# VĚDA A VÝZKUM

SCIENCE AND RESEARCH

# ELASTICKÉ VLASTNOSTI BETONU Z VÍCEÚROVŇOVÉ HOMOGENIZACE ELASTIC PROPERTIES OF CONCRETE FROM MULTISCALE HOMOGENIZATION

## Vít Šmilauer, Zdeněk Bittnar

Nové poznatky v mikromechanice, modelování a experimentech umožňují sofistikovanou předpověď elastických vlastností betonových kompozitů. Schopnosti analytických a numerických homogenizací jsou předvedeny na reálných příkladech cementových past, malt a betonů, včetně jejich raných stádií. Sophisticated prediction of elastic properties within concrete composites is possible due to new findings in micromechanics, modeling and experiments. Performance of analytical and numerical homogenization methods is validated on real examples of cement pastes, mortars and concrete, including their

Elastické vlastnosti betonu stojí z inženýrského pohledu daleko za jeho pevností, smrštěním, či dotvarováním. Přitom právě ony rozhodují o napětích při vynucených přetvořeních, vytváření makrotrhlin vlivem smršťování nebo průhybech konstrukce. Experimentální měření elastických vlastností betonu během jeho zrání je obecně zdlouhavé, citlivé na okolní podmínky a problematické zejména v raných stadi-

ích během tvrdnutí. Podobné nedostatky se proto snažíme nahradit levnějšími, opakovatelnými a výrazně rychlejšími simulacemi, které umožňují zkoumat i raná stádia, měnit parametry a zkoumat jejich vliv. Pro starší beton byla v minulosti otestována celá řada modelů pro získání elastických vlastností betonu [1], které však často neuvažovaly přechod betonu za stavu suspenze do pevné kompozitní struktury, či neměly jasnou vazbu s mikrostrukturou betonu, např. vztah mezi modulem pružnosti a pevností. Cílem článku je ukázat spojení modelu hydratace cementové pasty s mikromechanickými modely, které vedou až na úroveň betonu a umožňují lépe pochopit, co se mechanicky odehrává na nižších úrovních.

Na rozdíl od pevnosti, elastické chování daleko více vypovídá o struktuře a mikrostruktuře složek betonu a jejich vzájemném působení. Celosvětový trend zkoumání materiálů na nižších úrovních se nevyhnul ani betonu, kdy lze sestoupit až na molekulární úroveň, např. na vodu vázanou v C-S-H gelech, která se zkoumá ve zlomkách nanometrů. Pro modelování elastických vlastností betonu nám postačí sestoupit na úroveň mikrometru a postupovat směrem vzhůru. Rozdělení na jednotlivé úrovně podle obr. 1 je výhodné nejen pro potřeby simulace, ale i pro následnou homogenizaci elastických vlastností.

Výhodou víceúrovňového přístupu je skutečnost, že při pozorování na vyšší úrovni se původní heterogenita z nižší úrovně zhomogenizuje. Například pro úroveň cementové malty lze rozlišit písek a cementovou pastu. Detaily C-S-H úrovně již na tomto rozlišení nevidíme, hrubé kamenivo z úrovně betonu je naopak nad tímto rozlišením. Heterogenita samotného betonu se projevuje na všech čtyřech úrovních:

C-S-H úroveň je nejméně prozkoumaná, a to zejména díky malým rozměrům. Chemické složení se mění v závislosti na čase, vodním součiniteli (v/c), teplotě, či množstvím okolní vody. Stechiometrický vzorec se pohybuje v okolí C<sub>1.7</sub>SH<sub>4</sub>. Nejnovější model dle Jenningse [2] předpovídá navíc dvě charakteristické morfologie, které jsou vytvořeny různým uspořádání globulí jako stavebních jednotek, s průměrem několika desítek nanometrů (obr. 1). Vlivem okolních tlaků, které mohou na této úrovni dosahovat stovek MPa, může dojít ke kolapsu nízkohustotní formy (LD - low density) na vysokohustotní (HD – high density). Změna přináší vyšší elastickou tuhost, ale také nižší propustnost či měřitelný povrch. Lze říci, že LD forma vzniká v raných stádiích hydratace cementu, kdy je dostatek místa pro formaci C-S-H a dostatek vody a postupně se mění na HD formu vlivem omezeného prostoru v mikrostruktuře cementové pasty a vlivem vysychání. Je známo, že většinu vlastností (elasticita, dotvarování,

