

Přednáška 01 – PRPE + PPA – Organizace výuky

Přednášející: Doc. Ing. Vít Šmilauer, Ph.D., B312

Konzultační hodiny Út 8.30-9.45

St 14.00 – 15.45, B286, PRPE (Stav. Inženýrství) + PPA (Arch. a stavitelství) přednáška

St 15.55 – 16.45, B286, příklady na přednášce

Webové stránky předmětu

<https://mech.fsv.cvut.cz/student/>

Domácí úkoly, přednášky, podmínky zápočtu a zkoušky

Podmínky pro udělení zápočtu:

10 domácích úkolů, včasné odevzdání cvičícímu a na webových stránkách, 2 semestrální testy, min. 14 bodů/34

PRPE + PPA – Organizace výuky

Zkouška:

Zápočtové testy (34) + zkouškový test (30) + příklady (36)
= 100 bodů

Doplňkové ústní otázky

Statistika úspěšnosti PRPE, prof. Jirásek

	MJ 2009/2010 Z	MJ 2010/2011 Z	VS 2010/2011 L
Zapsaných		182	254
Zápočet udělen		141	196?
Zkouškových pokusů	287	280	350?
Známku A-E získalo	123	95	132?
Pokusů/úspěch	2.33	3.08	2.6?
A		1	
B		11	
C		42	
D		29	
E		8	
Seminárky		4	

Copyright (c) 2011 Vít Šmilauer
Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Mechanics, Czech Republic

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License" found at <http://www.gnu.org/licenses/>

PRPE + PPA – Organizace výuky

Sylabus:

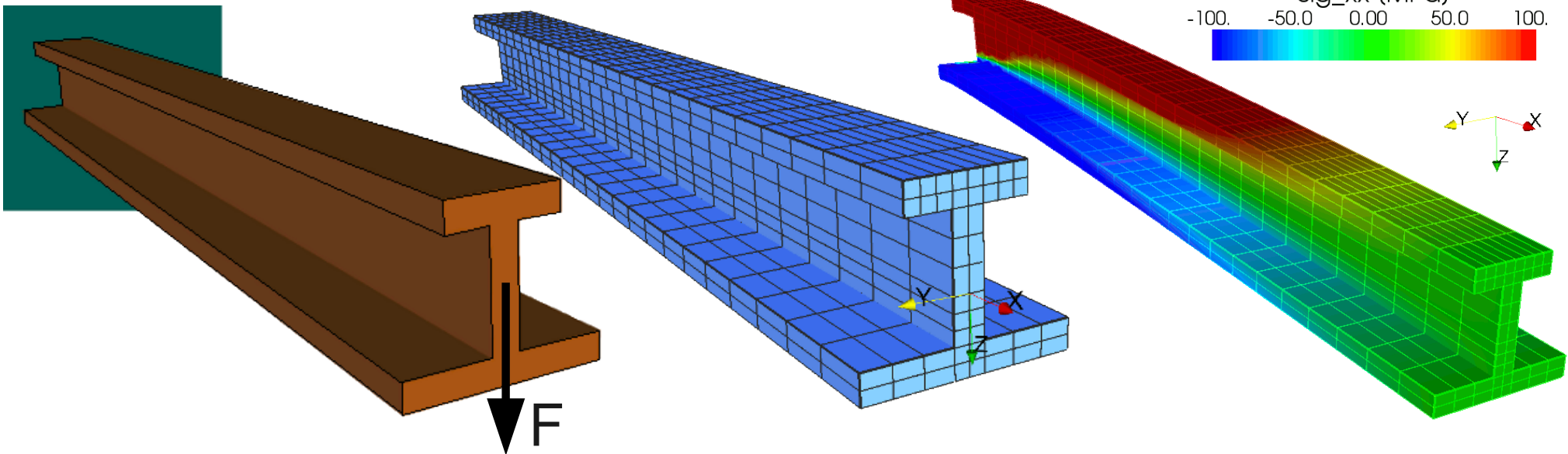
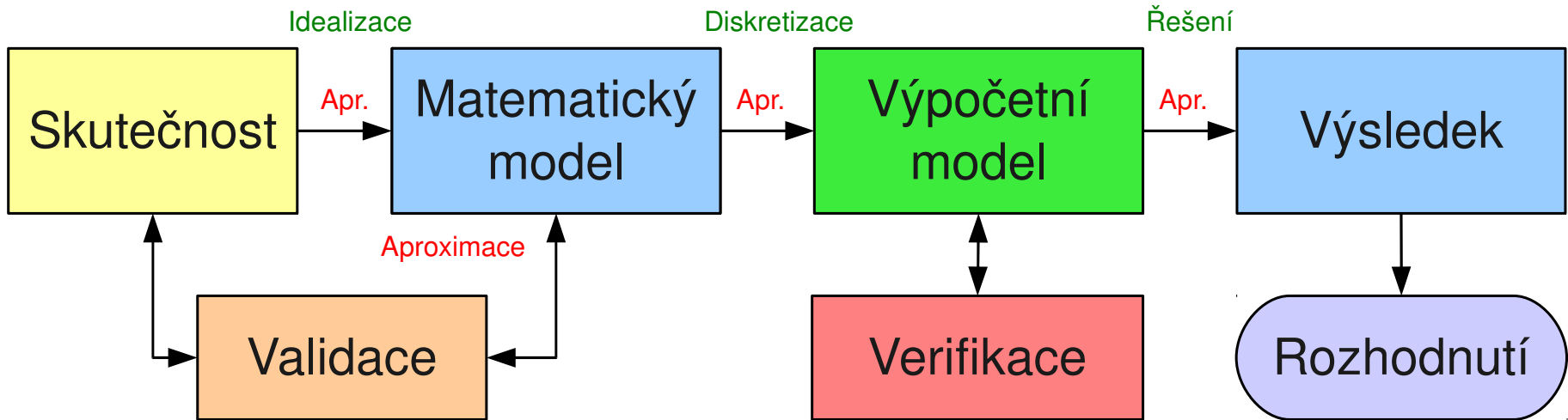
- Analýza prutů – tah, tlak, jednoduchý a složený ohyb, jejich kombinace, smyk za ohybu, kroucení, vzpěr
- Elastický a elastoplastický materiál
- Rovinná napjatost – stěny
- Trojrozměrná napjatost – tělesa

Skripta (teorie a příklady):

Šejnoha J., Bittnarová J.: Pružnost a pevnost, ES ČVUT, 2004

Bittnarová J. a kol.: Pružnost a pevnost - příklady, ES ČVUT, 2007 (dotisk)

Motivace – analýza inženýrského problému



Statické rovnice (3)

$$\nabla^T \cdot \sigma = 0, \quad x \in \Omega$$

$$\sigma \cdot n = \bar{t}, \quad x \in \Gamma$$

Geometrické rovnice (6)

$$\varepsilon = \partial^T \cdot u$$

Fyzikální rovnice (6)

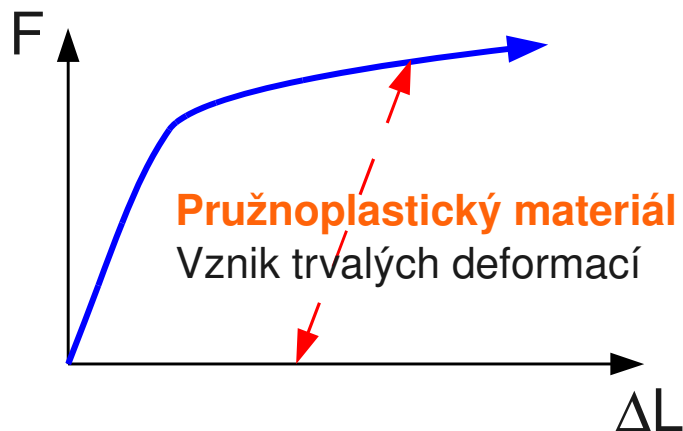
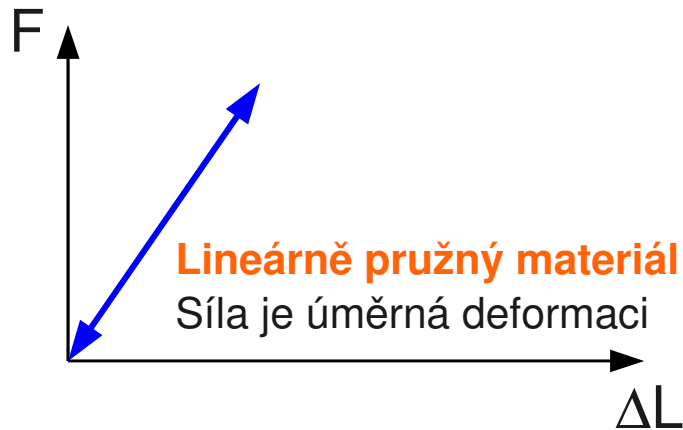
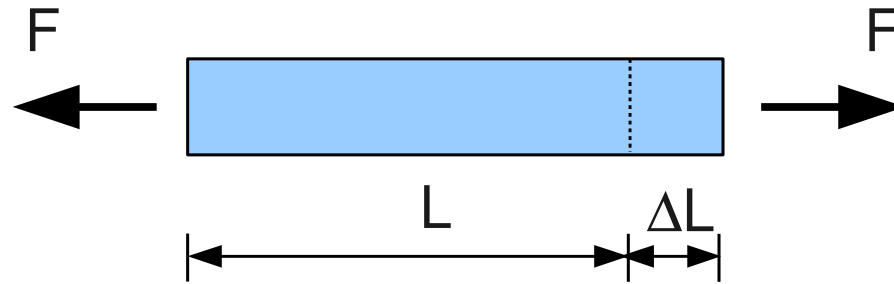
$$\sigma = D \cdot \varepsilon$$

Pružnost

Teorie pružnosti matematicky popisuje mechanické chování pružných těles. Cílem je určit deformaci pružných těles a velikosti vnitřních sil.

Pružnost (elasticita) je schopnost materiálu deformovat se takovým způsobem, že nedochází k jeho nevratným změnám. Po odtížení nastává jeho návrat do původního stavu.

Pracovní diagramy – jednoosá tahová zkouška

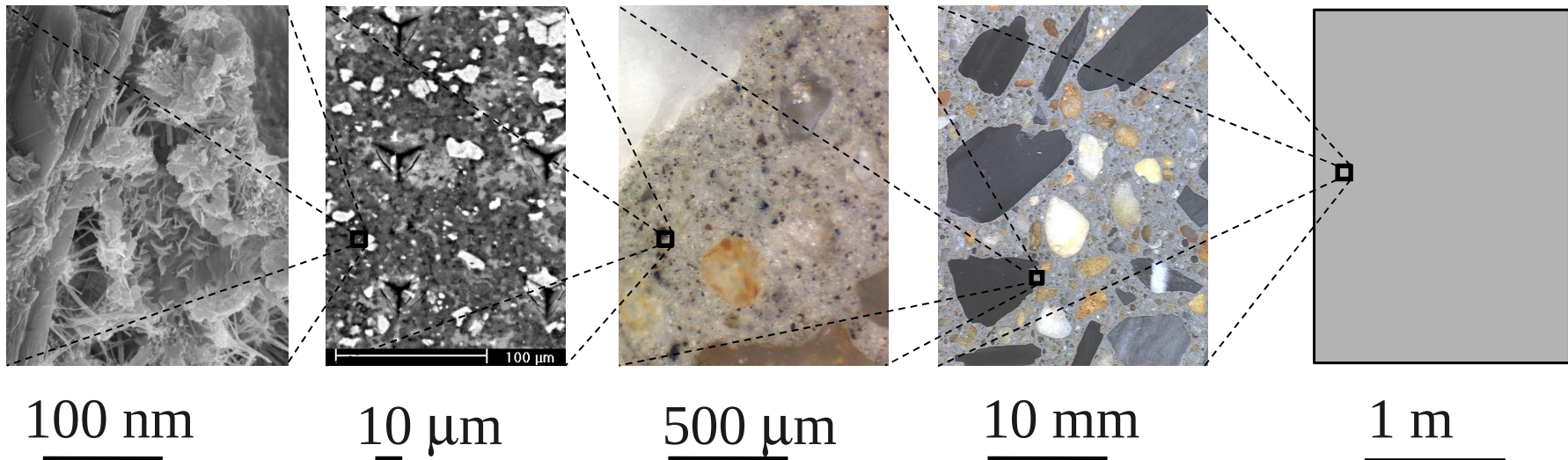


Základní pojmy

Pevnost je schopnost materiálu přenést určité zatížení.

Kontinuum popisuje prostředí spojitě vyplněné hmotou na určité úrovni rozlišení.

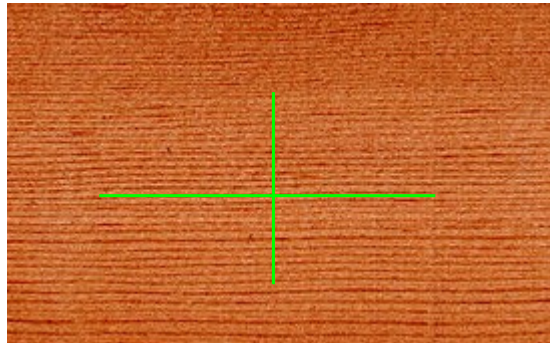
Homogenní materiál má stejné vlastnosti ve všech bodech na určité úrovni rozlišení.



Základní pojmy

Izotropní materiál má stejné vlastnosti ve všech směrech (ocel, beton, zemina ...). Opakem je anizotropie, speciálním případem ortotropie.

Ortotropní materiál má stejné vlastnosti v určitých kolmých směrech (dřevo, kompozity).



V inženýrských analýzách se často zanedbává vliv času, setrvačných sil, stochastických vlastností materiálu a zatížení.

