{L}x - \bar\varphi_a$$

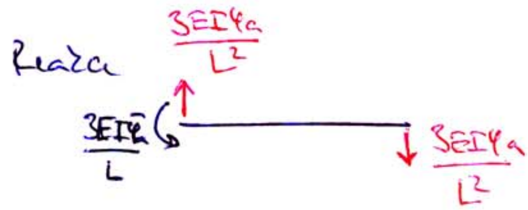
$$w''(x) = -\frac{3\bar\varphi_a x}{L^2} + \frac{3\bar\varphi_a}{L}$$

$$\varphi(x) = -w'(x) = \frac{3\bar\varphi_a x^2}{2L^2} - \frac{3\bar\varphi_a}{L}x + \bar\varphi_a \qquad \varphi(L) = \frac{3}{2}\bar\varphi_a - 3\bar\varphi_a + \bar\varphi_a = -\bar\varphi_a/2$$

$$M(x) = EI\kappa(x) = -EI\,w''(x) = EI\left(\frac{3\bar\varphi_a x}{L^2} - \frac{3\bar\varphi_a}{L}\right)$$

$V(x) = EI \cdot 3\bar\varphi_a/L^2$ (derivace $M(x)$ nebo z podmínek rovnováhy)
$(Q(x))$





Maximální průhyb zjistíme z podmínky nulového pootočení

Kvadratická rovnice má 2 kořeny

$$x_1 = \frac{\sqrt{3}+3}{3}L \qquad x_2 = \frac{-\sqrt{3}+3}{3}L$$

$(x_1 > L)$

$x_2 \doteq 0{,}423L$