- Obr. 1 Čtyřúrovňová mikrostruktura betonu a odpovídající reprezentace s charakteristickými délkami pro analytické a numerické modelování. (Snímky L. Kopecký)
  - g. 1 Four-level microstructure of concrete and corresponding representation with characteristic length for analytical and numerical modeling. (Images L. Kopecký)

| нр           |  |                 | pasta<br>zrno<br>pisku<br>małta | kamenivo<br>homogenni medium |
|--------------|--|-----------------|---------------------------------|------------------------------|
| 10 nm – 1 µm |  | 1 μm – 100 μm   | 1 mm – 1 cm                     | 1 cm – 1 dm                  |
| C-S-H úroveň |  | Cementová pasta | Cementová malta                 | Beton                        |
|              |  |                 |                                 |                              |

### VĚDA A VÝZKUM SCIENCE AND RESEARCH

křehkost, teplotní odolnost) cementové pasty určuje právě C-S-H úroveň, která tvoří běžně více než polovinu objemu ve vyzrálé pastě.

Protože LD a HD forma mají odlišné elastické vlastnosti (tab. 1), je nutné tuto změnu modelovat. Takový model pro simulaci zastoupení C-S-H forem byl zhotoven na úrovni cementové pasty [1], výsledky objemového zastoupení na obr. 2. Není přímo známo rozložení globulí na C-S-H úrovni, ale rozložení HD a LD forem až na úrovni cementové pasty.

Cementová pasta představuje úroveň, kde se pro účely elastické homogenizace odehrává většina změn během tvrdnutí. Model CEMHYD3D, který popisuje hydrataci cementu na diskrétní mikrostruktuře, byl představen dříve v časopise BETON TKS 6/2003. Nejmenší stavební jednotkou je voxel, který reprezentuje chemickou látku typicky s rozlišením 1 x 1 x 1 µm. Definují se základní chemické rovnice a pravděpodobnosti rozpouštění, nukleace a reakce. Počáteční mikrostruktura v sobě zahrnuje křivku zrnitosti cementu, jeho množství a mineralogické složení, sádrovec, siliku apod. Hydratace probíhá za libovolně zadané teploty, v režimu saturovaného či uzavřeného vodního prostředí. V diskrétních časových krocích je tak možné popsat vývoj mikrostruktury pasty. Obr. 3 zachycuje typické objemové zastoupení chemických látek pro v/c = 0,4. Z modelu CEMHYD3D však získáváme navíc cennou informaci ve formě prostorového rozložení chemických látek, která se ukáže být klíčová pro popis počátečních elastických vlastností pasty. Zajímá nás totiž, které zrnko cementu je s čím spojeno, což má vliv na tuhost mikrostruktury. Z názoru je zřejmé, že na počátku zrnka cementu spojena nebudou, čili pasta se chová jako suspenze a na konci tvrdnutí bude vše spojeno dohromady.

Cementová malta zahrnuje již zhomogenizovanou cementovou pastu, písek a přechodovou zónu okolo zrn písku. Závažný problém představuje přechodová zóna, která vyplývá převážně z nižšího zastoupení větších zrn cementu okolo povrchu písku. Velká zrna cementu nemohou pronikat zrnem písku a malá zrna musí vyplnit vzniklou porozitu. Přídavek jemných částeček (silika, mikromletý vápenec) tuto porozitu výrazně redukuje, na některých maltách nebyla tak přechodová zóna vůbec naměřena. Typická tloušťka přechodové vrstvy se pohybuje do 40  $\mu m.$ 

Beton je nejvyšší úrovní homogenizace. Podobně jako v případě malty se i zde objevuje přechodová zóna kolem kameniva, a to prakticky se stejnou morfologií. Křivost povrchu písku a kameniva je totiž v obou případech výrazně menší než křivost zrn cementu.

#### Homogenizace

Elastická homogenizace představuje teoreticky poměrně jednoduchý inženýrský problém díky své linearitě. Nezáleží ani na velikosti napětí či deformací, ani na historii zatěžování či čase. Za klasický případ takové homogenizace lze uvést nalezení modulu pružnosti ideálního železobetonového průřezu sloupu, který lze nazvat kompozitem. Výztuž i beton přenáší stejnou deformaci, uvažujeme je tedy v paralelním uspořádání a s dokonalým spolupůsobením. Pokud označíme µ jako stupeň vyztužení a moduly pružnosti betonu a oceli  $E_c$  a  $E_s$ , je výsledný ideální modul pružnosti  $E_i = \mu E_s + (1-\mu)E_c$ . V limitních případech je Ei buď roven modulu betonu či oceli.