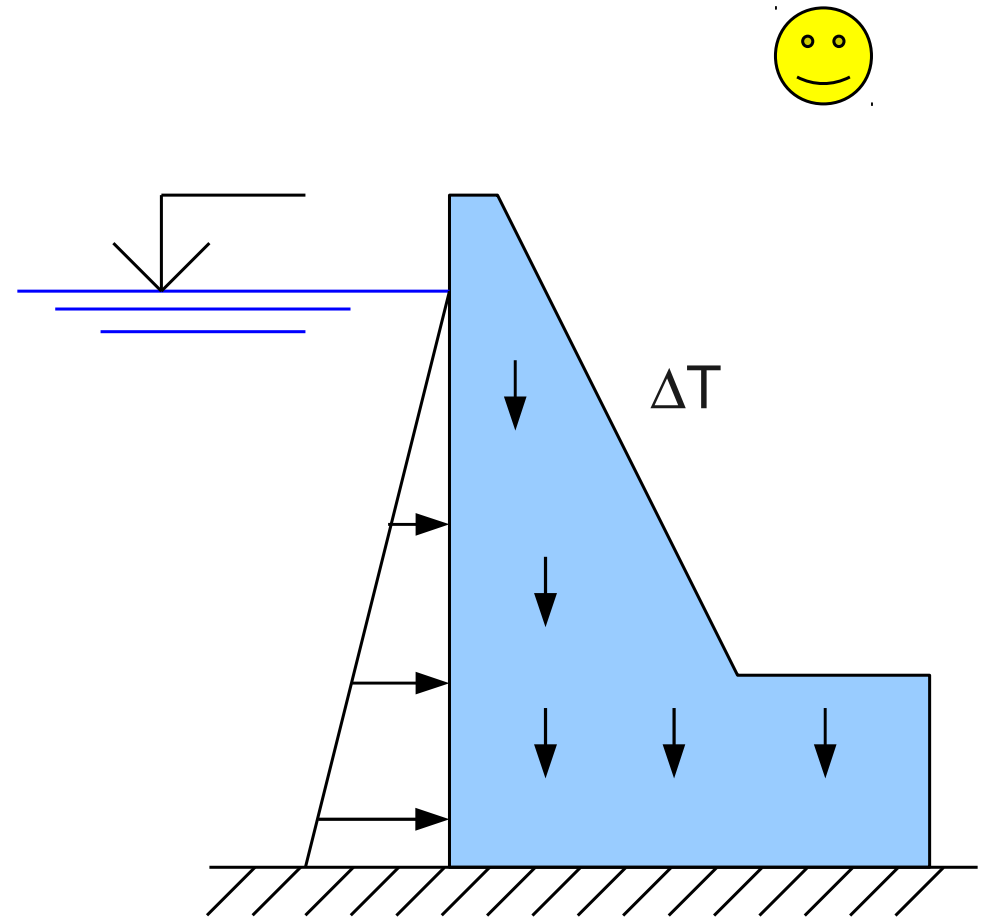
Zatížení

- **Vnější silové**

- Objemové síly [kN/m^3]
- Povrchové síly
 - Plošné [kN/m^2]
 - Liniové [kN/m]
 - Bodové [kN]

- **Vnější nesilové**

- Teplotní změny
- Předepsané přemístění podpor



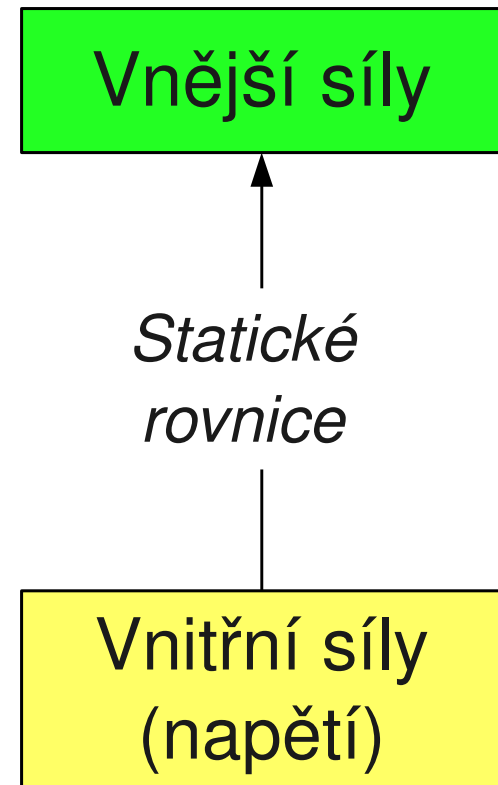
Statické rovnice

Vnější síly způsobují obecně vznik vnitřních sil (napětí).

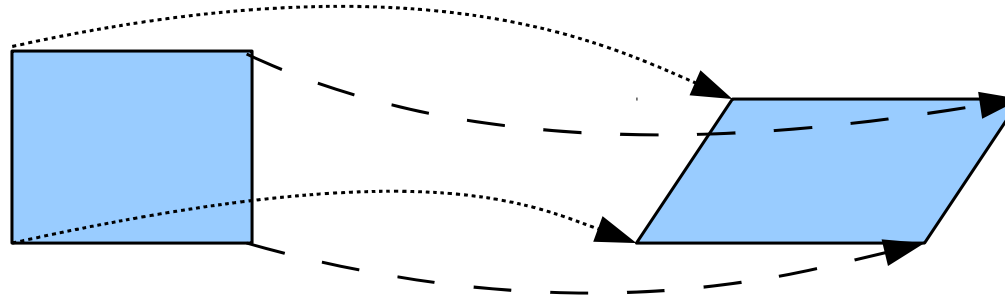
Předepsané i neznámé síly, které působí z prostředí na těleso.

Rovnice popisující rovnováhu na jednotlivých částech poddajného tělesa.

Neznámé síly uvnitř poddajného tělesa, kterými na sebe působí sousedící části.



Geometrické rovnice



Přemístění

Změna polohy jednotlivých bodů tělesa.

*Geometrické
rovnice*

Rovnice, které popisují vliv posunů bodů
na jeho přetvoření

Přetvoření

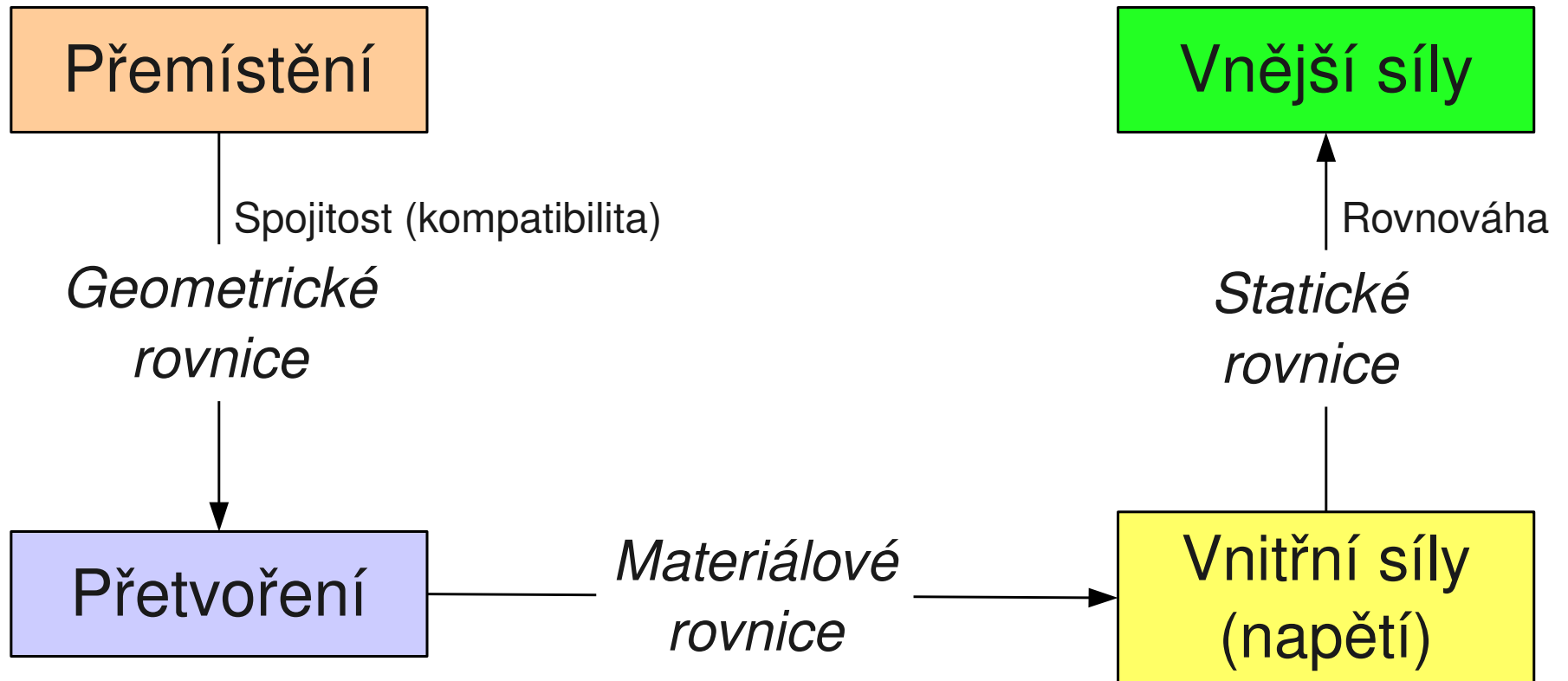
Změna velikosti a tvaru jednotlivých částí
tělesa.

Materiálové (fyzikální, konstitutivní) rovnice

Rovnice popisující odpor materiálu vůči přetvoření.
(měkký, poddajný, málo poddajný, tuhý materiál).

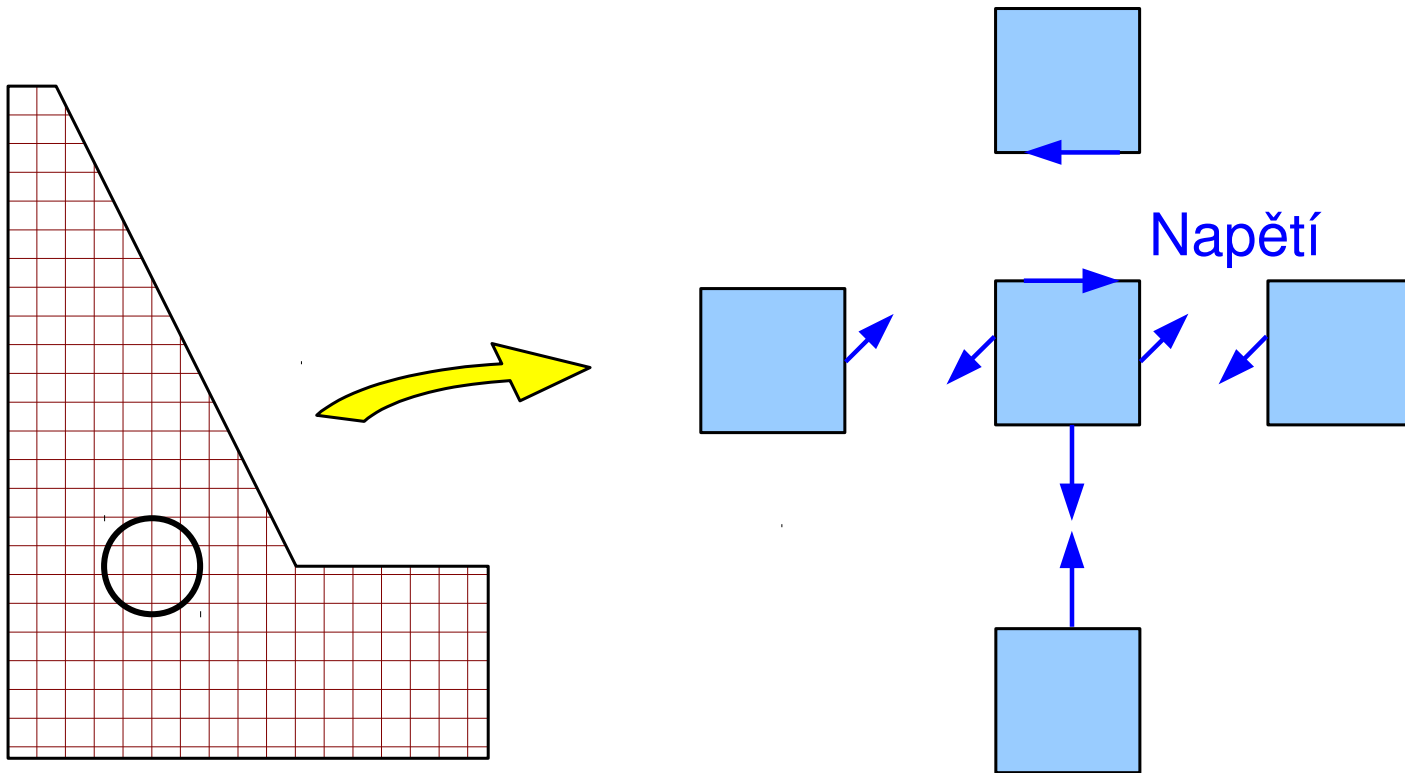


Tontiho diagram



Model kontinua

Těleso rozdělíme na nekonečně malé objemy, na kterých požadujeme splnění statických, geometrických a fyzikálních rovnic → **3D stav napjatosti**.



