

# Přednáška 02

## Prostý ohyb

Hypotéza o zachování rovinnosti průřezu

Křivost prutu, vztah mezi momentem a křivostí

Rozložení napětí při ohybu

Pružný průřezový modul

Vliv teploty na křivost

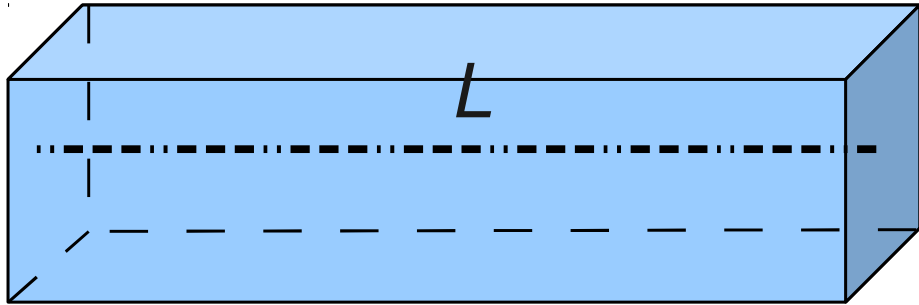
Copyright (c) 2011 Vít Šmilauer

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Mechanics, Czech Republic

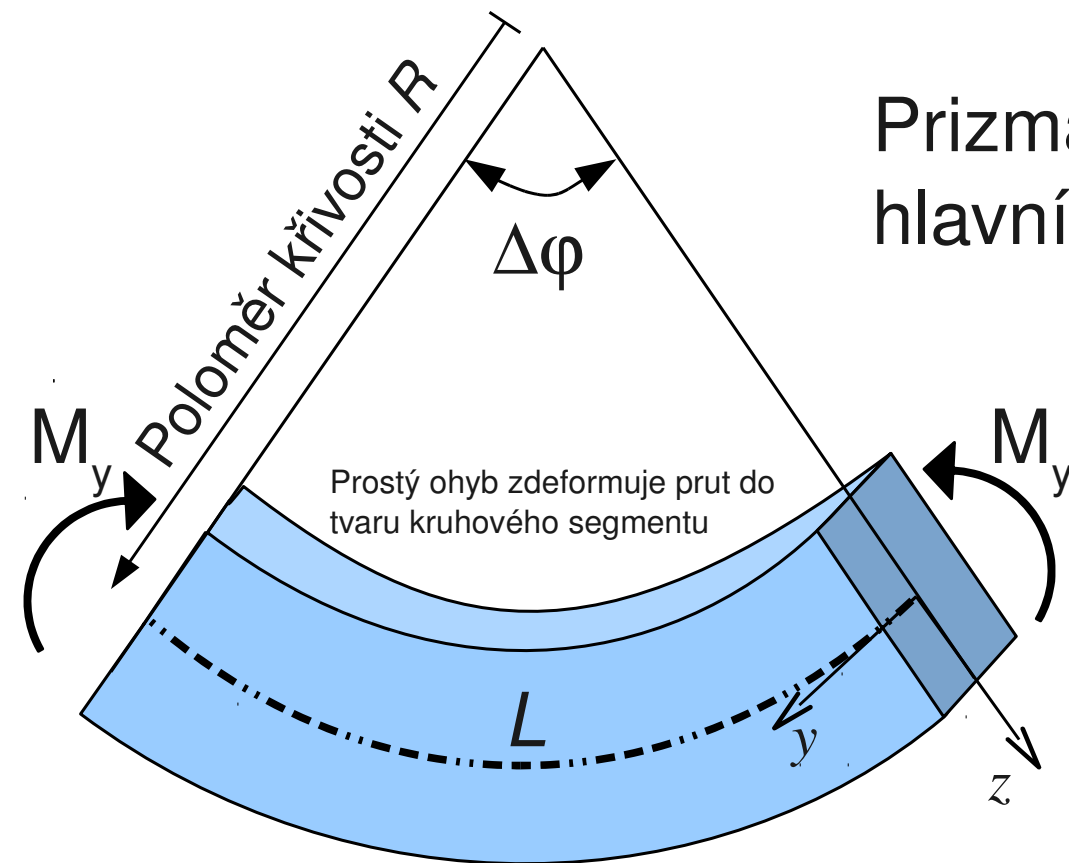
Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License" found at <http://www.gnu.org/licenses/>

# Rovnoměrně ohýbaný prut

- Uvažujme prostý ohyb pouze od momentu  $M_y$  (absence  $V_z$ )



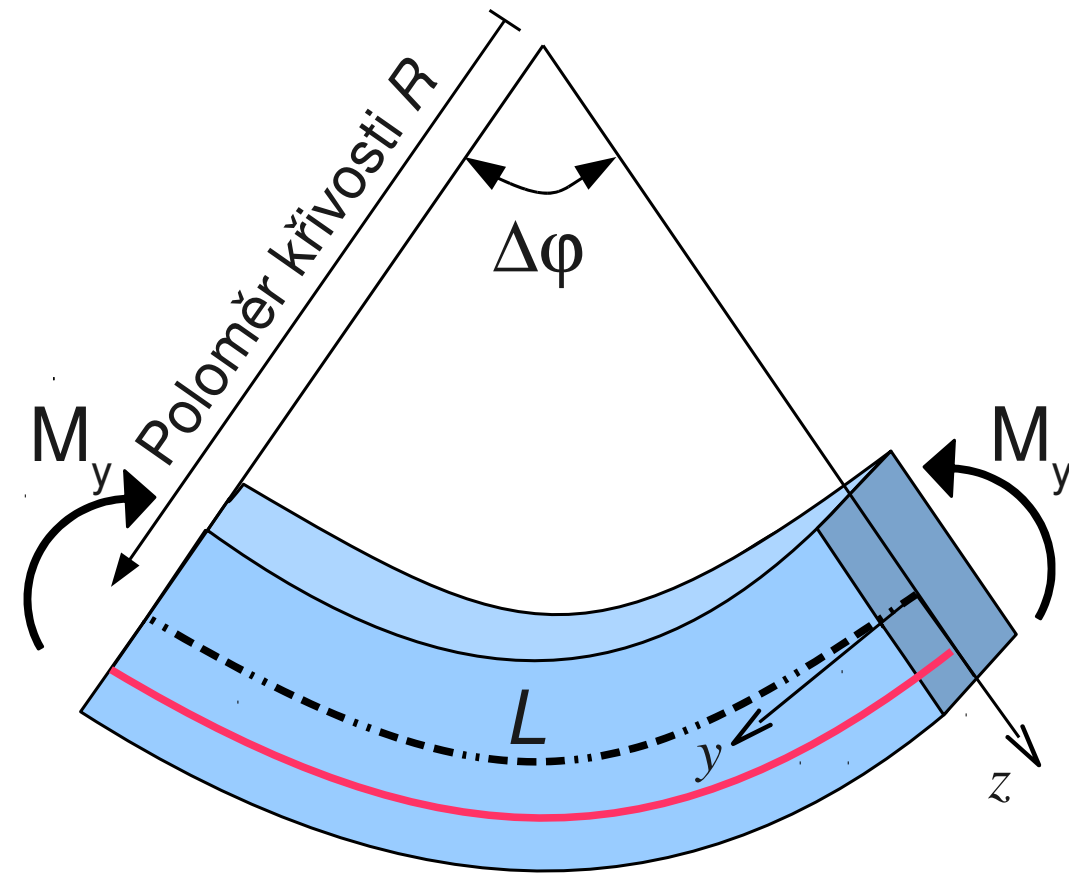
Původní délka střednice prutu  $L$



Prismatický prut, čistý ohyb okolo hlavní centrální osy setrvačnosti  $y$ .

Nezměněná délka střednice  
 $L = R \cdot \Delta\phi$

# Rovnoměrně ohýbaný prut



Protažení vlákna  $\Delta L = z \cdot \Delta \varphi$

Nová délka vlákna

$$L + \Delta L = (R + z) \Delta \varphi$$

Relativní prodloužení vlákna

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L} = \frac{z \Delta \varphi}{R \Delta \varphi} = \frac{z}{R} = \frac{1}{R} z = \kappa \cdot z$$

$$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{\Delta \varphi}{L} \dots \text{Křivost prutu}$$

$$\varepsilon_x(z) = \kappa \cdot z$$

Na rovnoměrně ohýbaný prut lze pohlížet jako na soustavu vláken, které se chovají jako 1D prut. Příčné deformace vláken a příčná napětí se obvykle zanedbávají.