Nyní uvažujme podobný případ, kdy ocel bude ve formě desky kolmo k ose sloupu. Tloušťka desky bude µ-krát délka sloupu. Jedná se o sériové spojení oceli a betonu, kdy v obou materiálech působí stejná síla, deformace jsou však obecně různé. Výsledný ideální modul pružnosti je  $1/E_i = \mu/E_s + (1-\mu)/E_c$ . Získali jsme tedy dvě meze paralelního a sériového spojení dvou materiálů. Pokud budeme hledat ideální modul pružnosti drátkobetonu se stupněm vyztužení μ, bude výsledný modul pružnosti ležet v intervalu paralelního a sériového uspořádání. Jiné meze nejsou možné. Protože tyto meze mohou být obecně daleko od sebe, je možné zadáním morfologie (tj. přesnějším uspořádáním materiálů) nalézt přímo výsledný zhomogenizovaný modul pružnosti. Uvedený ilustrativní příklad rozšíříme na 3D homogenizaci obecných materiálů:

- uvažujme libovolné množství isotropních materiálů s dokonalým spolupůsobením,
- homogenizace probíhá v prostoru, je třeba znát dvě elastické hodnoty, např. Youngův modul a Poissonovo číslo,
- informaci o uspořádání látek odhadneme z vhodné morfologie (analytické metody), či provedeme analýzu přímo z uspo-



řádání chemických látek v reprezentativním objemu (numerické metody),

 výsledné vlastnosti kompozitu jsou obecně anisotropní, proto je převedeme na isotropní předpokladem stejné vnitřní energie anisotropní a odpovídající isotropní zhomogenizované látky.

Před homogenizací, stejně jako v ilustrativním příkladě, je nutná znalost vnitřních elastických vlastností jednotlivých složek. Pro kamenivo a písek není obtížné tyto elastické vlastnosti zjistit v makroskopických zkouškách. Pro úroveň cementové pasty je však třeba použít nanoindentor, který vtlačuje diamantový hrot do hloubky několika set nm a z odezvy lze usuzovat na elastické vlastnosti chemické látky v okolí vpichu, viz BETON TKS 5/2005 [3]. Tím se teprve nedávno podařilo identifikovat elastické vlastnosti slínkových minerálů, LD a HD C-S-H i ostatních látek, tab. 1. Za povšimnutí stojí velmi tuhé slínkové minerály v cementu (C<sub>3</sub>S, C<sub>2</sub>S, C<sub>3</sub>A,

# Obr. 3 Typické složení pasty během hydratace, v/c = 0,4 Fig. 3 Typical paste composition during hydration, w/c = 0.4



# VEDA A VÝZKUM

# SCIENCE AND RESEARCH

| Chem. látka       | E [GPa] | v [-] | Chem. látka         | E [GPa]  | v [-]    |
|-------------------|---------|-------|---------------------|----------|----------|
| C <sub>3</sub> S  | 135±7   | 0.3   | Voda                | 0.001    | 0.499924 |
| C <sub>2</sub> S  | 130±20  | 0.3   | Portlandit          | 38±5     | 0.305    |
| C <sub>3</sub> A  | 145±10  | 0.3   | C-S-H <sub>LD</sub> | 21.7±2.2 | 0.24     |
| C <sub>4</sub> AF | 125±25  | 0.3   | C-S-H <sub>HD</sub> | 29.4±2.4 | 0.24     |
| Sádrovec          | 30      | 0.3   | FH3                 | 22.4     | 0.25     |

Tab. 1 Vnitřní elastické vlastnosti důležitých látek na úrovni cementové pasty

Tab. 1 Intrinsic elastic properties of important phases at the level of cement paste

 $C_4AF$ ), ze kterých vznikají přibližně čtyřikrát měkčí hydratační produkty. Vodou naplněné kapilární porozitě byla přiřazena velmi malá tuhost, aby byla zajištěna dobrá konvergence homogenizačních metod.