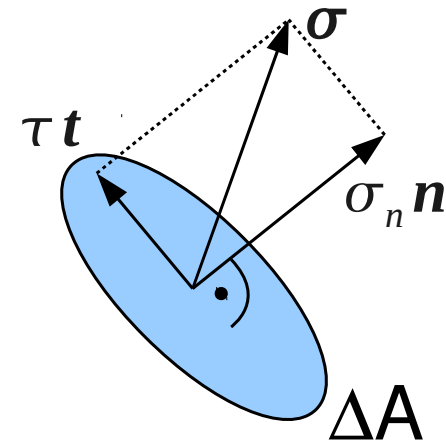
Napětí

Limitním přechodem na kontinuu definujeme **vektor napětí** pomocí plošky ΔA

$$\boldsymbol{\sigma} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A}$$

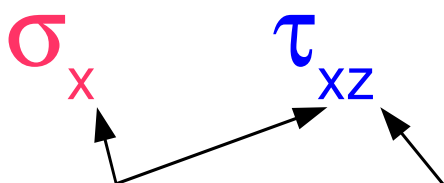
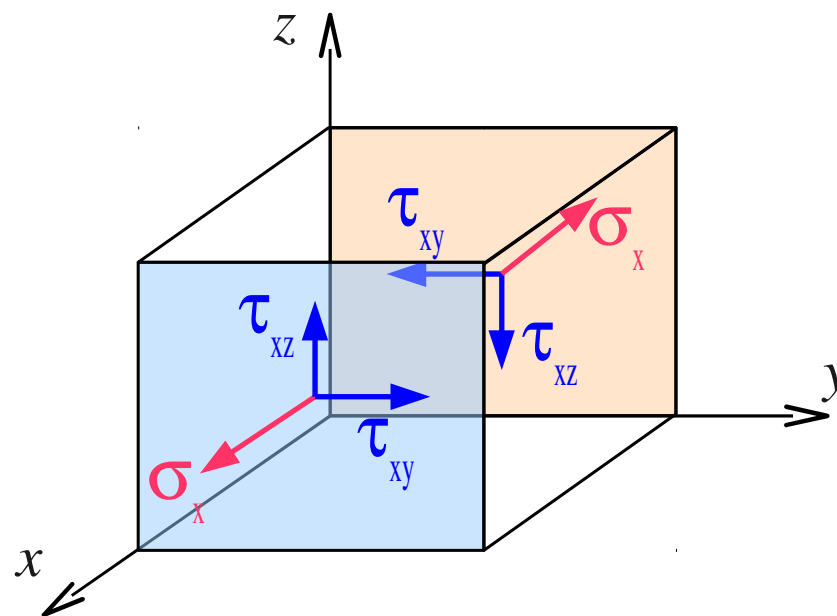
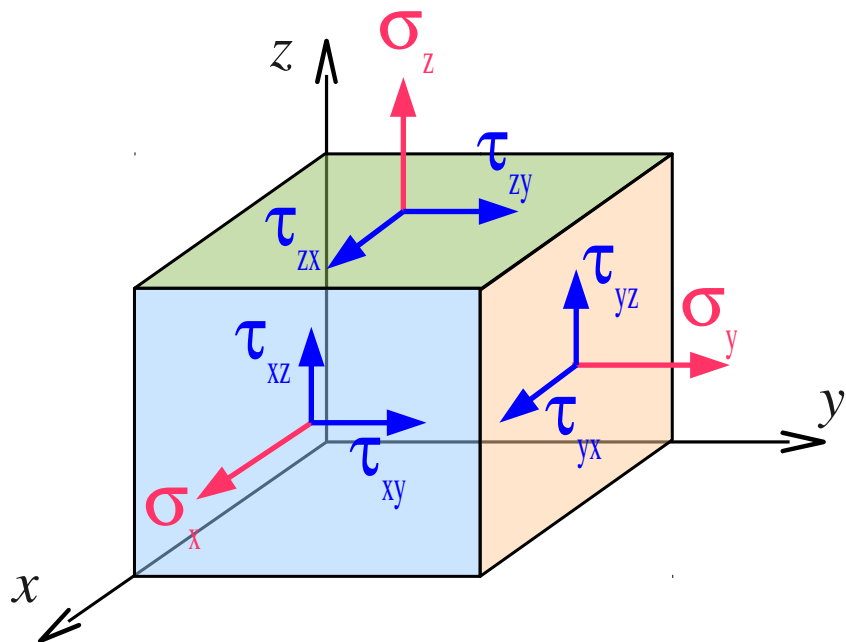
σ_n **normálové napětí**

τ **smykové napětí**



$$|\mathbf{n}| = |\mathbf{t}| = 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \sigma_n \mathbf{n} + \tau \mathbf{t}$$

Složky napětí na elementárním kvádru



Směr normály
k ploše

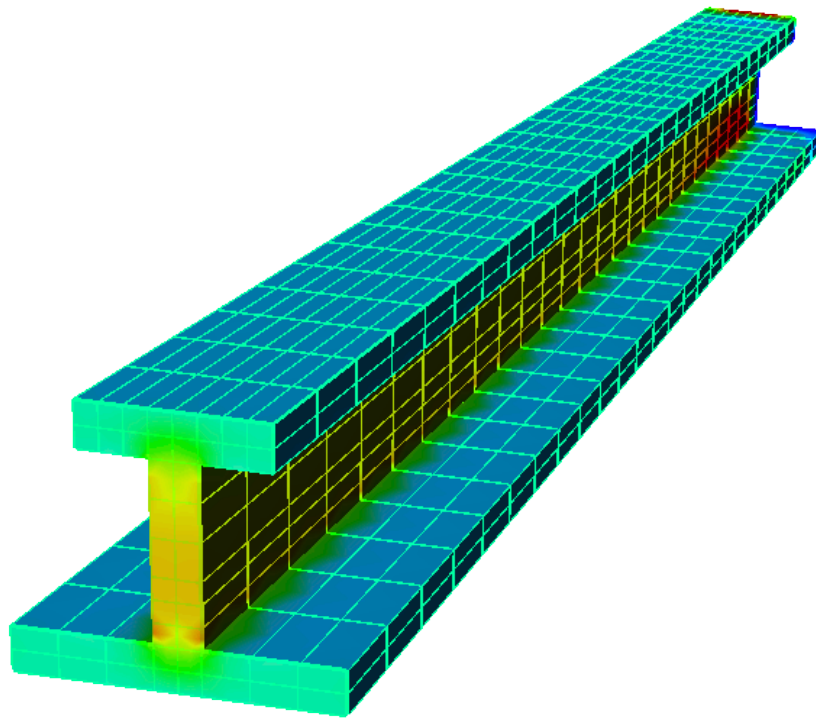
Směr osy, se kterou je
napětí rovnoběžné

Pole napětí

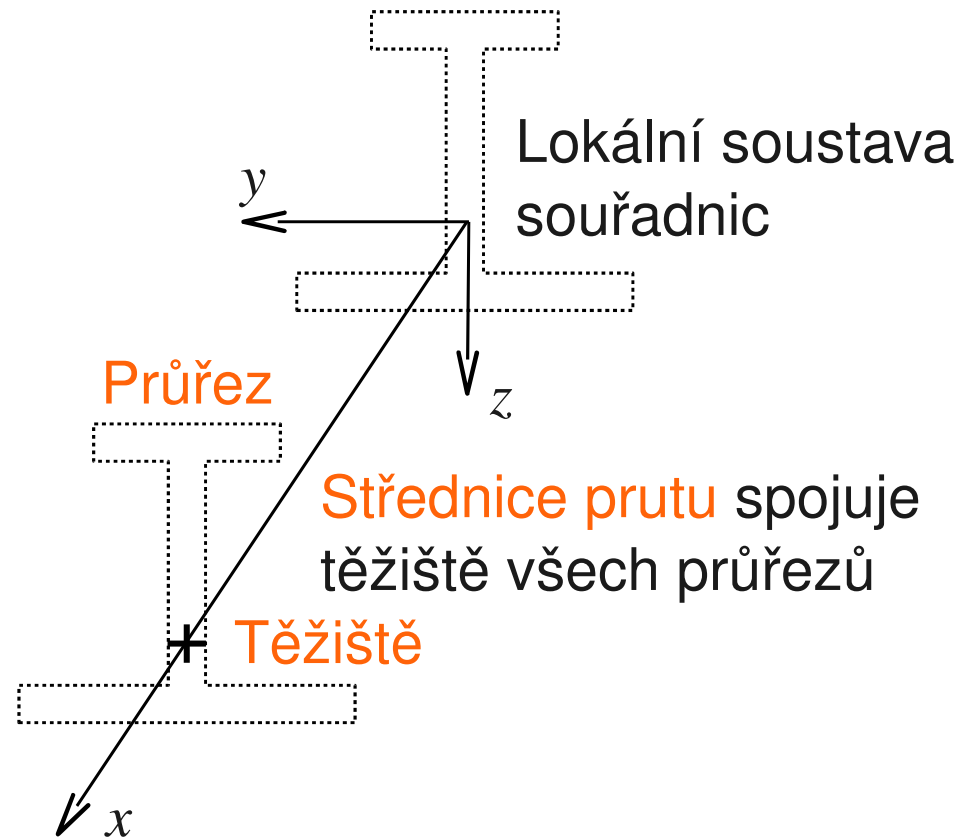
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

Model prutu

Řešení 3D napjatosti těles je pro technickou praxi příliš složité. Model prutu představuje účinnou aproximaci.



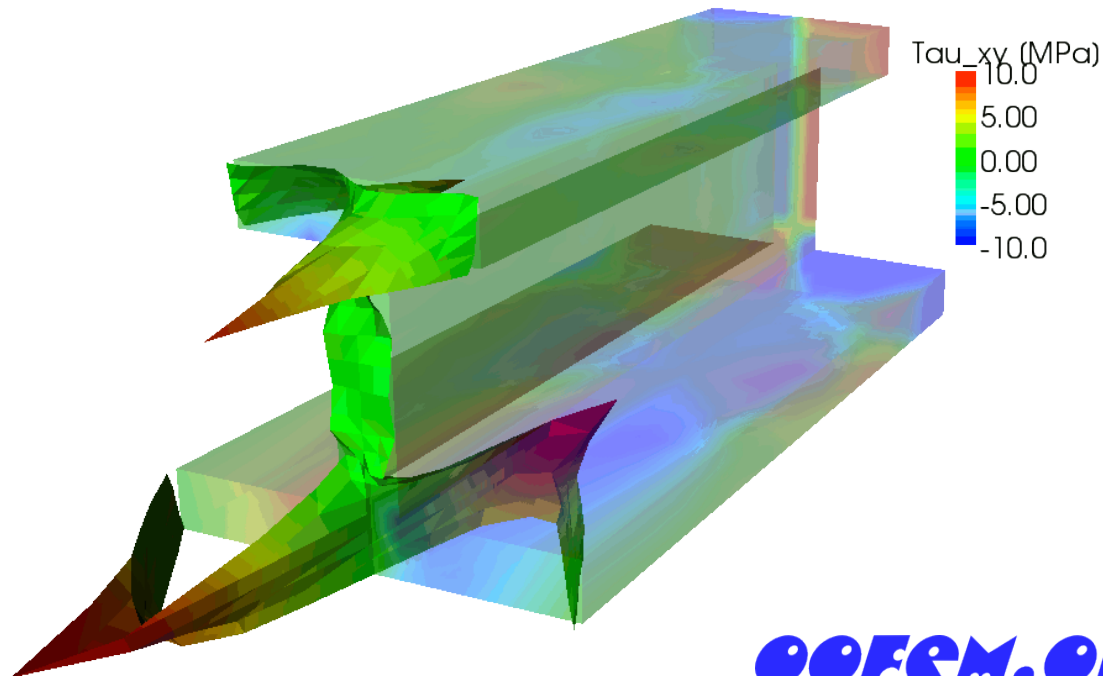
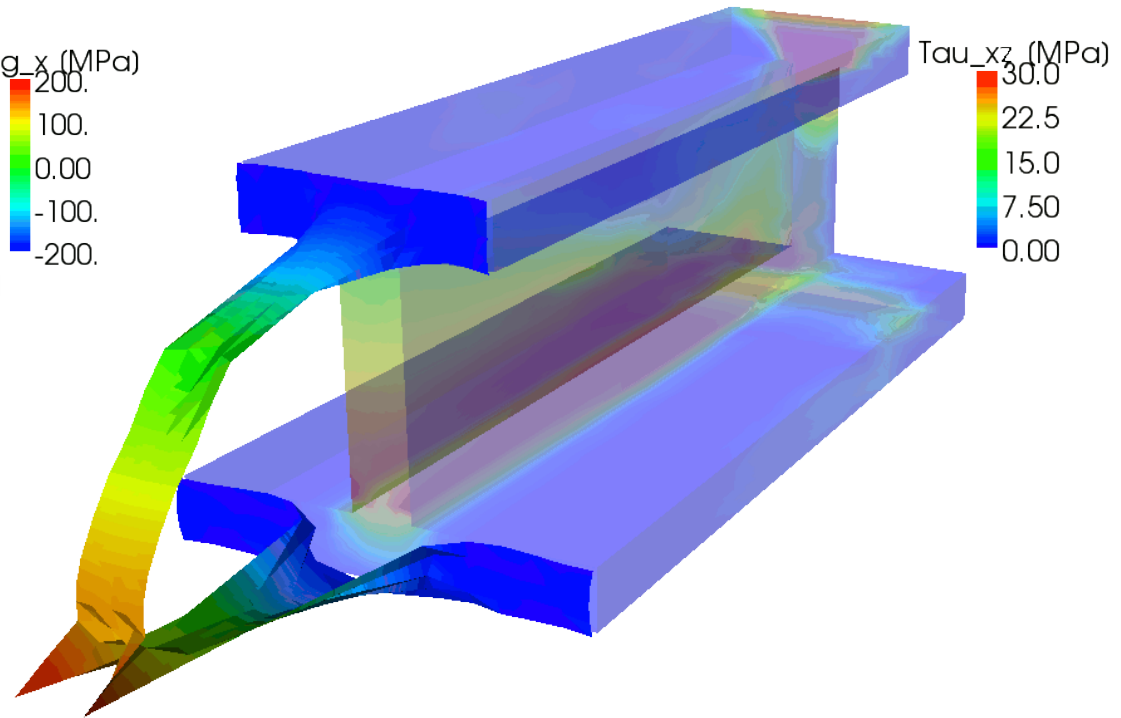
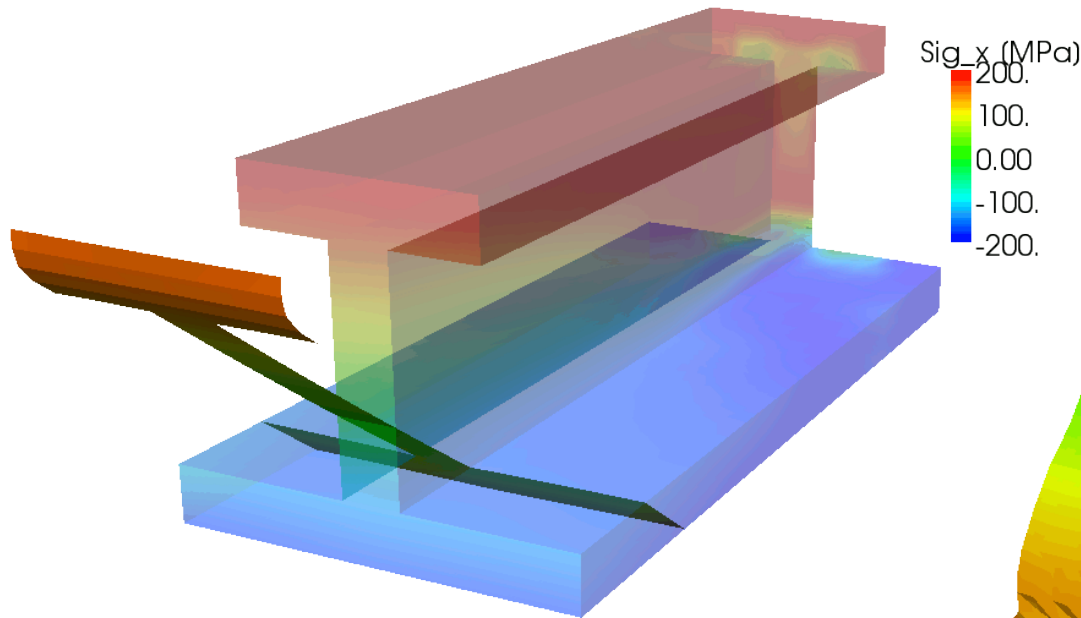
3D model - napětí τ_{xz}



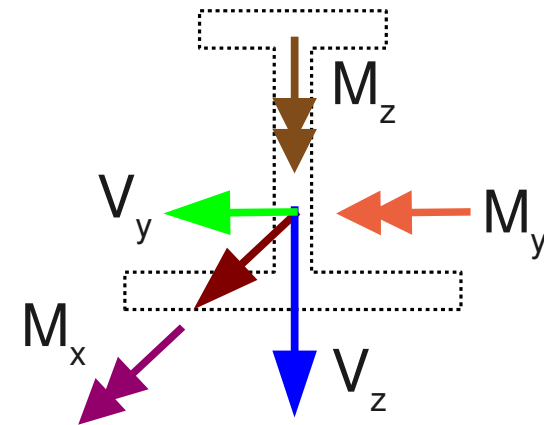
Prut je prvek, jehož délka výrazně převyšuje ostatní rozměry.