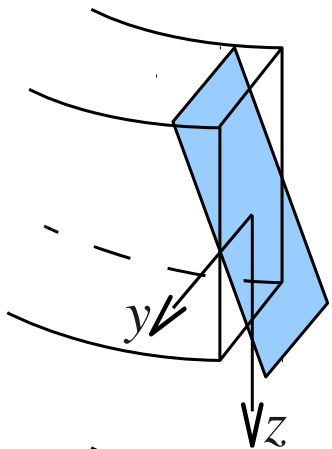
# Rovnoměrně ohýbaný prut

Lineární změně deformace po výšce průřezu

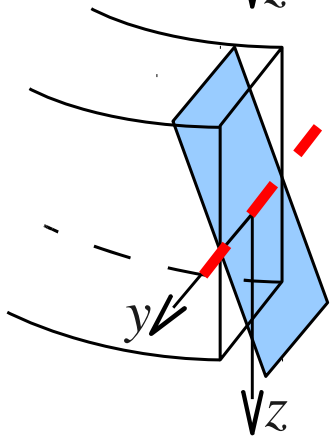
$$\varepsilon_x(z) = \kappa \cdot z$$

odpovídá lineární změna napětí po výšce průřezu dle Hookeova zákona

$$\sigma_x(z) = E \varepsilon_x(z) = E \kappa \cdot z$$



Rozložení deformace  $\varepsilon_x$  po průřezu

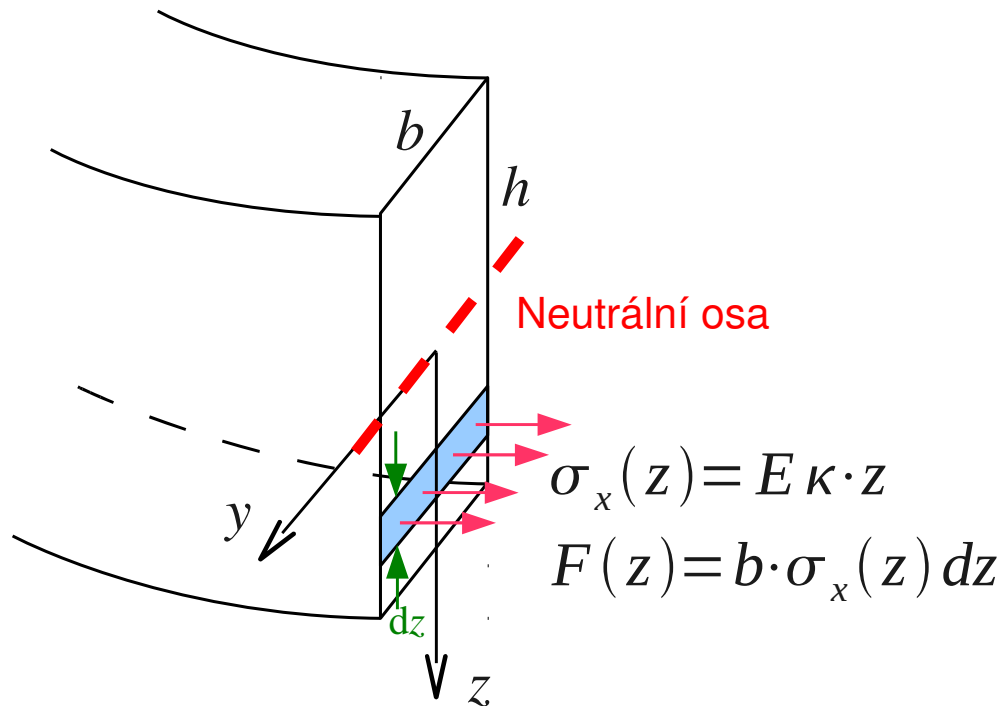


Neutrální osa průřezu – nulové napětí. Pro prostý ohyb vždy prochází těžištěm.

Rozložení napětí  $\sigma_x$  po průřezu

# Rovnoměrně ohýbaný prut

Z podmínky rovnováhy vnitřních sil plyne, že výslednice napětí se rovná momentu  $M_y$



Příspěvek vlákna k momentu  
 $z \cdot F(z) = z \cdot b \cdot \sigma_x(z)$

Ohybový moment k hlavní  
centrální ose  $y$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot b \cdot \sigma_x(z) dz$$

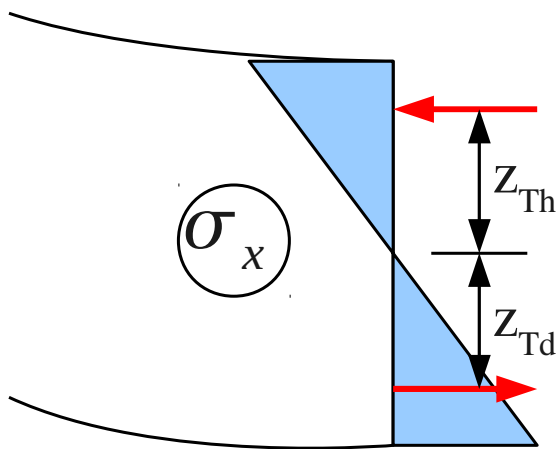
# Ohybový moment a křivost prutu

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot \underbrace{b \cdot \sigma_x(z)}_{E \kappa \cdot z} dz = E \kappa \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} b z^2 dz}_{I_y = \iint_A z^2 dA} = E I_y \kappa$$

Pro obdélníkový průřez

$$I_y = \int_{-h/2}^{h/2} b z^2 dz = b \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{z=-h/2}^{z=+h/2} = b \left( \frac{(h/2)^3}{3} - \frac{(-h/2)^3}{3} \right) = \frac{bh^3}{12}$$

$$M_y = z_{Td} \underbrace{b \int_{-h/2}^0 \sigma_x(z) dz}_{F_d} + z_{Th} \underbrace{b \int_0^{h/2} \sigma_x(z) dz}_{F_h} = z_{Td} F_d + z_{Th} F_h$$