#### PERKOLACE

Cementová pasta se během zrání mění ze stavu suspenze do tvrdé hmoty. Jinými slovy dochází k propojování zrnek cementu s produkty chemických reakcí. To ovšem přináší značné problémy do homogenizace, protože uvažujeme pouze dokonalé spolupůsobení materiálů. Pokud uvážíme v ilustrativním příkladu, že by výztuž vůbec nespolupůsobila s betonem, má to stejný účinek, jako kdyby v průřezu chyběla. Podobně je třeba zacházet s voxely v modelu hydratace, které nespolupůsobí se žádným větším celkem. Typickými představiteli jsou voxely cementového zrnka, jež se vznáší volně ve vodě. Při mechanickém zatížení takové voxely nepřispívají ke smykové tuhosti a v důsledku ani k objemové, protože v mikrostruktuře cementové pasty vždy existují prázdné voxely vlivem chemického smršťování do kterých se deformace

Obr. 4 Perkolace pevných látek cementové pasty, v/c = 0,25

Fig. 4 Solid percolation of cement paste, w/c = 0.25



soustřeďuje. Je tedy možné tyto nepřipojené voxely zaměnit za voxely vody.

Perkolací pevných látek uvažujeme objemový podíl propojených pevných látek k celkovému objemu pevných látek v jednom časovém okamžiku. Typický průběh perkolace pevných látek v závislosti na stupni hydratace a velikosti mikrostruktury je na obr. 4. Opominutím perkolace nemůžeme obecně analyzovat počáteční stadia hydratace. Pro pasty s v/c menším než 0,35 hraje perkolace roli do stupně hydratace 0,3, poté jsou pevné látky téměř propojeny. Topologicky je rozdíl zachycen na obr. 5 krátce po začátku tvrdnutí, kde mikrostruktura pasty z modelu CEMHYD3D projde perkolací. Červené voxely zobrazují C<sub>3</sub>S, modré portlandit a fialové LD C-S-H. Perkolovaná mikrostruktura vstupuje dále do homogenizačních metod.

#### Homogenizační metody

Pro homogenizaci je nezbytné definovat reprezentativní objemový element (RVE), který věrohodně zachycuje mikrostrukturu materiálu. Pro případ cementové pasty je to perkolovaný voxelový výstup mikrostruktur z modelu hydratace jako na obr. 5b). Velikost RVE lze vybrat libovolnou, pro určení elastických vlastností pasty je vhodná velikost alespoň 50 x 50 x 50 μm [1].

První skupinou homogenizačních metod jsou metody analytické, výpočet nevede na větší soustavu rovnic. Postačuje znalost objemového zastoupení jednotlivých chemických látek a jejich vnitřních elastických vlastností. Morfologii můžeme předpokládat např. ve tvaru matrice – inkluze. Metoda Mori-Tanaka [4] je vhodná právě pro popis úrovně C-S-H, kde matrici tvoří LD forma a v ní se vytváří HD forma ve sférickém tvaru inkluzí. Naopak pro úroveň cementové pasty je vhodnější metoda samokonzistentní (self-consistent) [5], která nepředpokládá tvar matrice – inkluze, nýbrž zcela náhodnou morfologii. Pro homogenizaci úrovně malty a betonu se ukázala být vhodná metoda Hervé-Zaoui, která umí zahrnout přechodovou zónu okolo kameniva [1].

Zjevnou nevýhodou analytických metod jsou právě předpoklady o morfologii v RVE. Tuto vadu odstraňují numerické metody, které uvažují skutečné uspořádání látek. První homogenizační metodou je metoda konečných prvků (MKP), kde jeden voxel odpovídá jednomu konečnému prvku typu BRICK (cihla). Přesnost je vykoupena řešením soustavy rovnic, protože se hledá statická rovnováha uvnitř RVE. Například homogenizace RVE 75 x 75 x 75 nejjednoduššími konečnými prvky, s tri-lineární aproximací posunů, vede na 1,27 mil. neznámých a řešení iterací na počítači 3.2 GHz trvá 15 minut pro pozdější stadia hydratace, s požadovanou relativní přesností 1 %. Druhou úspěšnou metodou je Fourierova transformace (FFT) periodických polí napětí, deformací a posunů. Pro shora uvedený případ řešení trvá pouhých 1,5 min. Přesnější popis metod a implementaci lze nalézt v disertační práci [1].

#### **O**VĚŘENÍ

Ověření modelů s experimenty ukazuje schopnosti jednotlivých modelů na růz-

Obr. 5Neperkolovaná a) a perkolovaná<br/>b) mikrostruktura pasty, stupeň<br/>hydratace 0,02, v/c = 0,4Fig. 5Unpercolated a) and percolated

b) paste microstructure, degree of hydration 0.02, w/c = 0.4



# VĚDA A VÝZKUM

Empirický vztah

50 x 50 x 50 µm

75 x 75 x 75 μm

0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9

1 µm/voxel -

.....