Prizmatický prut je prut stálého průřezu po celé jeho délce.

Napětí a vnitřní síly na prutu

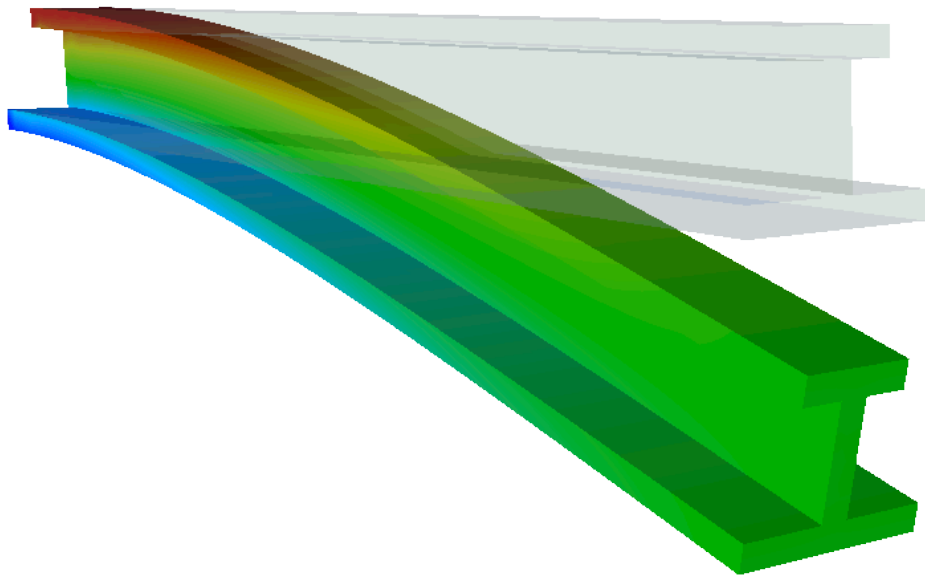


Vnitřní síly prutu jsou výslednice napětí v průřezu. Za určitých předpokladů lze použít zpětný postup pro výpočet napětí ze znalosti vnitřních sil.

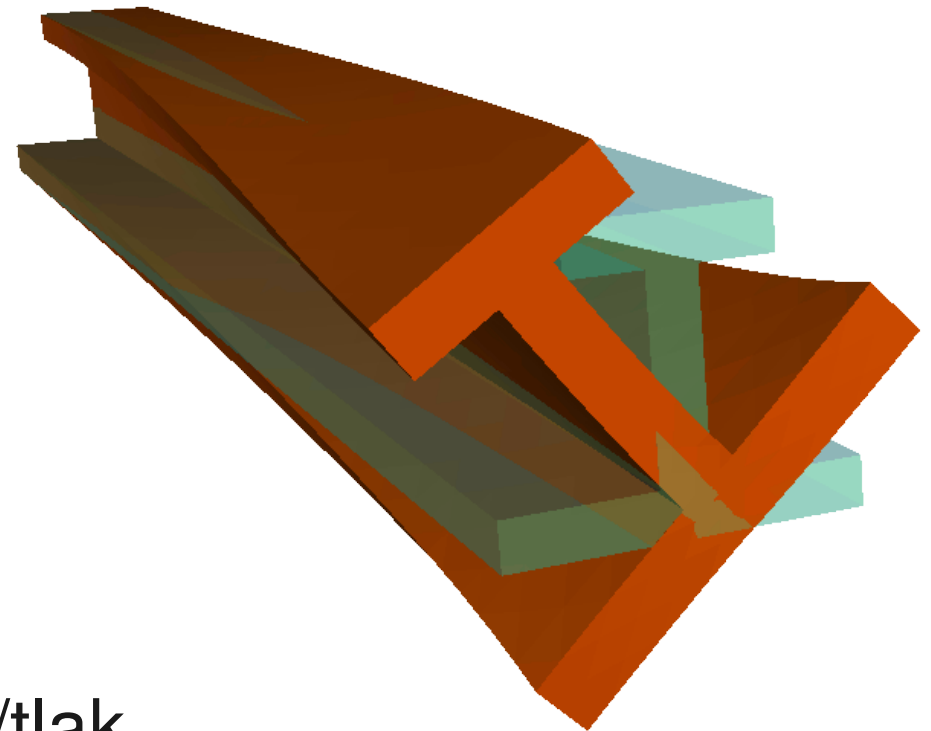


Základní namáhání prutů

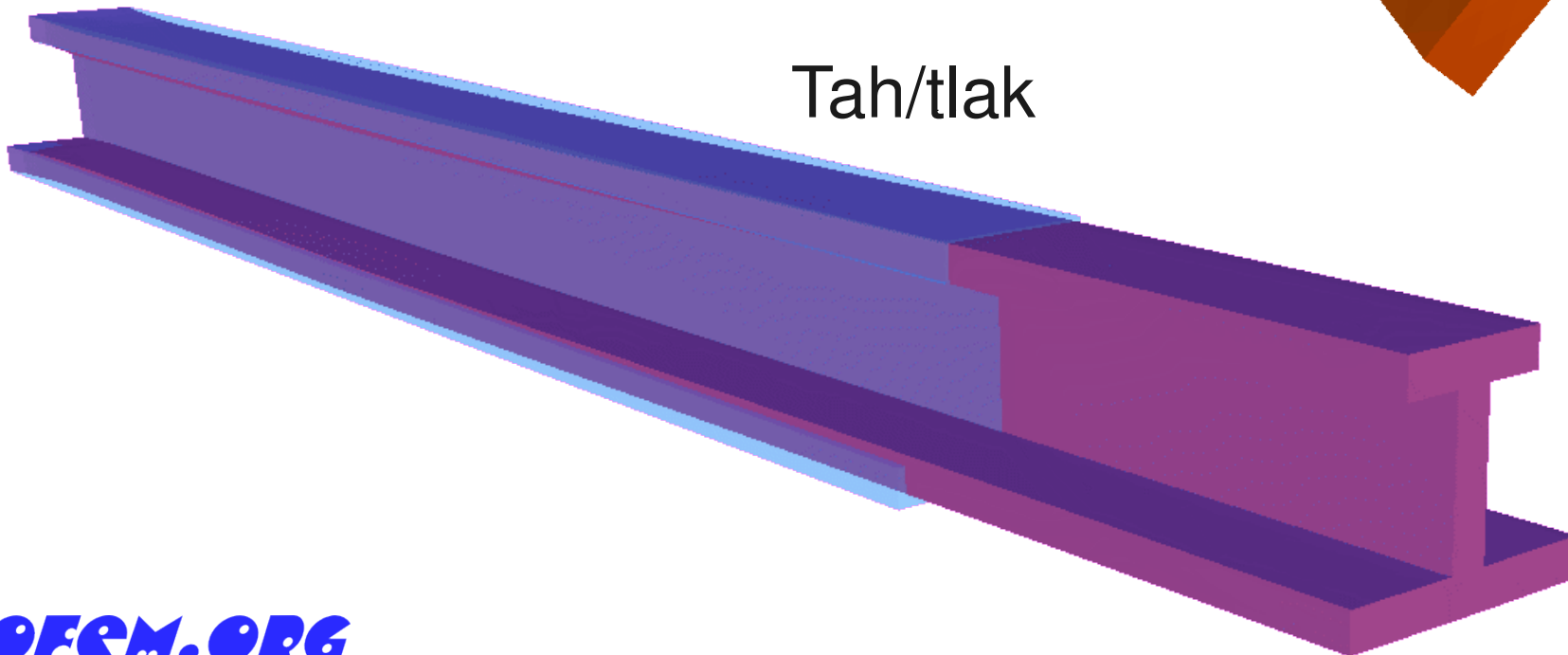
Ohyb



Kroucení

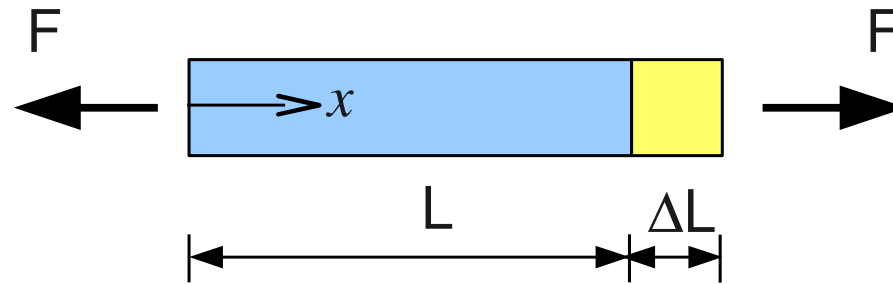


Tah/tlak



Jednoosý (prostý) tah / tlak

Uvažujme prismatický prut, který je zatížený pouze na koncích

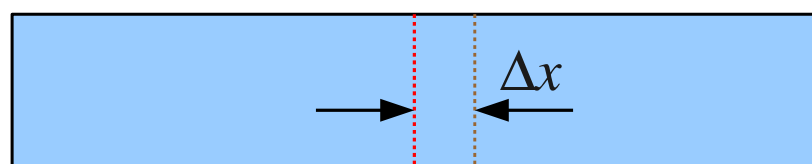


ΔL ... protažení (absolutní)

$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$... poměrné protažení (relativní)

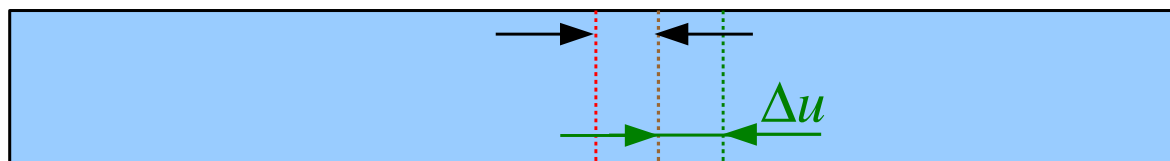
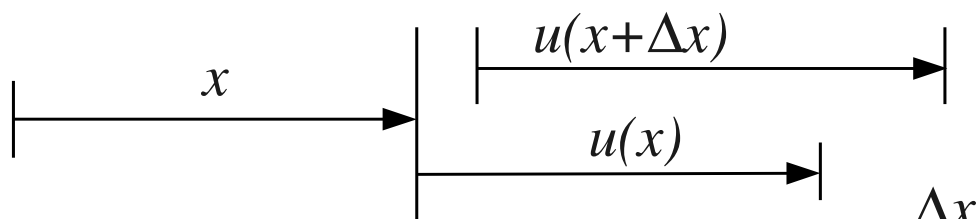
$\sigma = \sigma_x = \frac{F}{A}$... napětí (normálové)

Popis přemístění a přetvoření



Výchozí stav

Δx ... původní délka segmentu



Stav po zatížení

Protažení segmentu Δu

$$\Delta u = \Delta x + u(x + \Delta x) - u(x) - \Delta x \approx u(x) + \frac{du(x)}{dx} \Delta x + \frac{d^2 u(x)}{2! dx^2} (\Delta x)^2 + \dots - u(x)$$

$= 0 \equiv \Delta x \rightarrow 0$

$$\Delta u = \frac{du(x)}{dx} \Delta x \quad \dots \text{absolutní protažení segmentu}$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du(x)}{dx} \quad \dots \text{relativní protažení segmentu}$$

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} \quad \dots \text{geometrická rovnice}$$

Hookeův zákon pro 1D napjatost

1660 – Robert Hooke, „Ut tensio, sic vis“

Pro lineárně pružný materiál je za jednoosého tahu/tlaku napětí úměrné relativnímu prodloužení. Materiálová (fyzikální, konstitutivní) rovnice

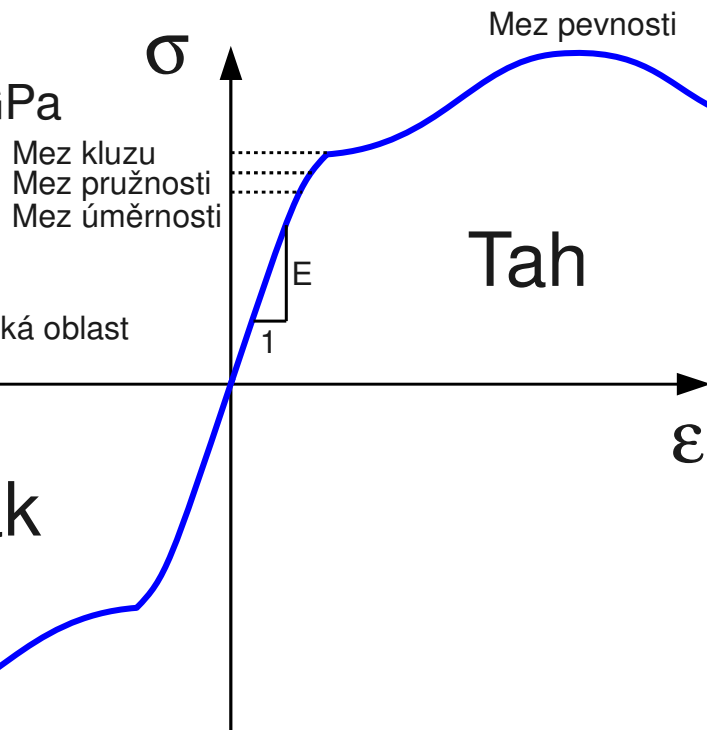
$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