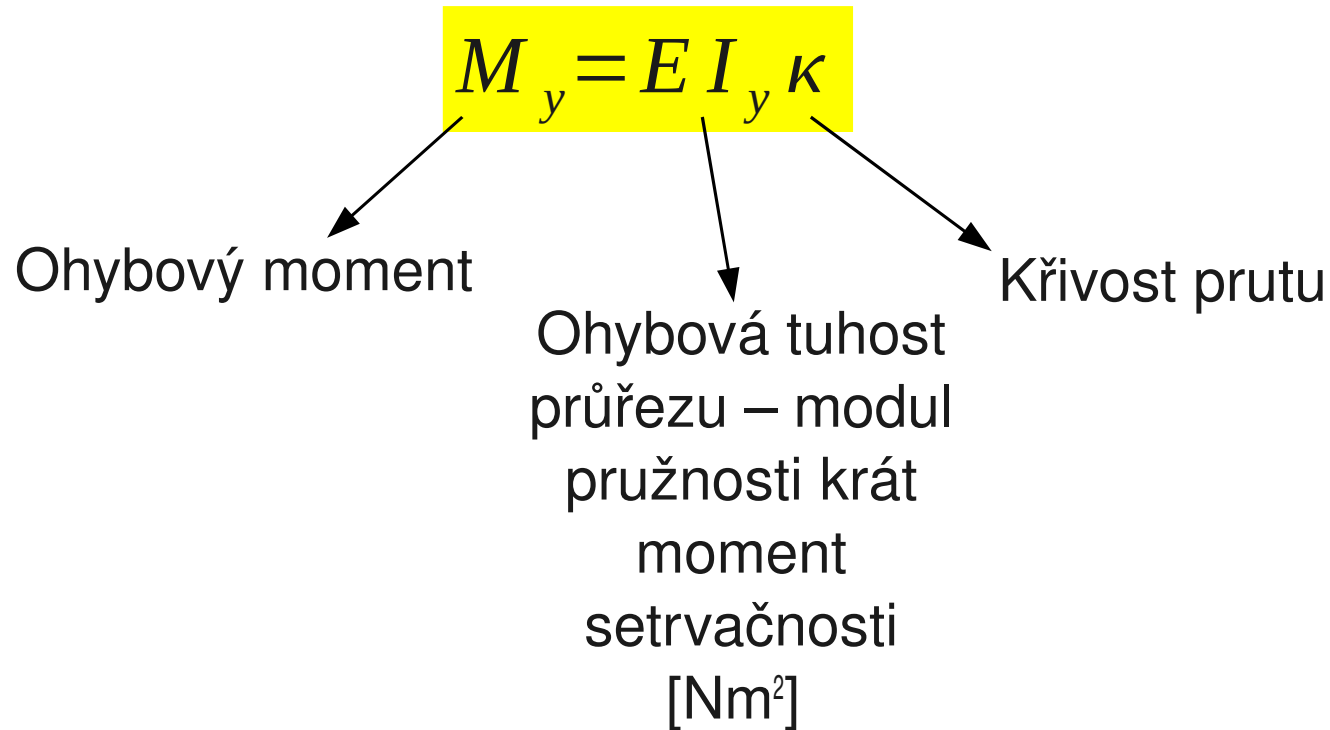
$$F_h = b \int_0^{h/2} \sigma_x(z) dz$$

$$N = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(z) dz = 0$$

$$F_d = F_h$$

$$F_d = b \int_{-h/2}^0 \sigma_x(z) dz$$

# Rekapitulace vztahů pro rovnoměrný prostý ohyb



$$\kappa = \frac{\Delta \varphi}{L}$$

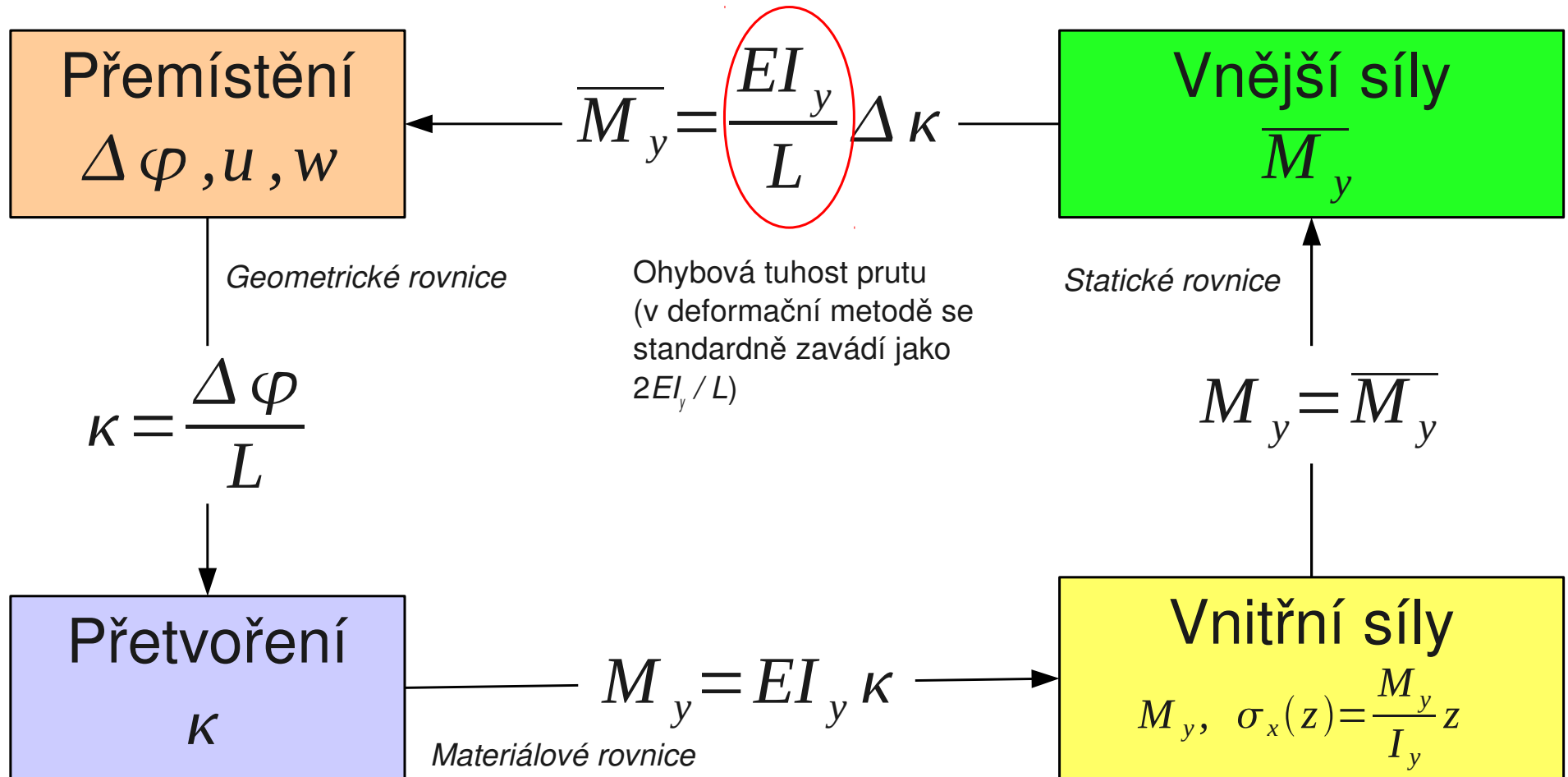
$$\varepsilon_x(z) = \kappa \cdot z$$

$$M_y = EI_y \kappa, \quad \kappa = \frac{M_y}{EI_y}$$

$$\sigma_x(z) = E \kappa \cdot z = \frac{M_y}{I_y} z$$

Uvedené vzorce platí pouze pro prostý ohyb okolo hlavních centrálních os setrvačnosti. V ostatních případech se jedná o ohyb složený nebo o ohyb s účinkem normálové síly. Obojí bude probíráno v dalších přednáškách.

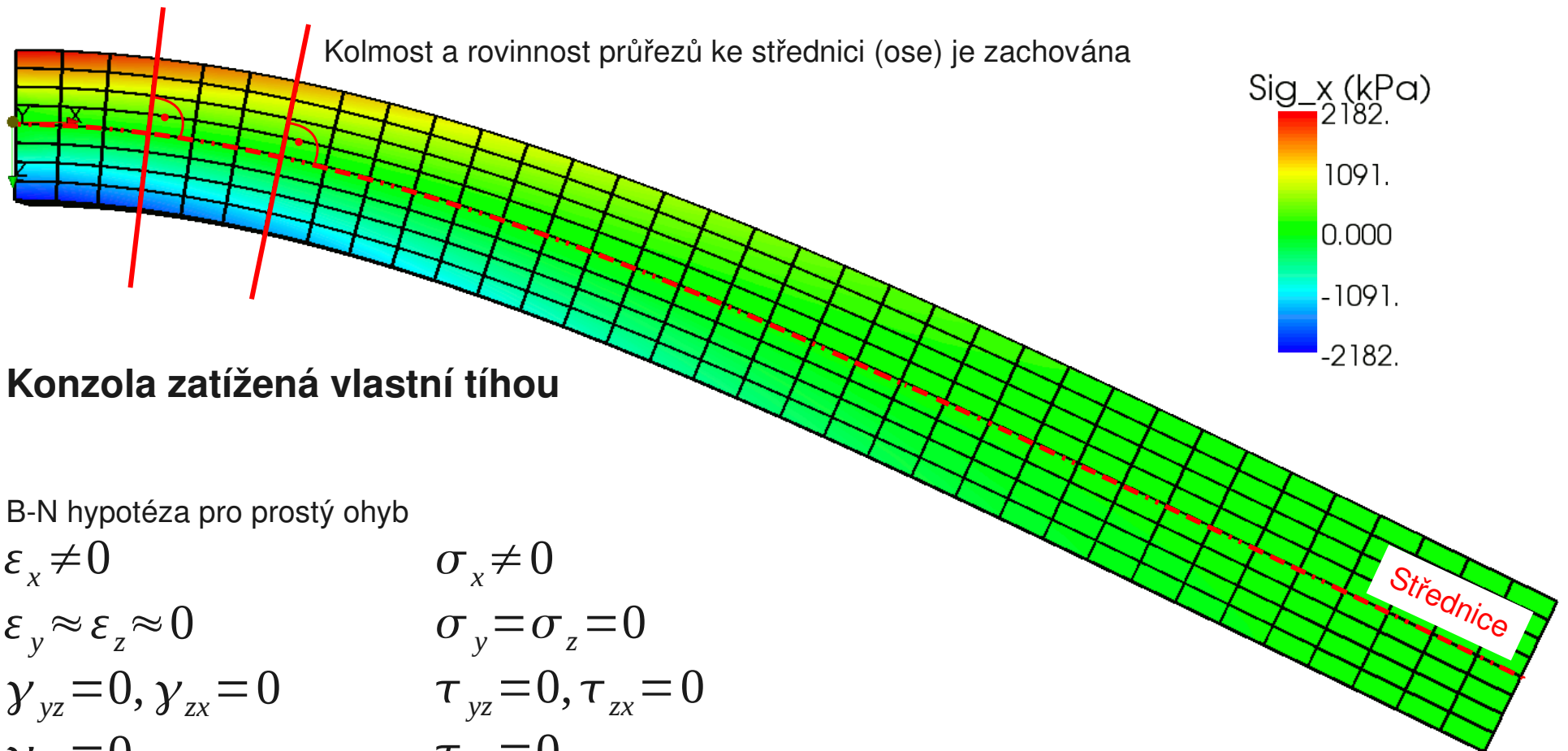
# Toného diagram pro rovnoměrně ohýbaný prut



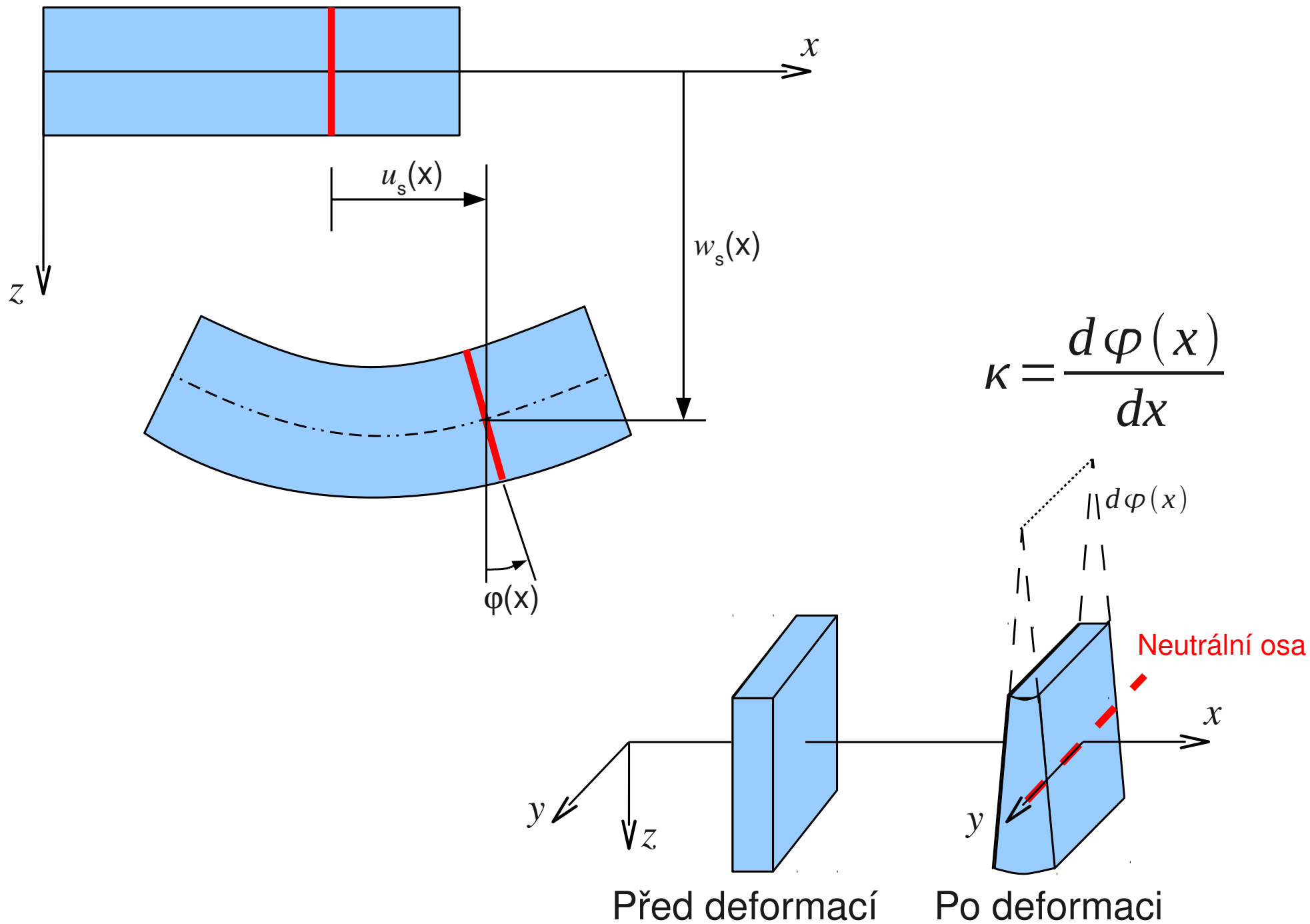


# Bernoulli-Navierova hypotéza

- Průřezy **rovinné a kolmé** k ose prutu (střednici) před deformací zůstanou **rovinné a kolmé** k deformované ose
- B-N hypotéza přestává platit u krátkých nosníků, které jsou namáhány více smykem než ohybovým momentem