0.5 µm/voxel

0.33 µm/voxel

Stupeň hydratace [-]

Experiment

0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8

Stupeň hydratace [-]

#### SCIENCE AND RESEARCH

20

15

10

5

0

30

25

20

15

10

5

0

0 0.1 0.2

0 0.1

Youngův modul, E [GPa]

Youngův modul, E [GPa]



ných úrovních, zejména porovnání analytických metod s numerickými pro úroveň cementové pasty.

### Cementová pasta, v/c = 0.5

Pro tuto cementovou pastu z Portlandského cementu byl získán vztah pro Youngův modul pružnosti:

$$E = 46.03 \ (1 - f_{cap})^{3.16} \tag{1}$$

kde  $f_{cap}$  je kapilární porozita z modelu CEMHYD3D. Na C-S-H úrovni se vytváří, dle obr. 2, maximálně asi 30 % HD C-S-H formy. Pro C-S-H úroveň je použita metoda Mori-Tanaka a její výstup směřuje do samokonzistentí metody na úrovni cementové pasty. Obr. 6 ukazuje výsledky analytické homogenizace s perkolovanou a neperkolovanou mikrostrukturou. Protože vodní součinitel je vysoký, není rozdíl s uvážením perkolace velký, výsledky homogenizace jsou však obecně podhodnoceny. Numerická homogenizace MKP s dvěma velikostmi RVE dává podstatně lepší shodu se vztahem (1). Chyba metody je zaviněna nepřesnou aproximací posunů na konečném prvku, kterou odhaluje přesná FFT metoda na RVE 75 x 75 x 75 μm.

### Cementová pasta, v/c = 0,35

Na hydratující cementové pastě z bílého cementu byla měřena rychlost šíření ultrazvuku. Výsledky měření byly přepočítány na elastické vlastnosti kontinua. Na simulované mikrostruktuře 75 x 75 x 75 μm byla určena objemová zastoupení jednotlivých chemických látek. Výsledky analytické homogenizace jsou na obr. 7, pro perkolovanou a neperkolovanou RVE. Pro numerické ověření byla simulována RVE 25 x 25 x 25  $\mu$ m, kde bylo zjemněno rozlišení voxelu z 1  $\mu$ m na 0,5 či 0,33  $\mu$ m. Obr. 7 ukazuje, že se zjemněním rozlišení voxelu dochází k zjemnění sítě MKP, a tím i k zlepšení aproximací posunů. Výsledky dobře souhlasí s experimentem a to i pro případ Poissonova čísla. Stejně dobrou shodu bychom získali i na RVE 50 x 50 x 50  $\mu$ m při rozlišení 1  $\mu$ m.

#### Cementová malta, v/c = 0,3

Na úrovni cementové malty vystupují během homogenizace tři složky: písek, přechodová zóna a cementová pasta, obr. 1. Přechodová tloušťka okolo zrn písku snižuje výsledné elastické vlastnosti. Analyzujme provedený experiment metodou Hervé-Zaoui, kde průměrná velikost zrna písku je 450 µm a tloušťka přechodové zóny okolo 20 µm. Modul pružnosti cementové pasty s v/c = 0,3 byl laboratorně změřen hodnotou 20,76 GPa, zrno písku má modul pružnosti 80 GPa. Do past byl přidáván tento písek s objemovým zastoupením 0 až 0,5 a měřeny výsledné elastické vlastnosti malty. Obr. 8 porovnává výsledky experimen-

- Obr. 8 Analytická homogenizace cementové malty, v/c = 0,3
- Fig. 8 Analytical homogenization of cement mortar, w/c = 0.3

tu a modelování, které dobře souhlasí, pokud se modul pružnosti uvažuje v přechodové zóně poloviční hodnotou oproti pastě. Pokud by byla provedena redukce modulu pružnosti v přechodové zóně na 20 %, budou výsledné elastické vlastnosti nižší, obr. 8.