E ... Youngův modul pružnosti [Pa]

Příklady pracovních diagramů materiálů

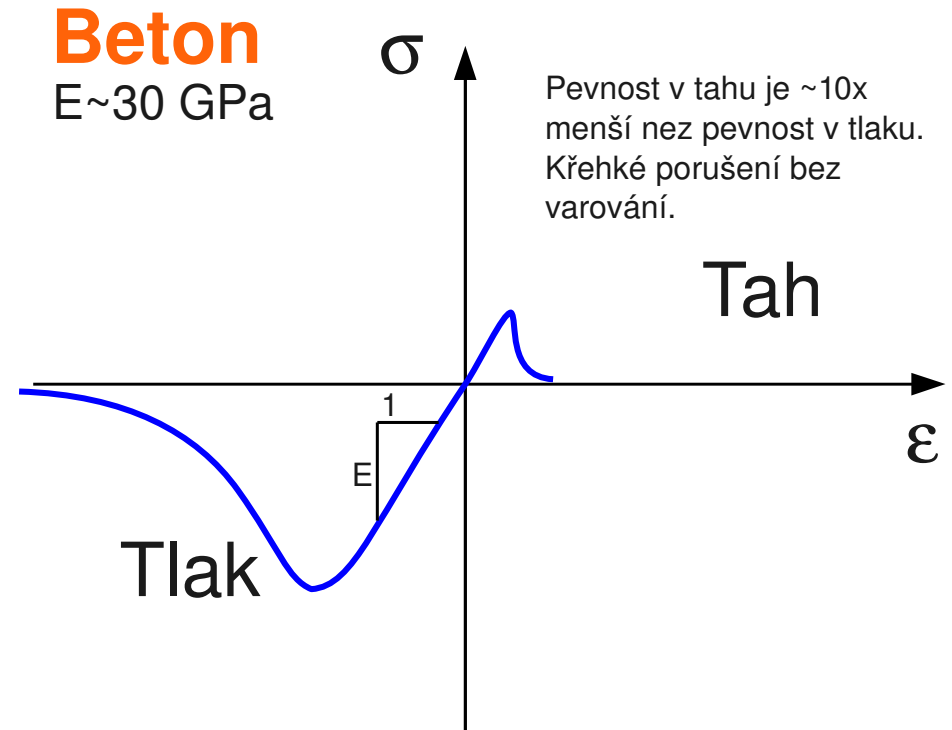
Ocel

$E \sim 210$ GPa



Beton

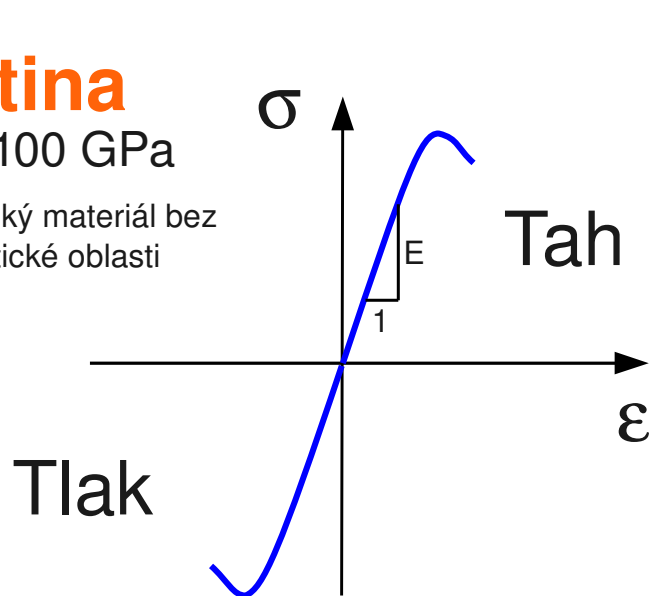
$E \sim 30$ GPa



Litina

$E \sim 100$ GPa

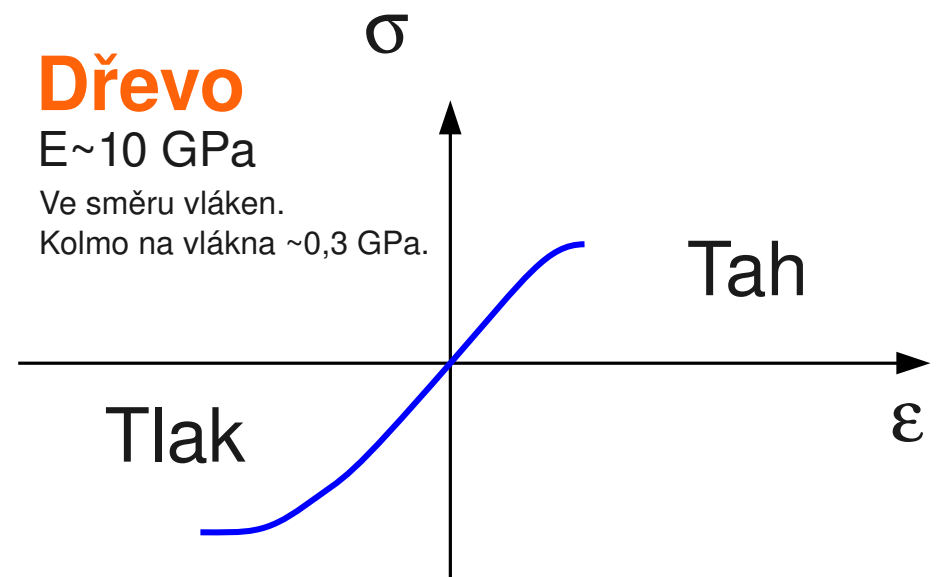
Křehký materiál bez plastické oblasti



Dřevo

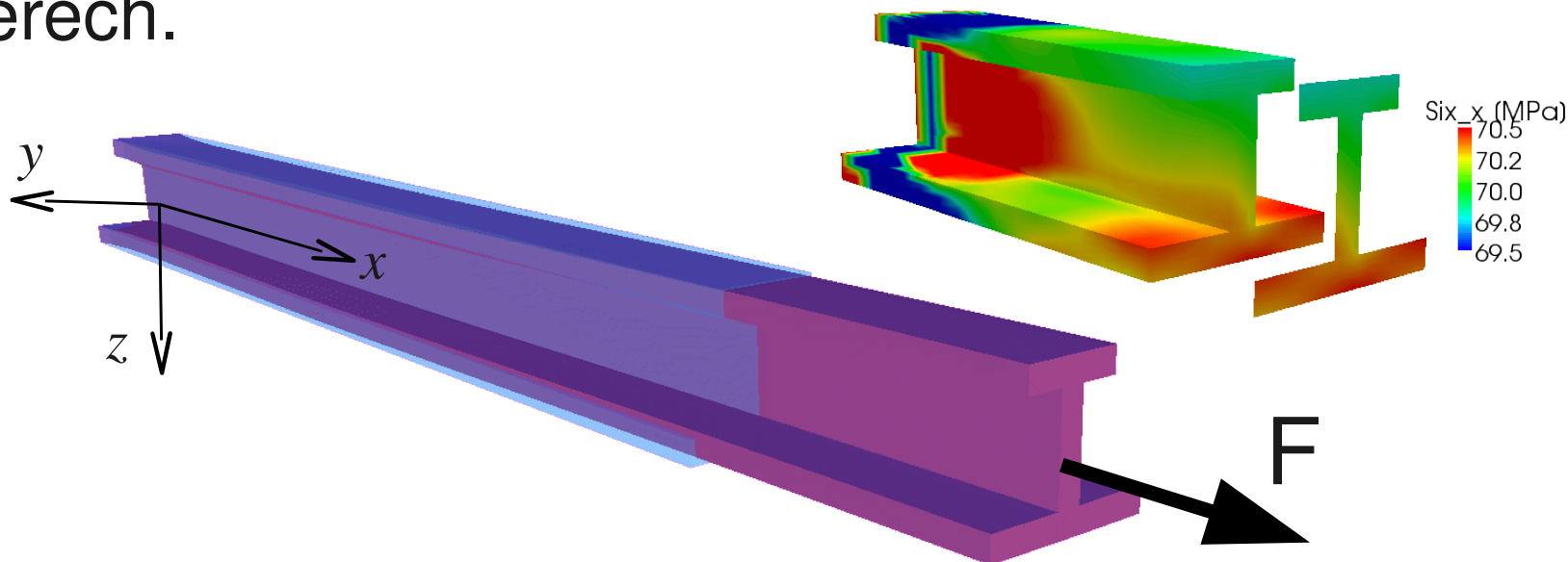
$E \sim 10$ GPa

Ve směru vláken.
Kolmo na vlákna $\sim 0,3$ GPa.



Poissonovo číslo pro izotropní materiál

Při jednoosém tahu dochází ke kontrakci v příčných směrech.



$$\varepsilon_y = -\nu \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$$

ν ... Poissonovo číslo [-],

$$0 \leq \nu \leq 0,5$$

Ostatní složky deformace a napětí jsou nulové.

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$$

Materiál	ν [-]
Guma	~0.5
Ocel	0.3
Beton	0.2
Korek	~0

Jednoosý tah – napětí a vnitřní síly

Normálovou sílu obecně získáme integrací normálového napětí

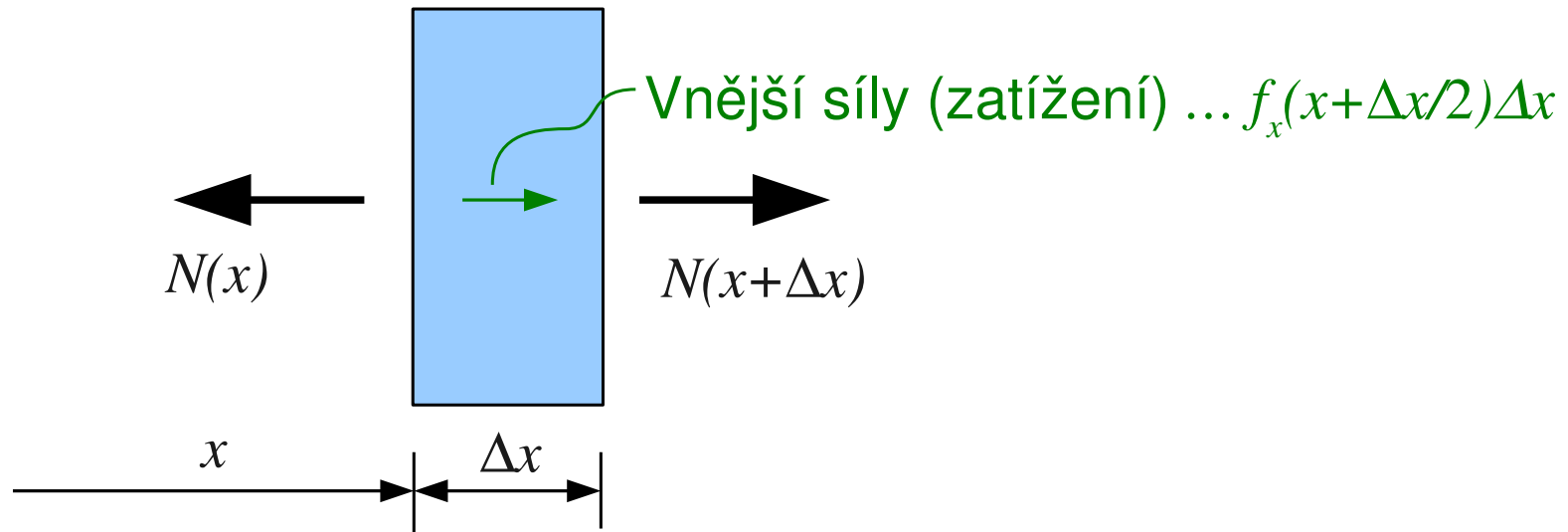
$$N(x) = \int_A \sigma_x(x, y, z) dydz$$

Pro jednoosou napjatost

$$N(x) = A \sigma_x(x) = \underbrace{EA}_{\text{Normálová tuhost průřezu}} \varepsilon_x(x)$$

Normálová tuhost průřezu
(tuhost průřezu v tahu/tlaku)

Rovnice rovnováhy pro segment prutu



Podmínka rovnováhy

$$-N(x) + N(x + \Delta x) + f_x(x + \Delta x/2)\Delta x = 0$$

$$-N(x) + N(x) + \frac{dN(x)}{dx}\Delta x + \underbrace{\frac{d^2u(x)}{2!dx^2}(\Delta x)^2 + \dots}_{=0 \equiv \Delta x \rightarrow 0} + \left[f_x(x) + \underbrace{\frac{df(x)}{dx}\frac{\Delta x}{2} + \dots}_{=0 \equiv \Delta x \rightarrow 0} \right] \Delta x = 0$$

$$\frac{dN(x)}{dx} + f_x(x) = 0$$

Základní rovnice pro jednoosou napjatost

$$\frac{d}{dx} (N(x)) = -f_x(x), \quad N(x) = EA \frac{du(x)}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du(x)}{dx} \right) = -f_x(x)$$

Obyčejná lineární diferenciální rovnice 2. řádu

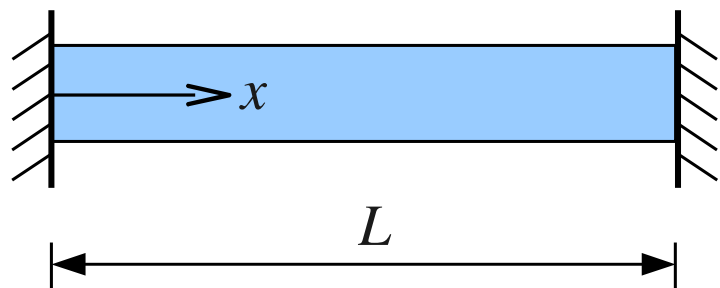
Na každém konci **jedna okrajová podmínka**

Volný konec ... předepsaná normálová síla ... statická o.p.