# Přemístění průřezu v rovině $xz$ (ohyb $M_y$ )



# Prostý ohyb – vliv změny ohybového momentu

Rovnoměrný ohyb

$$\kappa = \frac{\Delta \varphi}{L}$$

$$\varepsilon_x(z) = \kappa \cdot z$$

$$M_y = EI_y \kappa$$

$$\kappa = \frac{M_y}{EI_y}$$

$$\sigma_x(z) = E \kappa \cdot z = \frac{M_y}{I_y} z$$

Nerovnoměrný ohyb

$$\kappa(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx}$$

$$\varepsilon_x(x, z) = \kappa(x) \cdot z$$

$$M_y(x) = EI_y(x) \kappa(x)$$

$$\kappa(x) = \frac{M_y(x)}{EI_y(x)}$$

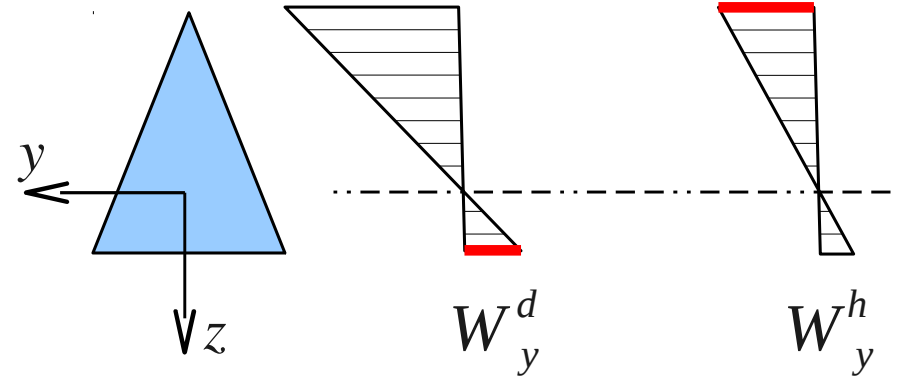
$$\sigma_x(x, z) = E \kappa(x) \cdot z = \frac{M_y(x)}{I_y(x)} z$$

# Elastický průřezový modul $W_y$ [m<sup>3</sup>]

- Pro zrychlení výpočtu se zavádí průřezové moduly

$$W_y^d = \frac{I_y}{|z^d|}, \quad |\sigma_x^d| = \frac{|M_y|}{W_y^d}$$

$$W_y^h = \frac{I_y}{|z^h|}, \quad |\sigma_x^h| = \frac{|M_y|}{W_y^h}$$

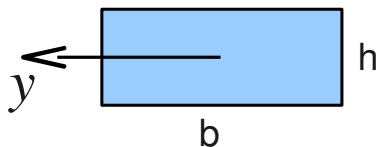


Častá chyba: záměna  $W_y^d$  a  $W_y^h$ !

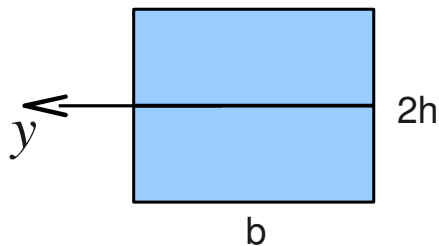
- Pro obdélníkový průřez

$$W_y^d = W_y^h = \frac{I_y}{h/2} = \frac{2bh^3}{12h} = \frac{bh^2}{6}$$

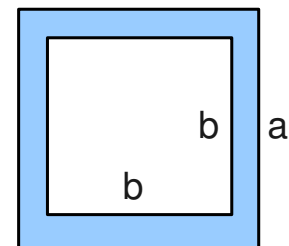
- Průřezové moduly nelze obecně superponovat!



$$W_y^d = W_y^h = \frac{bh^2}{6}$$

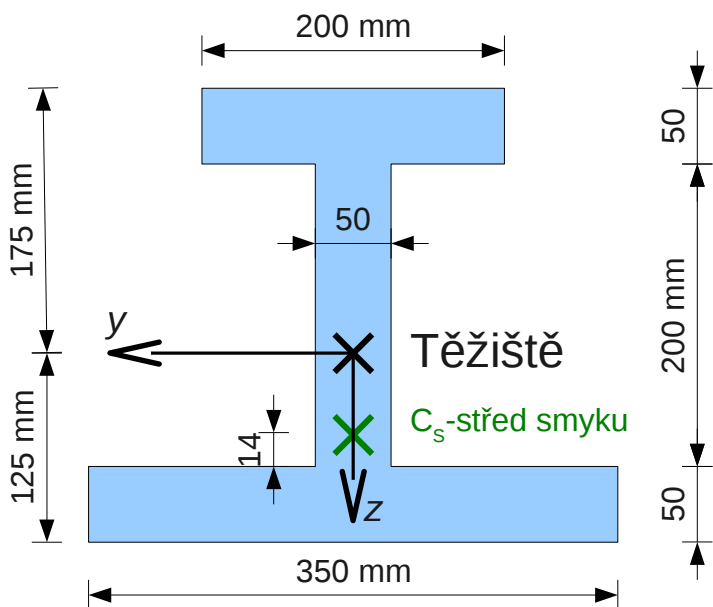


$$W_y^d = W_y^h = \frac{b(2h)^2}{6} = \frac{2bh^2}{3} \neq 2 \frac{bh^2}{6}$$



$$W_y^d = W_y^h = \frac{a^4 - b^4}{6a} \neq \frac{1}{6}(a^3 - b^3)$$

# Příklad – napětí za prostého ohybu



$$A = 0,0375 \text{ m}^2$$

$$I_y = 4,453125 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_z = 2,140625 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

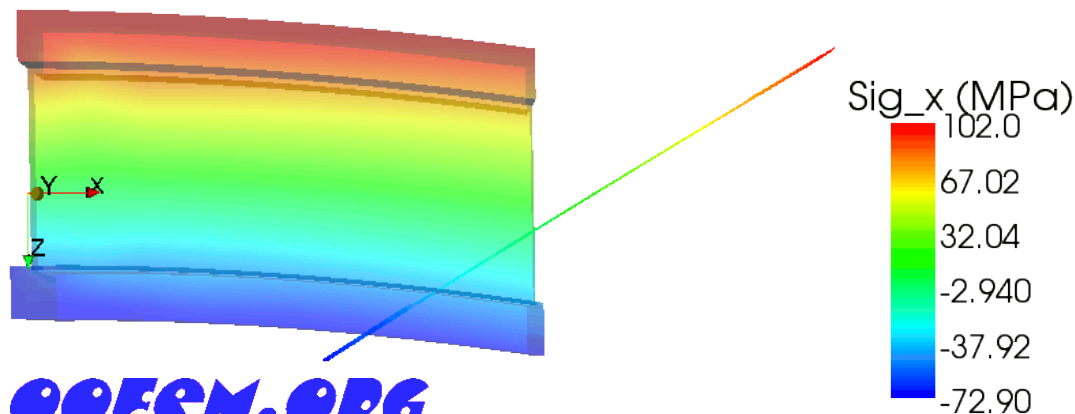
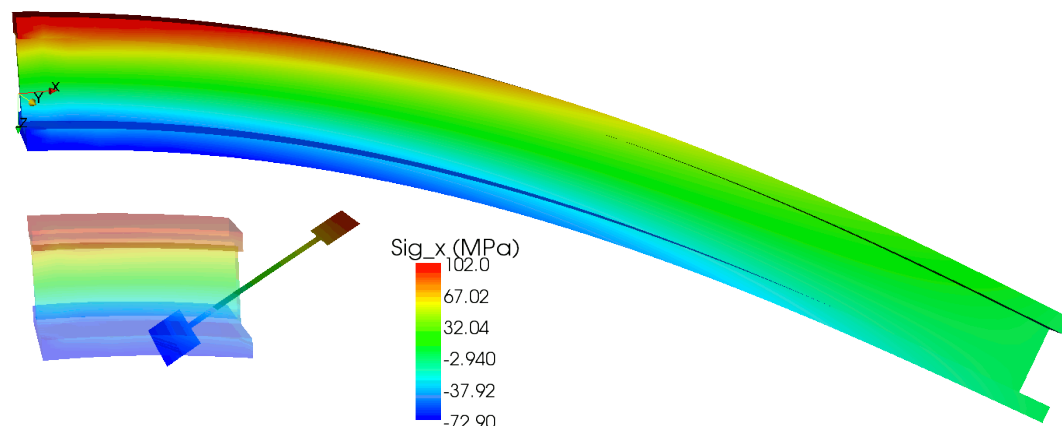
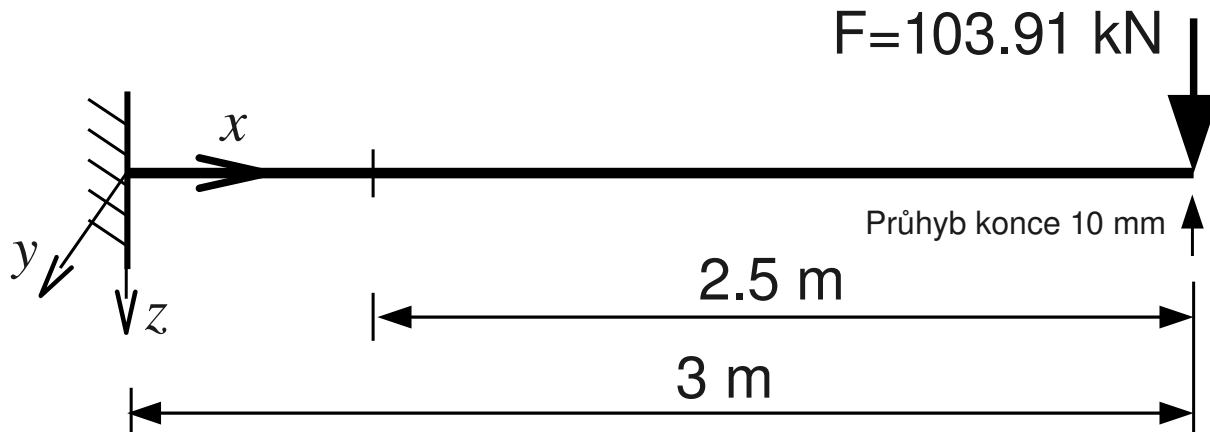
$$M_y(0.5) = -103.91 \cdot 2.5 = -259.774 \text{ kNm}$$