#### $B_{ETON}$ , $v/c = 0,5 \ A \ 0,27$

Výsledky z úrovně malty mohou být pou-

- Tab. 2 Složení betonů uvažovaných v homogenizaci
- Tab. 2 Concrete composition for homogenization

|               | v/c = 0,5            |                                    | v/c = 0,27           |                                    |  |
|---------------|----------------------|------------------------------------|----------------------|------------------------------------|--|
|               | [kg/m <sup>3</sup> ] | [dm <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> ] | [kg/m <sup>3</sup> ] | [dm <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> ] |  |
| Cement        | 370                  | 117,4                              | 550                  | 174,6                              |  |
| Voda          | 185                  | 185                                | 148                  | 148                                |  |
| Plastifikátor | 0                    | 0                                  | 3,6                  | 3,6                                |  |
| Vzduch        | 0                    | 30,1                               | 0                    | 26,5                               |  |
| Písek         | 754                  | 300,4                              | 617                  | 245,8                              |  |
| Kamenivo      | 969                  | 367,1                              | 1060                 | 401,5                              |  |



### VĚDA A VÝZKUM SCIENCE AND RESEARCH



Literatura:

- Šmilauer, V.: Elastic properties of hydrating cement paste determined from hydration models, doktorská disertační práce, FSv ČVUT v Praze, 2006, http://cml.fsv.cvut.cz/~smilauer
- [2] Jennings, H. M.: A model for the microstructure of calcium silicate hydrate in cement paste, Cement and Bretoncům Barchetům 30 (1), 101–116, 2000.
- [3] Němeček, J.: Nové experimentální metody v mikromechanice cementových kompozitů. Beton TKS 5/2005.
- [4] Mori, T., Tanaka, K.: Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, Acta Metallurgica 21 (5), 1605–1609, 1973.
- [5] Hill, R.: Theory of mechanical properties of fiber-strengthened materials.
   - III: Self-consistent model. J. Mech. Phys. Solids 13, 189–198, 1965.

žity pro úroveň betonu. Opět použijeme analytické homogenizační schéma Hervé-Zaoui, obr. 1. Složení dvou studovaných betonů je v tab. 2.

Písek se předpokládal s mechanickými hodnotami E = 60 GPa, v = 0,2 a o reprezentativním průměru 1 mm. Kamenivu o průměru 15 mm odpovídal E =



40 GPa a v = 0,2. Přechodová zóna okolo písku a kameniva byla uvažována hodnotou 20 µm, s poloviční redukcí modulu pružnosti cementové pasty. Vzduch v betonu na úrovni malty redukuje její modul pružnosti, zde bylo použito navíc schéma Mori-Tanaka na úrovni malty. Obr. 9 zachycuje vývoj modulu pružnosti na jednotlivých úrovních. Cementová pasta byla homogenizována numericky, ostatní úrovně analyticky. Přesnější modelování počátku tuhnutí by vyžadovalo kalibraci modelu hydratace.

### ZÁVĔR

Cílem příspěvku bylo ukázat dnešní možnosti počítačových simulací pro předpověď elastických vlastností cementových materiálů. Nejdůležitější je úroveň cementové pasty, která výrazně ovlivňuje samotné vlastnosti betonu. Uvedené modely umožňují mimo jiné zahrnout vliv křivky zrnitosti cementu, chemického složení cementu, libovolného průběhu teploty a množství vody během zrání, přechodové zóny okolo kameniva a písku včetně jejich elastických vlastností. Tím nacházejí praktické uplatnění při návrhu betonů definovaných elastických vlastností, předpověď jejich vývoje či zjištění míry degradace při porovnání s experimenty. Na teoretické úrovni nyní zkoumáme rozšíření elastických homogenizací na viskoelastické, které by umožnilo simulovat dotvarování cementové pasty a následně betonu.

*Obr.* 9 *Předpověď modulu pružnosti pro betony z* 

a) v/c = 0,5, b) v/c = 0,27

Fig. 9 Prediction of concrete

numerické a analytické

homogenizace

Z modelování plyne jasný trend pro zvýšení elastických vlastností betonu: snížení vodního součinitele, zvýšení množství kameniva a jeho tuhosti, redukce přechodové zóny. Dnes lze dramaticky zvýšit pevnost betonu v tlaku, nárůst elastických vlastností je ovšem daleko menší, což lze krásně doložit uvedenými simulacemi. S problémem "nízkého" modulu pružnosti betonu se tedy budeme potýkat i v budoucnu.

Článek je založen na disertační práci, kterou lze získat na webové adrese [1]. Část výzkumu byl podporován záměrem MŠMT MSM 6840770003.

> Ing. Vít Šmilauer, Ph.D. FSv ČVUT v Praze Thákurova 7, 166 29 Praha 6 tel.: 224 355 417 e-mail: vit.smilauer@fsv.cvut.cz

Prof. Ing. Zdeněk Bittnar, DrSc. FSv ČVUT v Praze Thákurova 7, 166 29 Praha 6 tel.: 224 353 869 fax: 224 310 775 e-mail: bittnar@fsv.cvut.cz