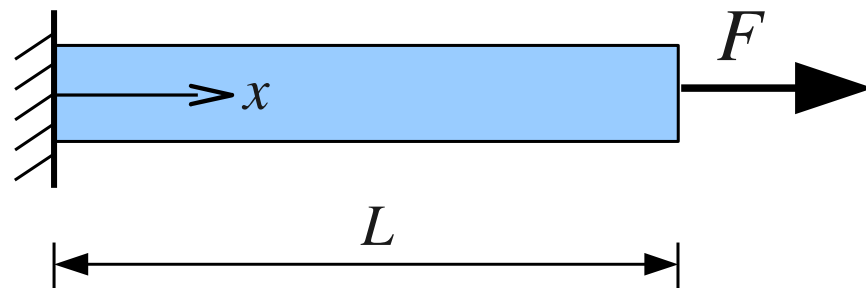
Podepřený konec ... předepsaný posun ... geometrická o.p.

Okrajové podmínky pro libovolný prut

$u(0)=0$ Možno řešit staticky neurčitě konstrukce $u(L)=0$



$u(0)=0$ $u'(L)=F/EA(L)$

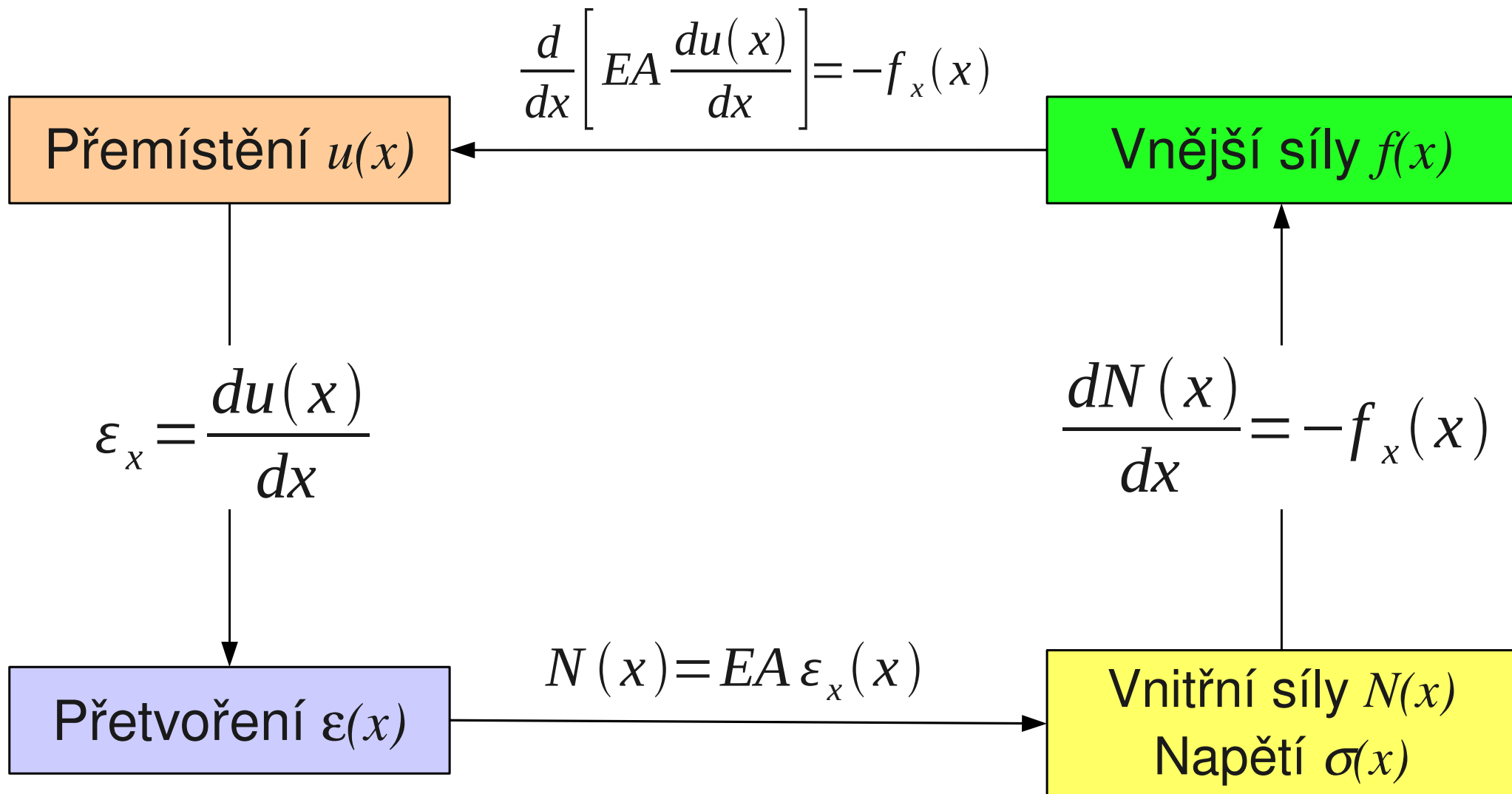


$u'(0)=-F/EA(0)$ $u(L)=0$

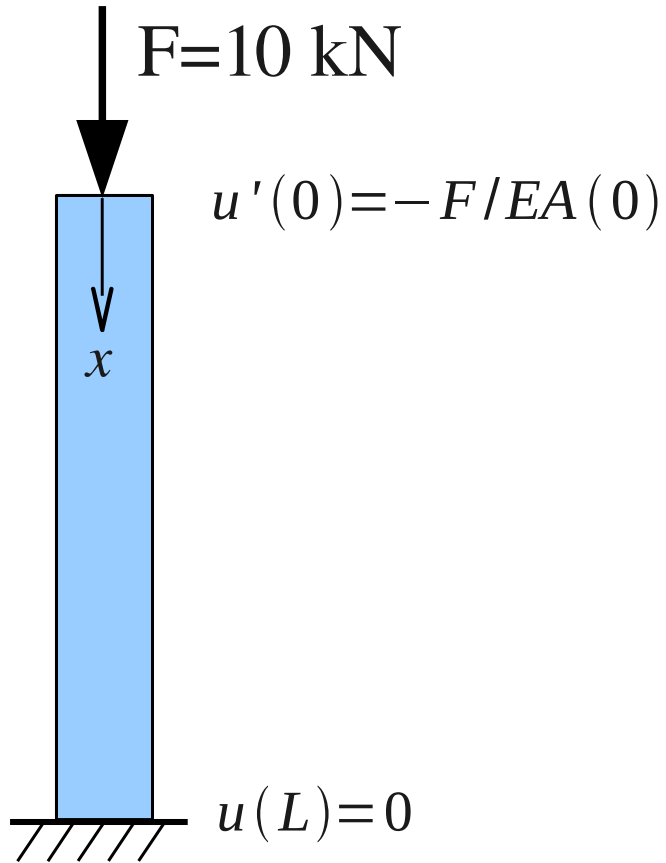


Kinematically neurčitě

Tonitio diagram pro prut



Příklad – sloup zatížený silou a vlastní tíhou



$$L = 8 \text{ m}$$

$$b = 0,4 \text{ m}$$

$$h = 0,6 \text{ m}$$

$$E = 30 \text{ GPa}$$

$$\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$$

$$EA = Ebh = 7,2 \text{ GN}$$

$$f_x = \gamma A = 6 \text{ kN/m'}$$

Výpočet vnitřních sil

$$\frac{dN(x)}{dx} = -f_x$$

$$N(x) = -6x - 10, N(0) = -10 \text{ kN}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{C_1}$

Výpočet posunutí

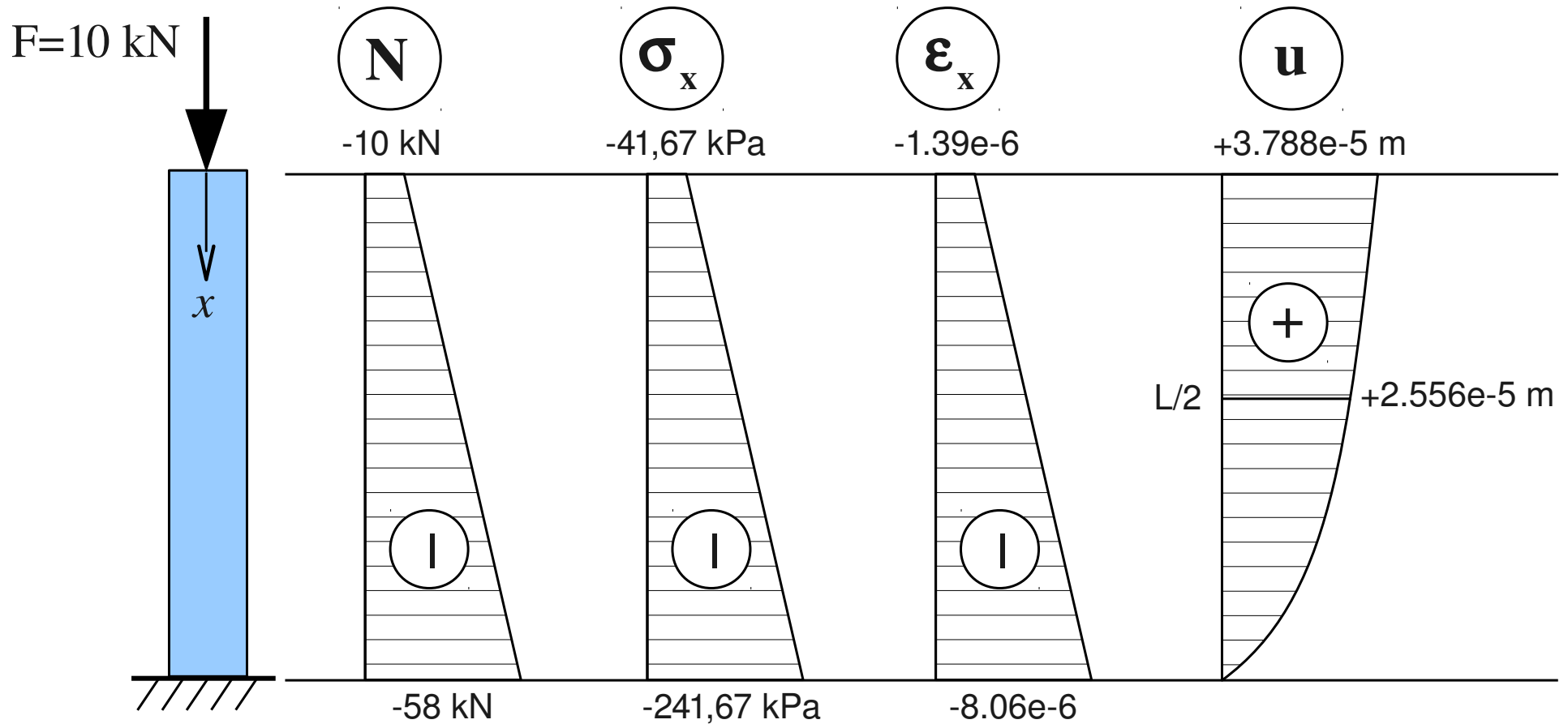
$$EA \frac{du(x)}{dx} = N(x) = -6x - 10$$

$$u(x) = \frac{-3x^2 - 10x}{EA} + C_2$$

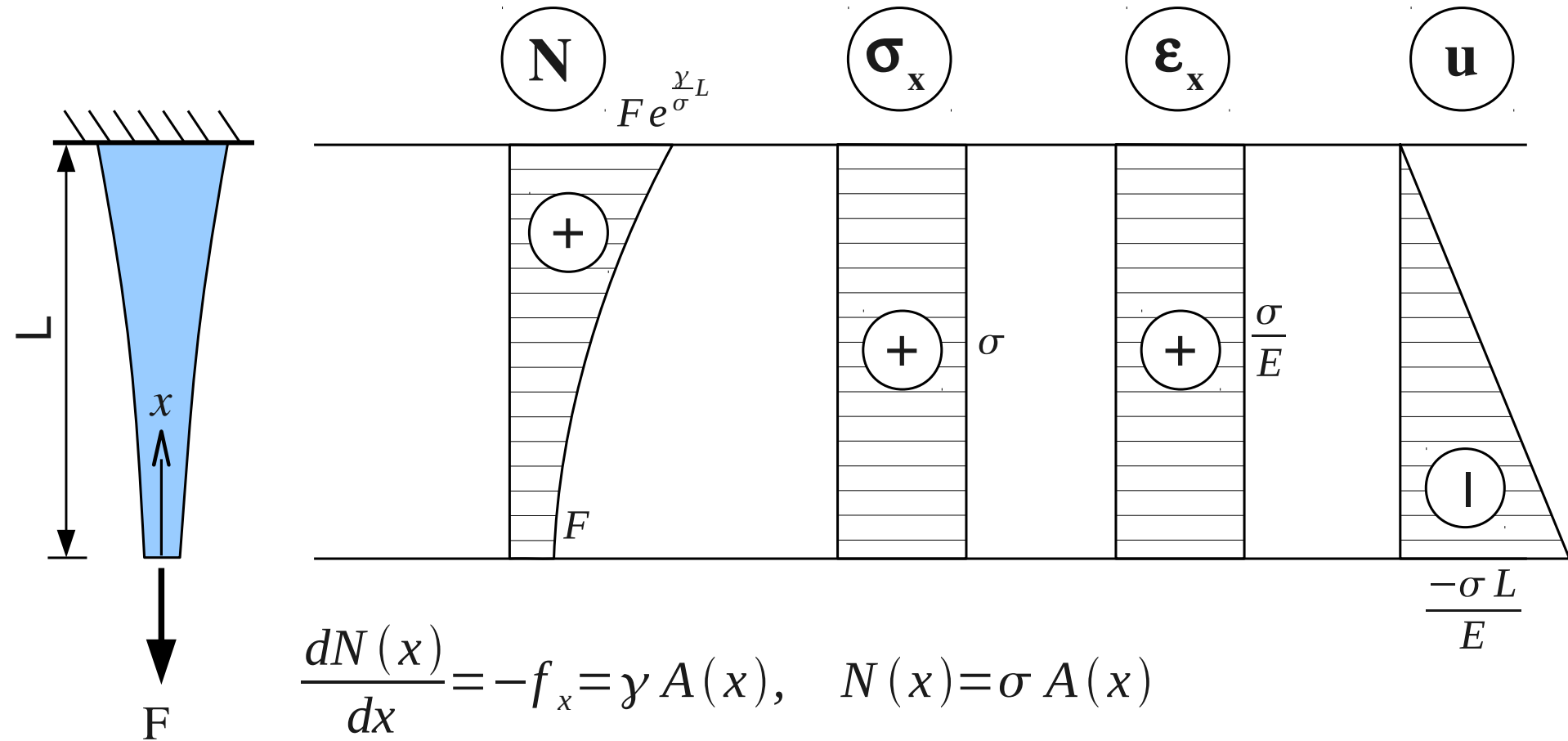
$$u(L) = 0 = \frac{-3 \cdot 8^2 - 10 \cdot 8}{EA} + C_2$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\frac{272}{EA}}$

Příklad – sloup zatížený silou a vlastní tíhou



Prut o konstantním napětí σ



$$\frac{dN(x)}{dx} = -f_x = \gamma A(x), \quad N(x) = \sigma A(x)$$

$$\sigma \frac{dA(x)}{dx} = \gamma A(x), \quad \frac{dA(x)}{A}(x) = \frac{\gamma}{\sigma} dx, \quad \int \frac{dA(x)}{A}(x) = \int \frac{\gamma}{\sigma} dx$$

$$\ln A(x) - \ln C_1 = \frac{\gamma}{\sigma} x, \quad A(x) = C_1 e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}, \quad A(0) = \frac{F}{\sigma} = C_1$$

$$A(x) = \frac{F}{\sigma} e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}, \quad \epsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad u(x) = -\frac{\sigma}{E} (L - x)$$

Vliv teplotních změn pro izotropní materiál na prutu

Při oteplení se většina materiálů roztahuje.