$$\sigma_x(z) = -259.774 \cdot \frac{3}{4.453125 \cdot 10^{-4}} - 4z = -583.35 z \text{ MPa}$$

$$\sigma_x(0.125) = -72.92 \text{ MPa}$$

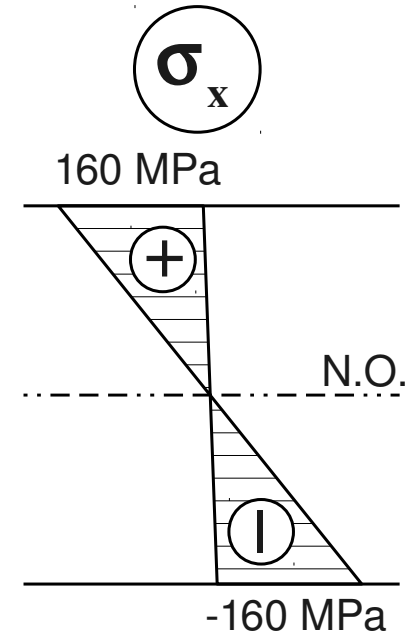
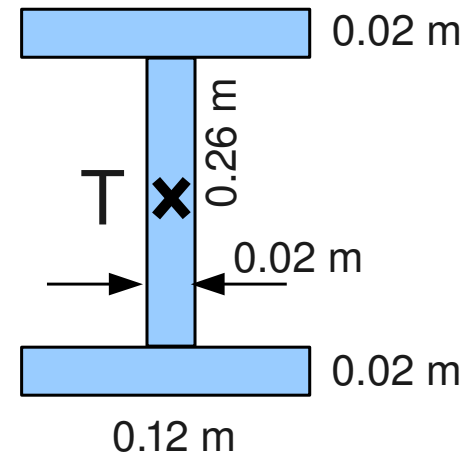
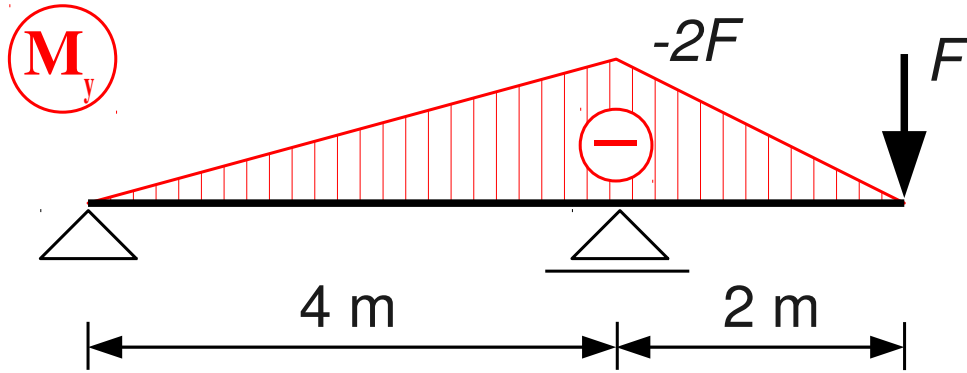
$$\sigma_x(0.175) = 102.1 \text{ MPa}$$

Výpočet pomocí průřezových modulů



# Příklad – maximální napětí

- Jak velká síla  $F$  může namáhat nosník, aby největší napětí nepřestoupilo  $f_y = 160$  MPa?



$$\max M_y = -2F$$

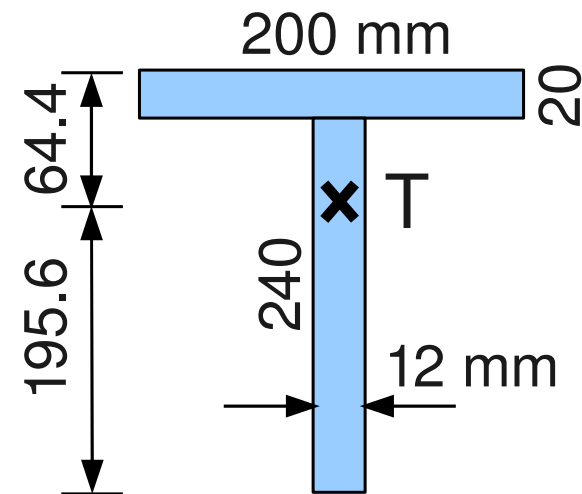
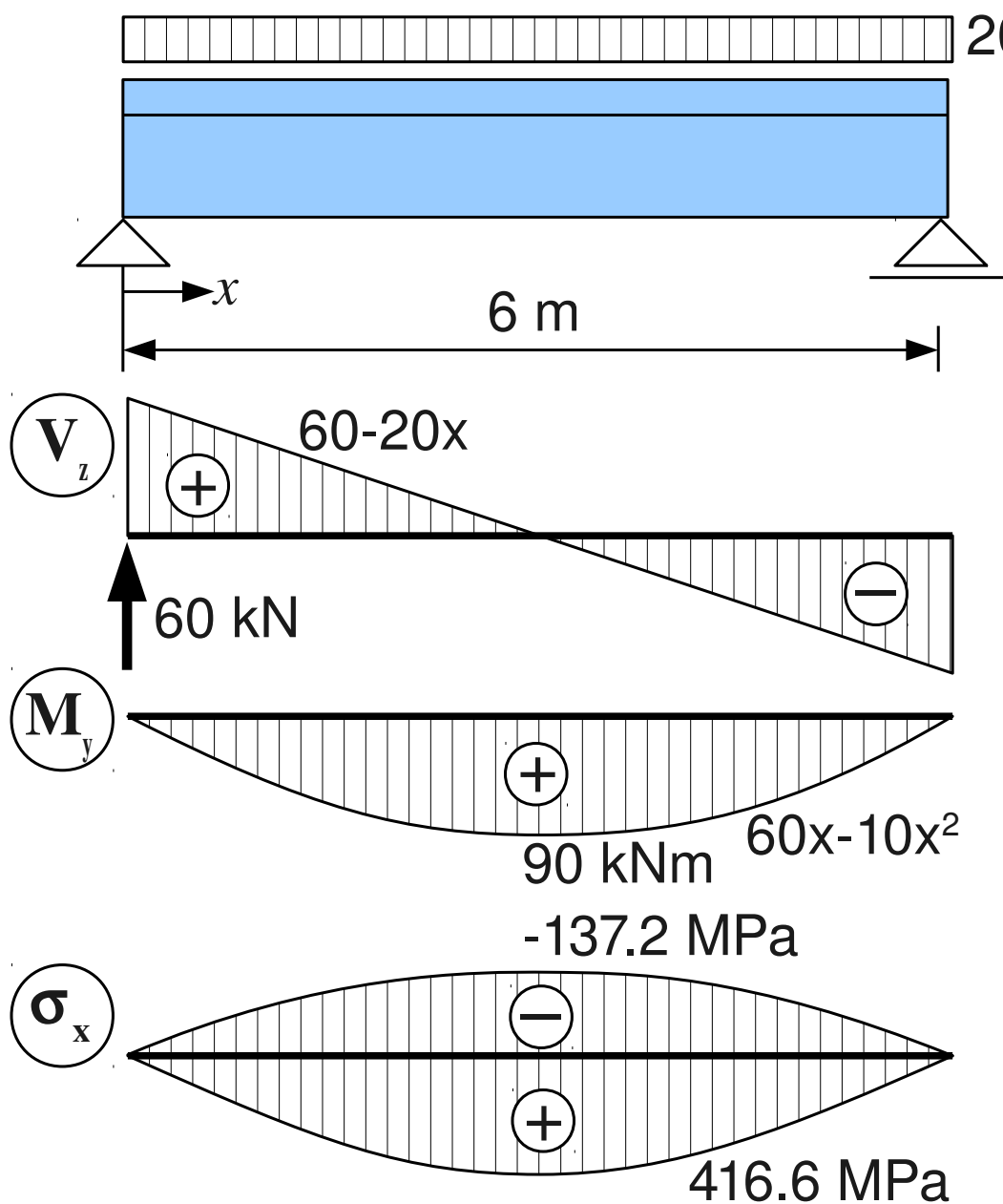
$$I_y = 1.235e-4 \text{ m}^4$$