Součinitel délkové teplotní roztažnosti

$$\alpha_T = \frac{1}{L_0} \cdot \frac{dL}{dT} \quad [K^{-1}]$$

$$\varepsilon_T = \alpha_T \Delta T$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T$$

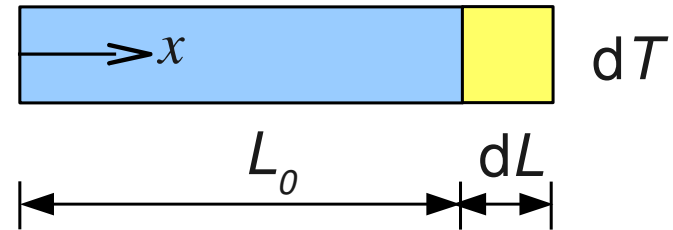
Celková
deformace

Deformace
od napětí

Deformace
od teploty

$$\sigma = E (\varepsilon - \alpha_T \Delta T)$$

$$N = EA (\varepsilon - \alpha_T \Delta T)$$



Materiál	α [$10^{-6} K^{-1}$]
Beton	12
Ocel	11-13
Dřevo	3-6
Plasty	50-180

Vliv teplotních změn pro prizmatický prut

Při rovnoměrném ohřátí prizmatického prutu je napětí a deformace v celém prutu konstantní. Prut zůstane přímý.

$$\Delta L_T = L \alpha_T \Delta T$$

... Protažení od teplotní změny

$$\Delta L = \frac{NL}{EA} + \Delta L_T$$

... Celkové protažení s vlivem síly

$$N = \frac{EA}{L} (\Delta L - \Delta L_T)$$

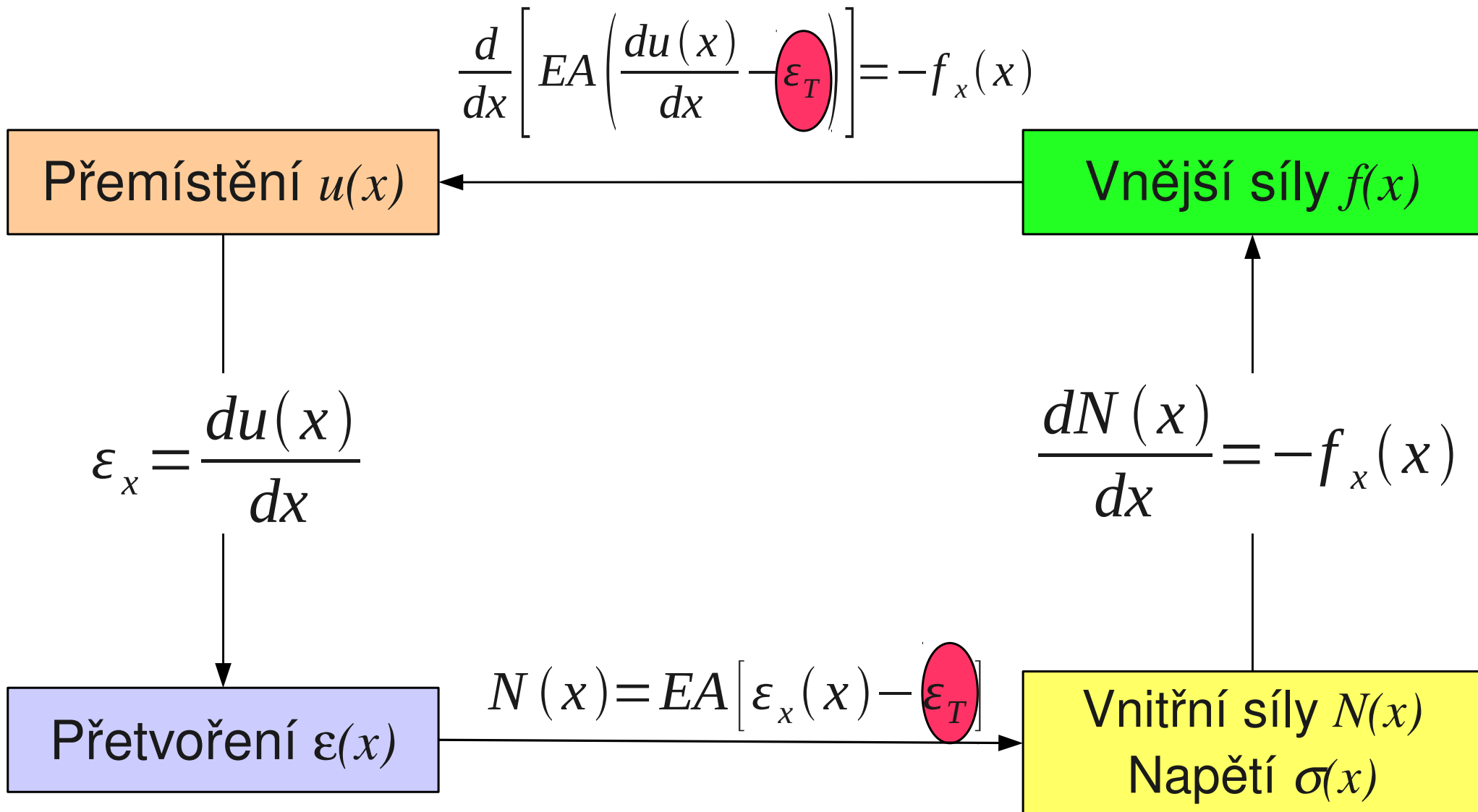
... Normálová síla v prutu

Oboustranně pevně upnutý prut $\Delta L=0$

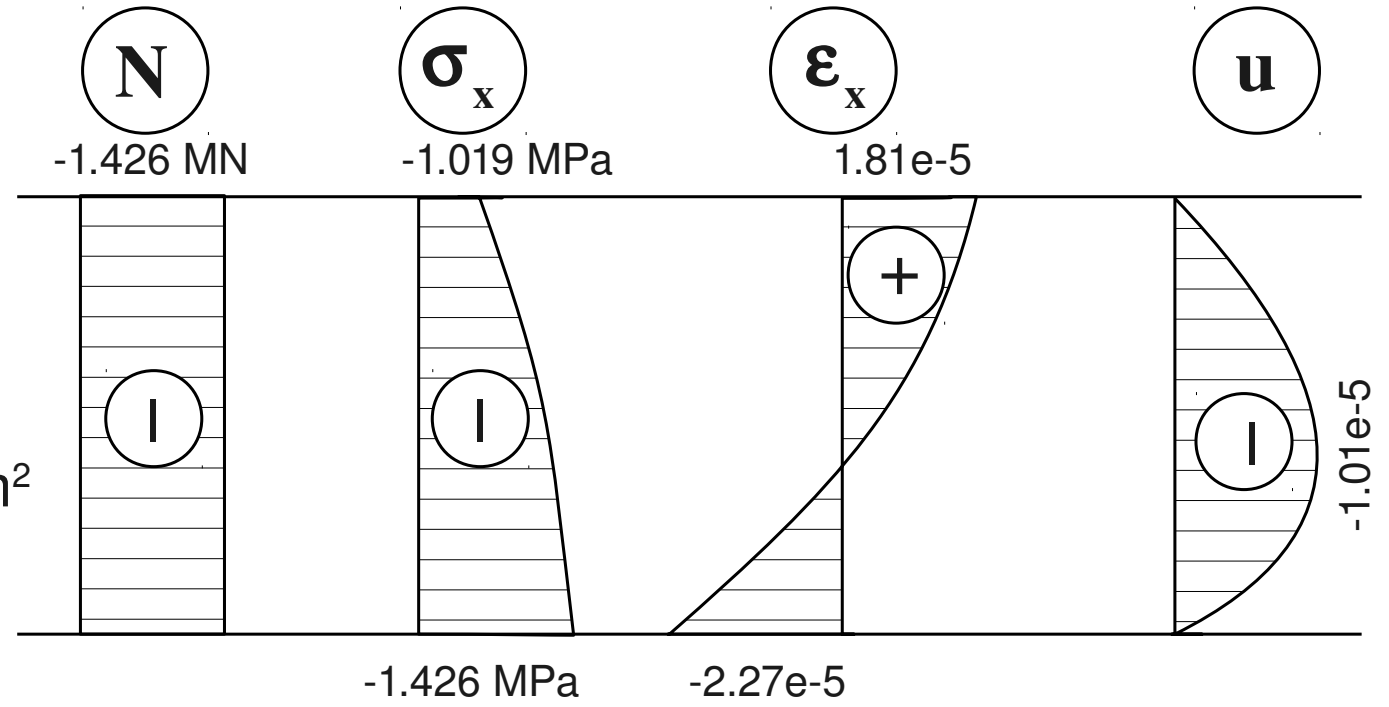
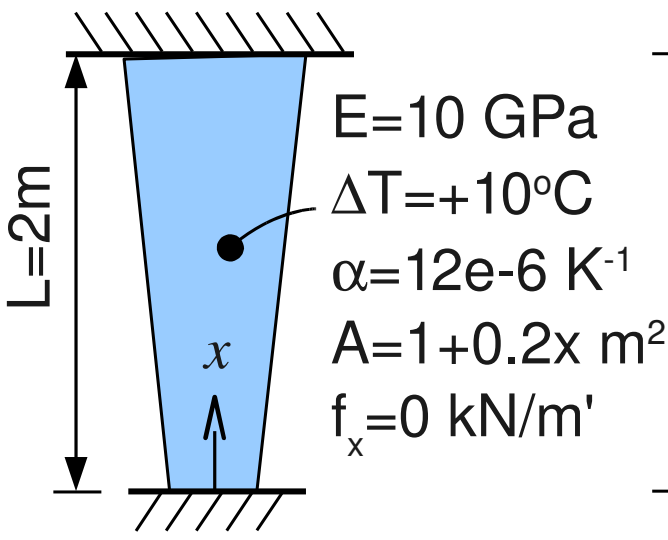
$$N = -EA \alpha_T \Delta T = -EA \varepsilon_T$$

$$\sigma = -E \alpha_T \Delta T$$

Tonitího diagram pro prut s vlivem teploty



Rovnoměrné oteplení neprismatického prutu



$$\frac{dN(x)}{dx} = 0, \quad N = \text{konst. a neznámá}$$

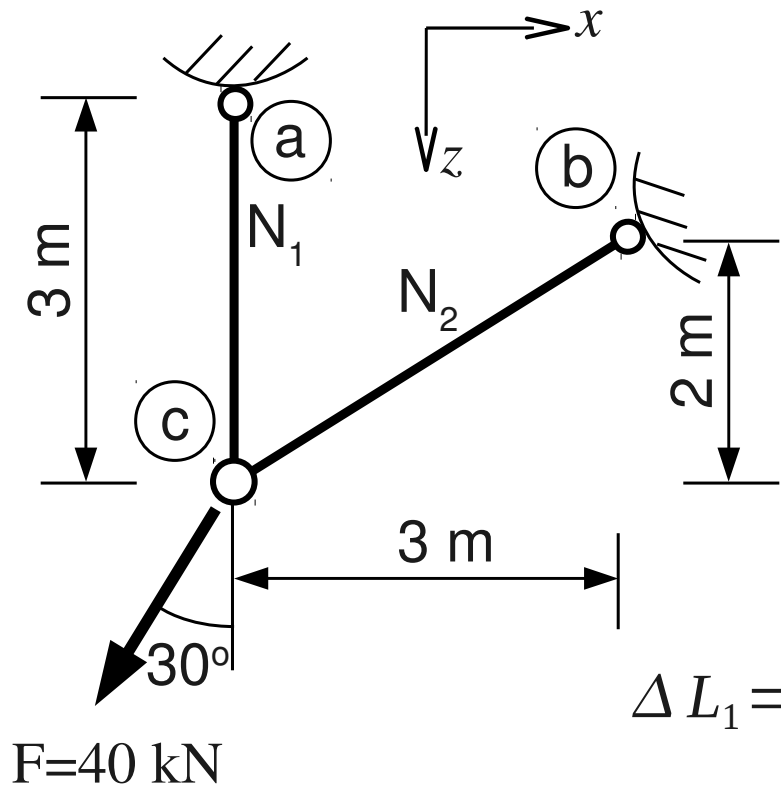
$$\epsilon_x(x) = \frac{N}{EA(x)} + \epsilon_T, \quad \sigma = \frac{N}{A(x)}$$

$$u = \int \epsilon_x(x) dx = \int \frac{N}{EA(x)} + \epsilon_T dx = \frac{N}{E} [5.0 \ln(0.2x + 1)] + \epsilon_T x + \underbrace{C_1}_{=0, u(0)=0}$$

$$u(L) = 0, \quad N = -E \epsilon_T \frac{L}{5.0 \ln(0.2L + 1)} = -1.426\text{ MN}$$

$$u(x) = -7.132\text{e-}4 \ln(0.2x + 1) + 1.2\text{e-}4 x$$

Určete posun styčnicku



$$\curvearrowright b): -3N_1 + 3 \cdot 40 \cos 30^\circ - 2 \cdot 40 \sin 30^\circ = 0$$

$$N_1 = 21.308 \text{ kN}$$

$$\leftarrow: 40 \sin 30^\circ - N_2 \frac{3}{\sqrt{(3^2 + 2^2)}} = 0$$

$$N_2 = 24.037 \text{ kN}$$

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{EA} = \frac{21.308 \cdot 3}{210 \cdot 10^6 \cdot 113.097 \cdot 10^{-6}} = 2.69 \text{ mm}$$

$$\Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{EA} = \frac{24.037 \cdot \sqrt{(3^2 + 2^2)}}{210 \cdot 10^6 \cdot 113.097 \cdot 10^{-6}} = 3.65 \text{ mm}$$



$$E = 210 \text{ GPa}$$

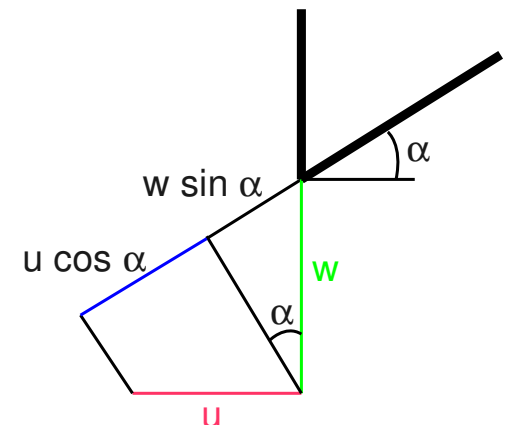
$$A = 113.097 \text{ mm}^2$$

$$w = \Delta L_1 = 2.69 \text{ mm}$$

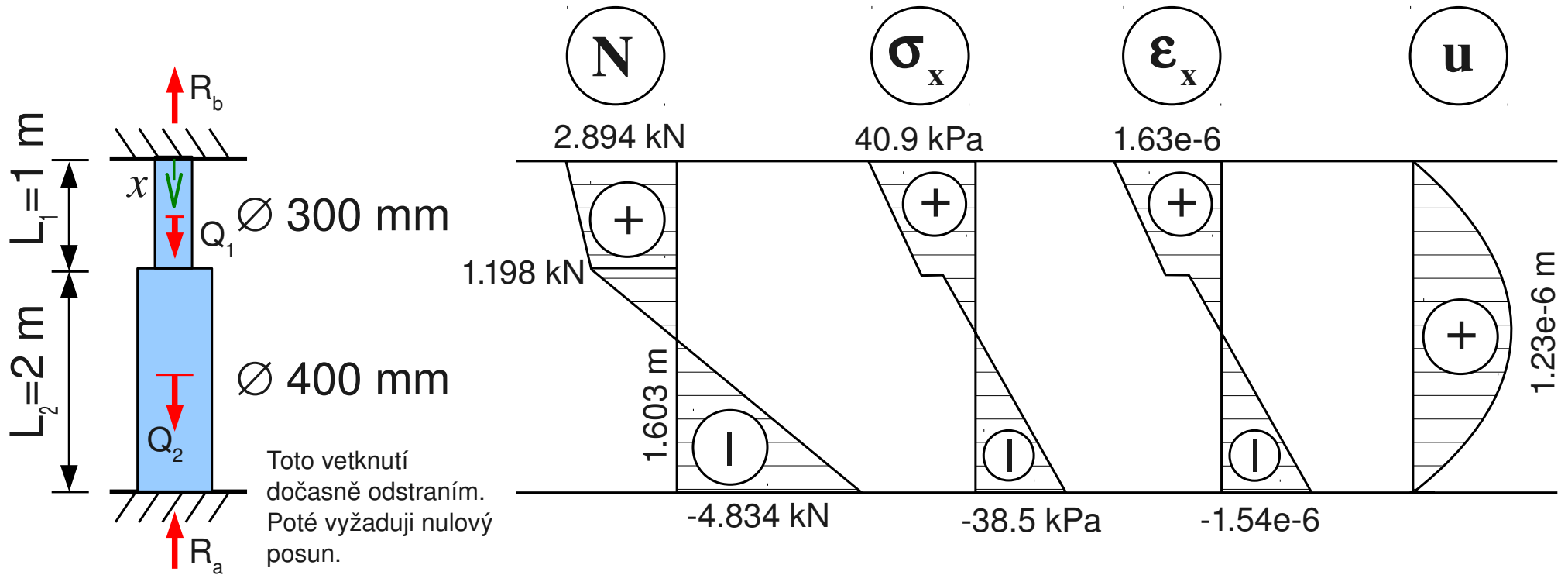
$$\Delta L_2 = w \sin \alpha + u \cos \alpha$$

$$u = (\Delta L_2 - w \sin \alpha) / \cos \alpha$$

$$u = -2.59 \text{ mm}$$



Statically indeterminate bar with its own weight – determination of reactions



Pouze vlastní tíha

$$\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$$

$$E = 25 \text{ GPa}$$

Statická podmínka

$$R_a + R_b - Q_1 - Q_2 = 0$$

$$Q_1 = \gamma A_1 L_1 = 24 \pi 0.15^2 \cdot 1 = 1.696 \text{ kN}$$

$$Q_2 = \gamma A_2 L_2 = 24 \pi 0.2^2 \cdot 2 = 6.032 \text{ kN}$$

Deformační (přetvárná) podmínka

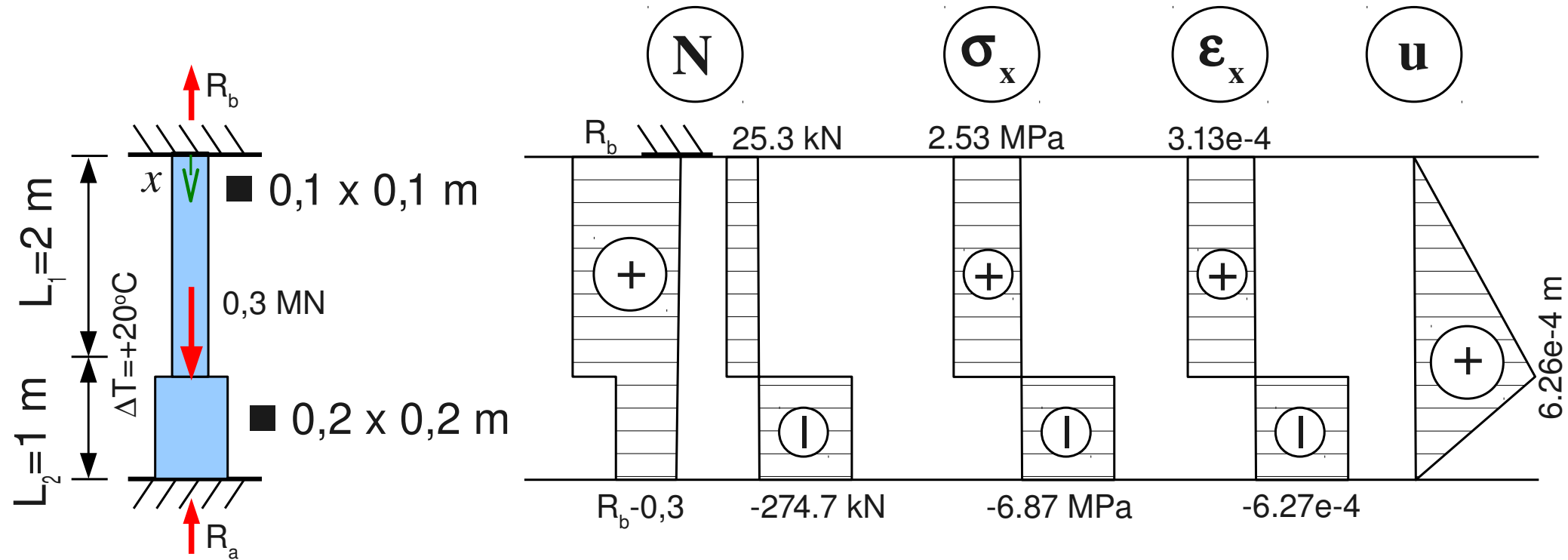
$$u(3) = 0, \quad u(3) = \Delta L_1 + \Delta L_2 = 0$$

$$\Delta L_1 = \frac{\gamma L_1^2}{2E} - \frac{(R_a - Q_2) L_1}{EA_1}$$

$$\Delta L_2 = \frac{\gamma L_2^2}{2E} - \frac{R_a L_2}{EA_2}$$

$$R_a = 4.834 \text{ kN}, \quad R_b = 2.894 \text{ kN}$$

Statically indeterminate bar – determination of reactions



$E = 10 \text{ GPa}$
 $\alpha = 3e-6 \text{ K}^{-1}$

Deformační (přetvárná) podmínka

$$u(3) = 0, \quad u(3) = \Delta L_1^N + \Delta L_2^N + \Delta L^T = 0$$

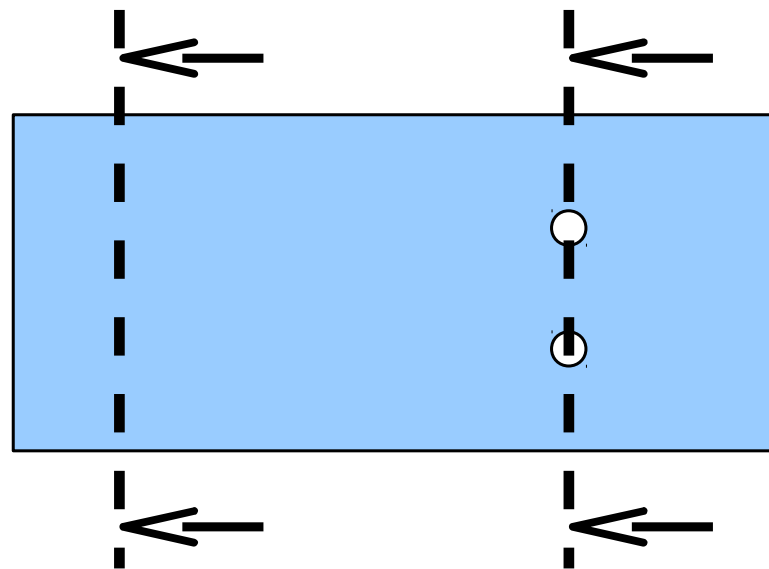
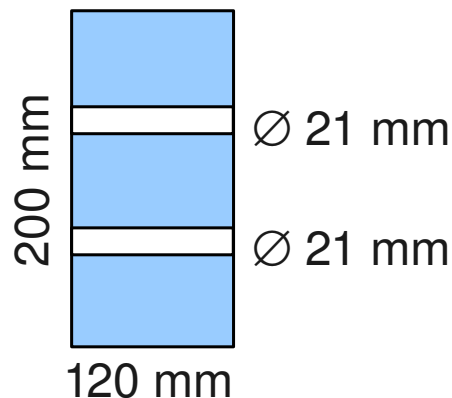
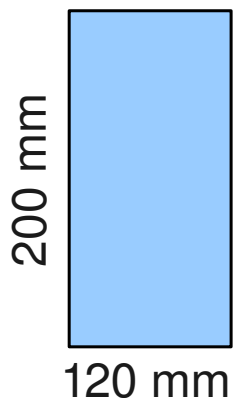
$$\frac{2 R_b}{10000 \cdot 0.1^2} + \frac{1(R_b - 0.3)}{10000 \cdot 0.2^2} + 3e-6 \cdot 20 \cdot 3 = 0$$

$$0.0225 R_b = 0.00057, \quad R_b = 0.02533 \text{ MN}$$

$$\sigma_1 = \frac{0.02533}{0.1^2} = 2.53 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \frac{-0.2747}{0.2^2} = -6.87 \text{ MPa}$$

Posouzení únosnosti průřezu

- Posudte únosnost plného a oslabeného průřezu



Plný průřez

$$f_d = 8 \text{ MPa}$$

$$N_{Rd} = 0.12 \cdot 0.2 \cdot 8000 = 192 \text{ kN}$$

Průřez oslabený otvory pro svorníky

$$N_{Rd} = (0.12 \cdot 0.2 - 2 \cdot 0.021 \cdot 0.12) \cdot 8000 = 151.7 \text{ kN}$$

Otázky

1. Kolik je komponent napětí u obecného 3D tělesa?
2. Které tři rovnice používáme při popisu chování prutu a co popisují?
3. Čím se liší přemístění a přetvoření?
4. Co je výslednicí normálového napětí po průřezu?
5. Definujte Poissonovo číslo a Youngův modul pružnosti. Jaké jsou jejich hodnoty pro běžné stavební materiály?
6. O kolik se zmenší objem prizmatického prutu při působení konstantního tahového napětí (známe A , N , E , ν)?
7. Jakého řádu jsou posuny a přetvoření na prizmatickém prutu zatíženém pouze na okrajích a při zatížení vlastní tíhou?
8. Kolik okrajových podmínek lze definovat na obecné rovnici pro jednoosou napjatost?
9. Kolik lineárně nezávislých podmínek umíme definovat na okrajích prutu? Jsou tyto podmínky statické, kinematické, nebo jejich kombinace?
10. Jak se projeví vliv teploty v geometrických rovnicích?
11. Umíme z pole posunů jednoznačně určit přetvoření? A naopak?
12. Jsou geometrické rovnice algebraického či diferenciálního tvaru?

Created 02/2011 in OpenOffice 3.2, Ubuntu 10.04 by Vít Šmilauer.

Poděkování patří zejména M. Jiráskovi za inspiraci jeho přednáškami.