$$W_y = \frac{1.235e-4}{0.15} = 8.2355e-4 \text{ m}^3$$

$$f_y = \frac{|-2F|}{W_y}, \quad F = \frac{f_y W_y}{2} = 65.88 \text{ kN}$$

# Příklad – průběh normálového napětí

- Vykreslete průběh  $\sigma_x(x)$  na dolních a horních vláknech



$$I_y = 4.2255e-5 \text{ m}^4$$

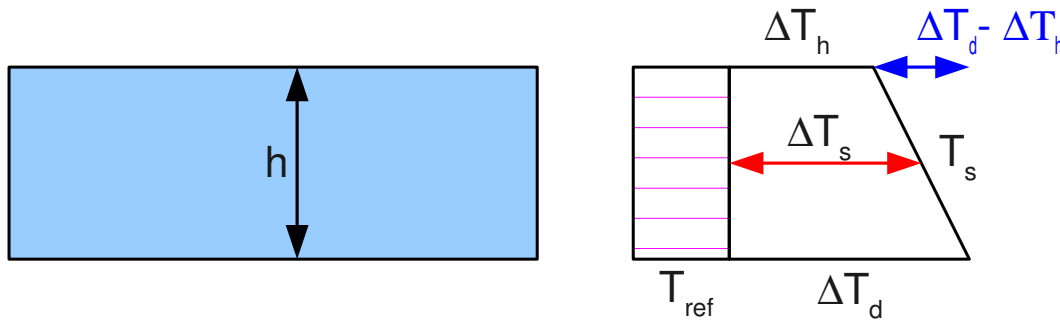
$$\sigma_x(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z = \frac{60x - 10x^2}{4.2255e-5} z$$

$$\sigma_x(3, -0.0644) = -137.2 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x(3, 0.1956) = 416.6 \text{ MPa}$$

# Vliv teplotních změn na ohyb nosníku

- Obvykle se uvažuje konstantní teplota každého vlákna a lineární průběh po výšce nosníku



$\Delta T_h$  ... změna teploty horních vláken

$\Delta T_s$  ... změna teploty střednice

$T_{ref}$  ... referenční teplota

$\Delta T_h$  ... změna teploty dolních vláken

$\Delta T_d - \Delta T_h$  ... nerovnoměrné oteplení

$$\Delta T(x, z) = \Delta T_s + \frac{\Delta T_d - \Delta T_h}{h} z$$

Změna teploty  
v obecném bodě

Změna teploty ve  
střednici

Teplotní gradient  
po výšce prutu



# Vliv teplotních změn na ohyb nosníku

- Deformace způsobená změnou teploty

$$\varepsilon_T(x, z) = \alpha_T \Delta T(x, z) = \alpha_T \Delta T_s(x) + \alpha_T \frac{\Delta T_d - \Delta T_h}{h} z = \varepsilon_{Ts} + \kappa_T z$$



Poměrné protažení  
od oteplení  
v obecném bodě



Poměrné protažení  
střednice od  
„průměrného“  
oteplení



Křivost od teplotního  
gradientu

- Roli hraje změna teploty oproti referenční teplotě

$$\sigma(x, z) = E[\varepsilon(x, z) - \varepsilon_T(x, z)] = E[\varepsilon_s(x) - \varepsilon_{Ts}] + E[\kappa(x) - \kappa_T] z$$

Protažení střednice

Změna křivosti od  
teplotního gradientu

# Ohybový moment, křivost prutu a teplota

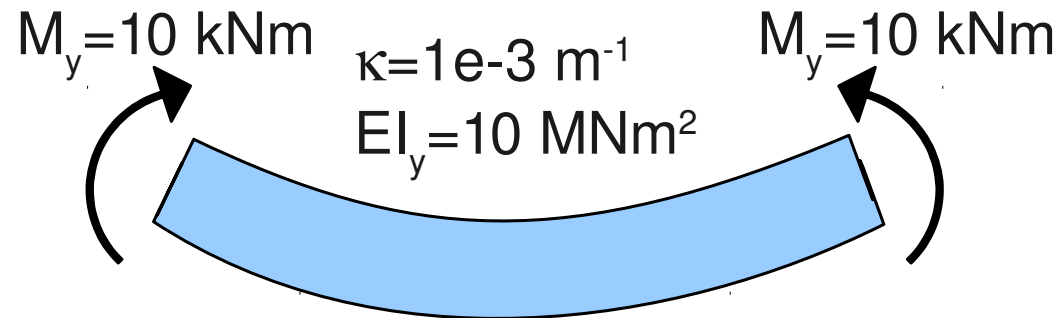
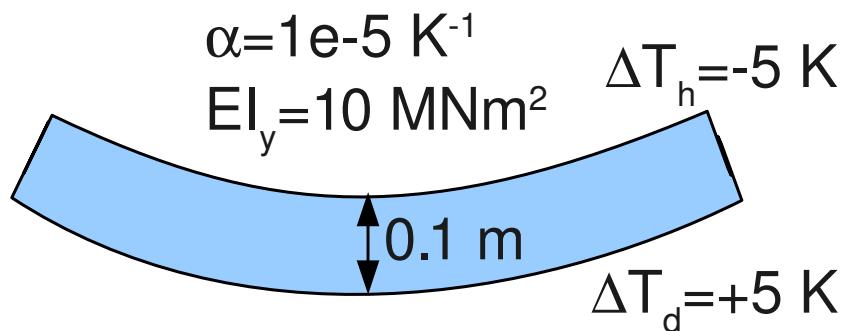
$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \cdot b \cdot \underbrace{\sigma_x(z)}_{E[\kappa - \kappa_T] \cdot z} dz = E [\kappa - \kappa_T] \underbrace{\int_{-h/2}^{h/2} b z^2 dz}_{I_y = \iint_A z^2 dA}$$

$$M_y = E I_y [\kappa - \kappa_T]$$

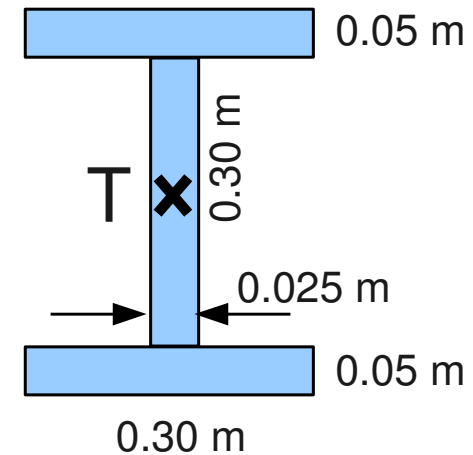
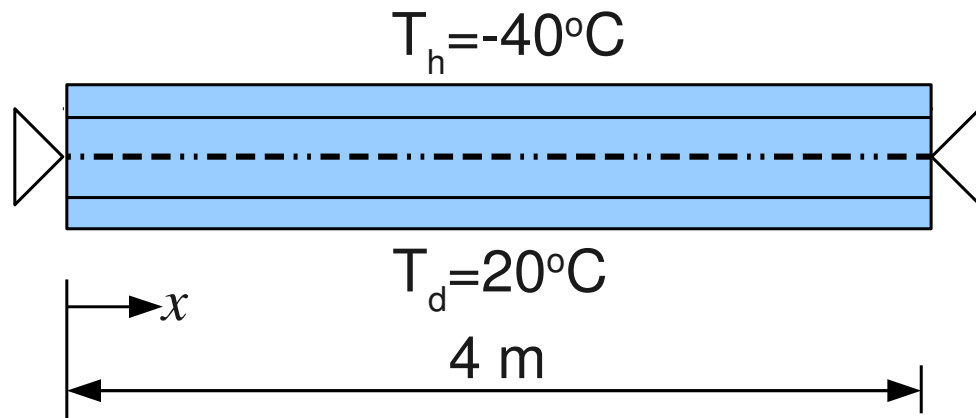
$$\kappa = \frac{M_y}{E I_y} + \kappa_T = \frac{M_y}{E I_y} + \alpha_T \frac{\Delta T_d - \Delta T_h}{h}$$

Křivost od teploty lze nahradit účinkem momentu

$$M_y^T = E I_y \alpha_T \frac{\Delta T_d - \Delta T_h}{h}$$



# Příklad – rovnoměrné a nerovnoměrné oteplení



$$T_{ref} = 10^\circ\text{C}$$

$$\Delta T_d = 10^\circ\text{C}, \quad \Delta T_h = -50^\circ\text{C}, \quad \Delta T_s = -20^\circ\text{C}$$

Rovnoměrné ochlazení - staticky neurčitý tah

$$\sigma_{x,T} = -E \alpha \Delta T_s = -210 \times 10^9 \cdot 12 \times 10^{-6} \cdot (-20) = 50.4 \text{ MPa}$$

$$E = 210 \text{ GPa}$$

$$\alpha = 12 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

$$I_y = 9.8125 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

Nerovnoměrné oteplení - staticky určitá konstrukce

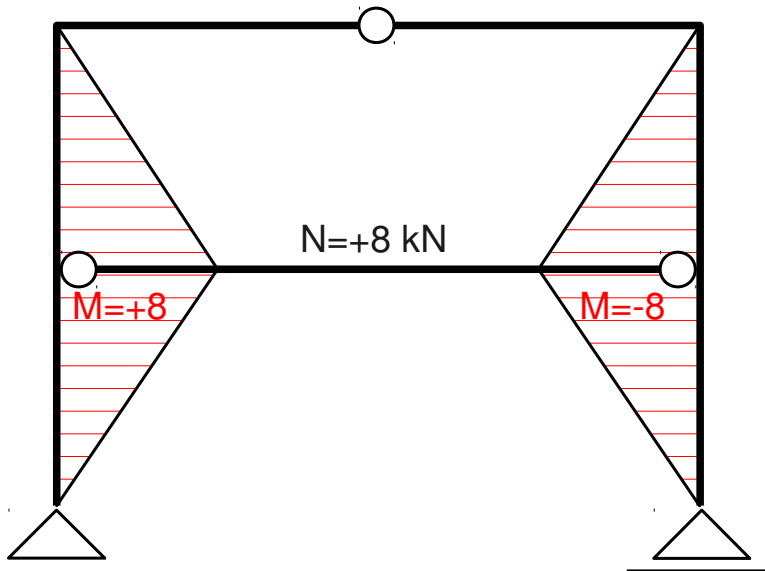
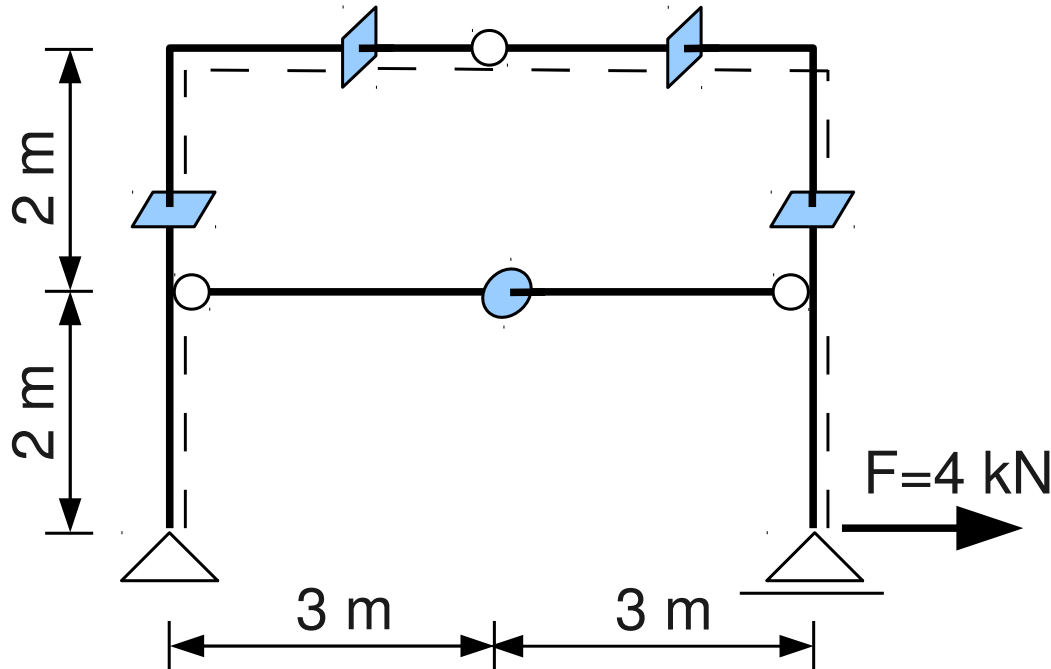
$$M_y = 0 = EI (\kappa - \kappa_T), \quad \kappa = \kappa_T = 12 \times 10^{-6} \frac{10 + 50}{0.4} = 1.8 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

Pro oboustranně vetknutý nosník,  $\varphi(0) = \varphi(4) = 0$ ,  $\kappa = \frac{d\varphi}{dx}$ ,  $\kappa(x) = 0$

$$M_y = -EI \kappa_T = -210 \times 10^6 \cdot 9.8125 \times 10^{-4} \cdot 1.8 \times 10^{-3} = -370.9 \text{ kNm}$$

# Návrh konstrukce

- Navrhněte čtvercový dřevěný profil a tyč ocelového táhla



Dřevěný ohýbaný průřez

$$R^+ = R^- = \pm 10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x, \max} = \pm \frac{M_y}{W_y} = \pm \frac{6 \cdot 8}{b^3} \text{ kPa}$$

$$b = h = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 8}{10000}} = 0.17 \text{ m}$$

Navrhuji 180/180 mm

Ocelové táhlo

$$R^+ = 200 \text{ MPa}$$

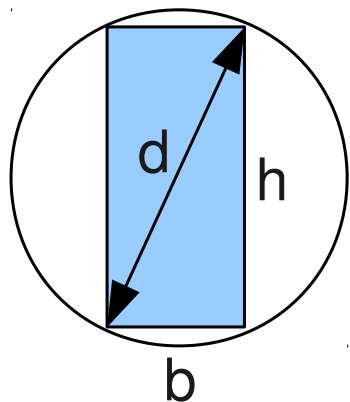
$$\sigma_x = \frac{8}{\pi r^2} \text{ kPa}$$

$$r = \sqrt{\frac{8}{2e+5\pi}} = 3.57e-3 \text{ m}$$

Navrhuji  $d = 8 \text{ mm}$

# Optimalizace průřezu

- Nalezněte poměr  $b/h$  s největším průřezovým modulem  $W_y$ . Obdélníkový průřez je vyroben z kruhového profilu.



$$h^2 = d^2 - b^2$$

$$W_y = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} b (d^2 - b^2)$$

$$\frac{dW_y}{db} = \frac{1}{6} (d^2 - 3b^2) = 0$$

$$b = \frac{d}{\sqrt{3}} \approx 0.577 d$$

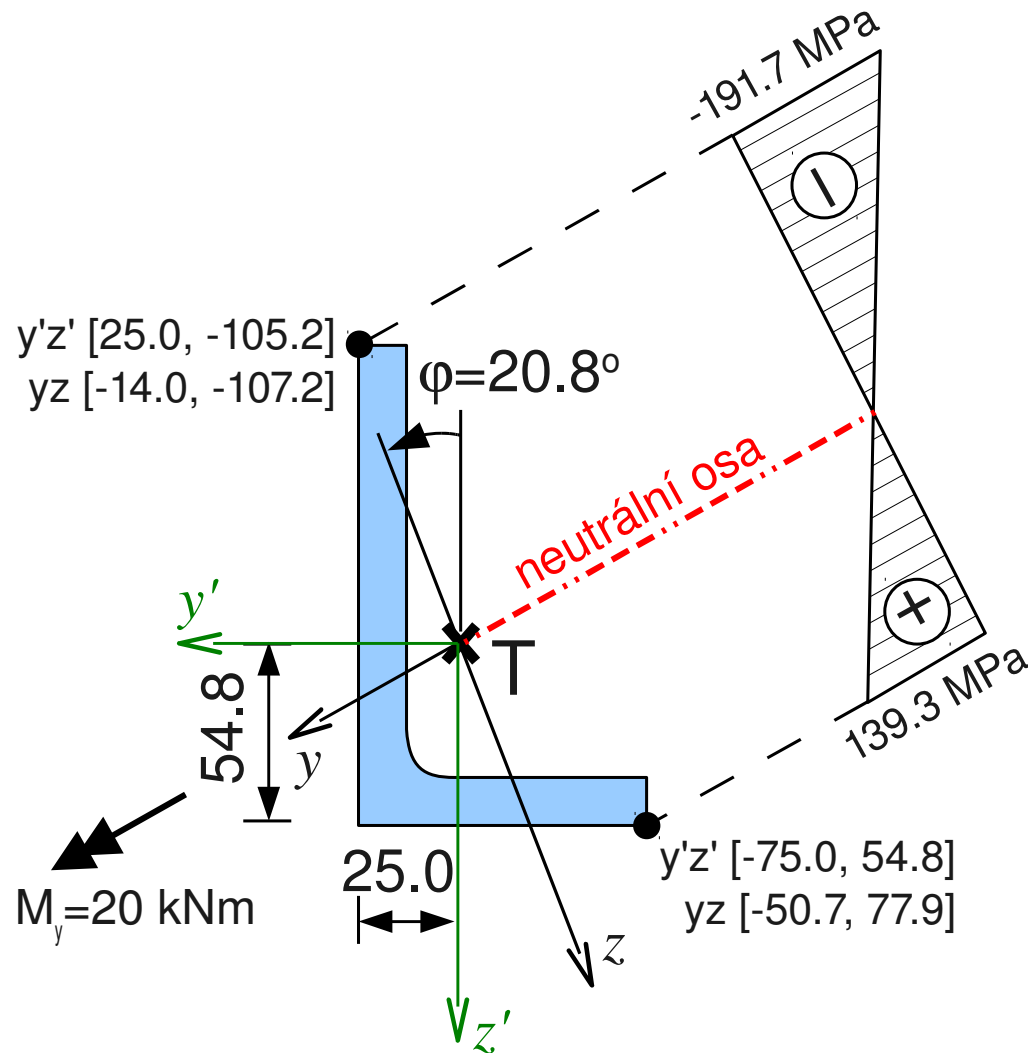
$$h = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} d \approx 0.816 d$$

$$\frac{b}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \frac{5}{7}$$

Časté rozměry dřevěných trámů 8/8, 8/10, **8/12**, 8/16, 10/10, 10/12, **10/14**, 10/16, 12/12, 12/14, **12/16** cm.

# Ohyb nesymetrický úhelník – hlavní centrální osy

- Určete extrémní napětí na nesymetrickém úhelníku 100x160x16 mm, který je zatížen momentem  $M_y=20$  kNm



$$\begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y' \\ z' \end{Bmatrix}$$

$$I_y = 1.1186 \text{ e-}5 \text{ m}^4, I_z = 1.825 \text{ e-}6 \text{ m}^4$$

$$D_{yz} = 0$$

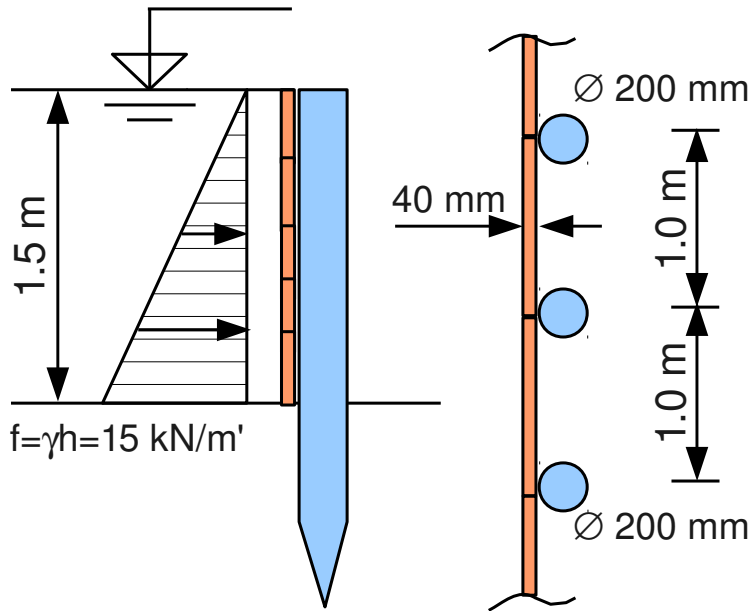
$$\sigma_x(z) = \frac{0.020}{1.1186 \text{ e-}5} z \quad [\text{MPa}]$$

$$\sigma_x(0.0779) = 139.3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_x(-0.1072) = -191.7 \text{ MPa}$$

# Posouzení jezu

- Určete maximální  $\sigma_x$  na fošnách a pilotách jezu



Ohyb fošny

$$M_{y,max} = \frac{1}{8} 15 \cdot 1^2 = 1.875 \text{ kNm}$$

$$W_y = \frac{1}{6} 1 \cdot 0.04^2 = 2.667e-4 \text{ m}^3$$

$$\sigma_{x,max} = \pm \frac{1.875}{2.667e-4} = \pm 7031 \text{ kPa}$$

Ohyb piloty

$$M_{y,max} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 1.5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1.5 = 5.625 \text{ kNm}$$

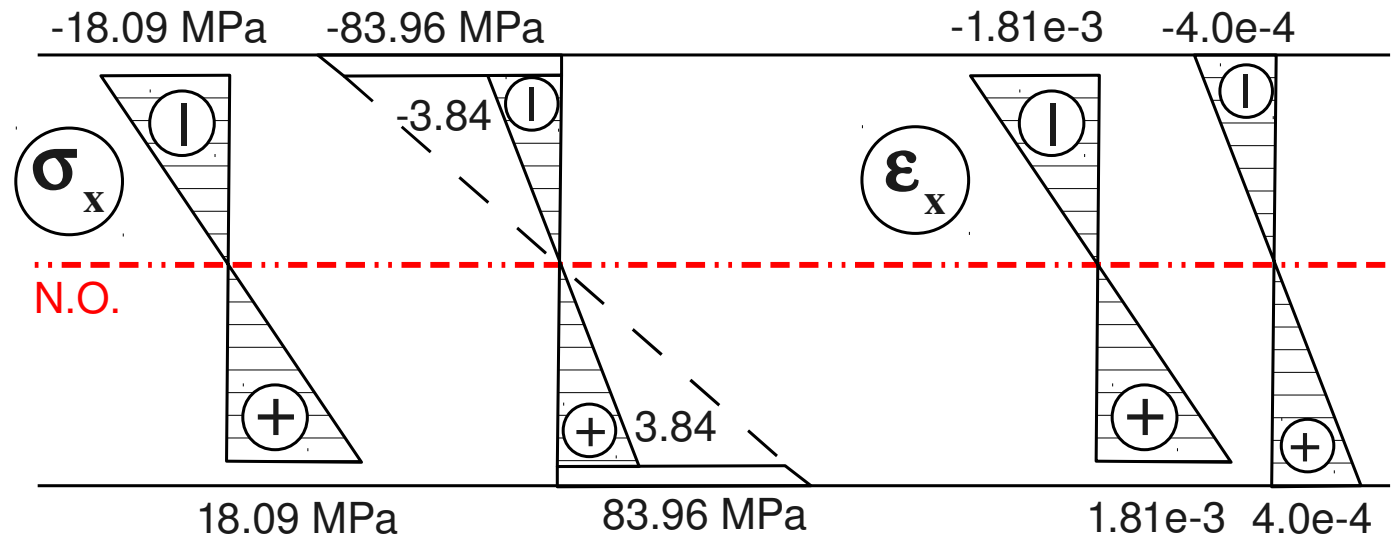
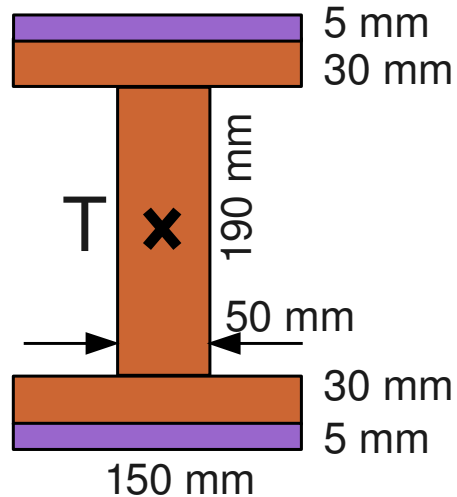
$$W_y = \frac{\pi d^4}{64 d/2} = \frac{\pi d^3}{32} = 7.854e-4 \text{ m}^3$$

$$\sigma_{x,max} = \pm \frac{5.625}{7.854e-4} = \pm 7162 \text{ kPa}$$

Pozn. Pro dovolené namáhání dřeva  $\pm 7.2 \text{ MPa}$  by oba prvky vyhověly.

# Zesílení nosníku pomocí ocelových plechů

- Určete ohybovou tuhost  $EI_y$  a vykreslete  $\sigma_x$  a  $\epsilon_x$  před a po zesílení ocelovými plechy,  $M_y = 20 \text{ kNm}$ .



$$E_{\text{ocel}} = 210 \text{ GPa}$$

$$E_{\text{dřevo}} = 10 \text{ GPa}$$

Pouze dřevo:

$$I_y^1 = \frac{1}{12} (0.15 \cdot 0.25^3 - 0.1 \cdot 0.19^3) = 1.382 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$EI_y^1 = 1382 \text{ kNm}^2$$

$$\sigma_{x, \max} = \pm \frac{0.020}{1.382 \cdot 10^{-4}} \cdot 0.125 = \pm 18.09 \text{ MPa}$$

Bernoulli-Navierova hypotéza - ekvivalentní průřez:

$$I_y^2 = I_y^1 + 2 \cdot \frac{210}{10} \left[ \frac{1}{12} \cdot 0.15 \cdot 0.005^3 + 0.15 \cdot 0.005 \cdot 0.1275^2 \right] = 6.503 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$EI_y = 6503 \text{ kNm}^2$$

$$\sigma_{x, \max, \text{dř}} = \pm \frac{0.020}{6.503 \cdot 10^{-4}} \cdot 0.125 = \pm 3.84 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x, \max, \text{ocel}} = \pm \frac{210}{10} \cdot \frac{0.020}{6.503 \cdot 10^{-4}} \cdot 0.130 = \pm 83.96 \text{ MPa}$$



# Otázky

1. Popište Bernoulli-Navierovu hypotézu. Dá se aplikovat i na tažený prut? Proč tato hypotéza přestává platit u krátkých nosníků namáhaných smykem?
2. Co je prostý ohyb a jaký je jeho vztah k hlavním centrálním osám setrvačnosti?
3. Co je křivost prutu a jaké momentové zatížení odpovídá konstantní křivosti prutu?
4. Co je výslednicí lineárně rozloženého normálového napětí po průřezu?
5. Vzniká při ohybu normálová síla na průřezu nebo na jeho částech?
6. Co je neutrální osa? Prochází při prostém ohybu a elastickém materiálu vždy těžištěm?
7. Jaké jsou ekonomické průřezy pro přenášení ohybového momentu?
8. Co je ohybová tuhost prutu a v jakých jednotkách se vyjadřuje?
9. Kde nastávají extrémní hodnoty napětí na ohýbaném prizmatickém prutu?
10. Co je elastický průřezový modul a jak se určí?
11. Lze z vykreslení ohybového momentu poznat, která vlákna jsou tažená?
12. Popište rozdíl mezi rovnoměrným a nerovnoměrným oteplením. Jak souvisí nerovnoměrné oteplení s křivostí prutu? Proč zavádíme referenční teplotu?
13. Za jakých podmínek lze využít principu superpozice pro zároveň tažený a ohýbaný prut?
14. Odvoďte maticové vyjádření pro rotaci souřadného systému.
15. Co je to ekvivalentní průřez a za jakých situací se používá?