

Přednáška 03

Platnost Bernoulli-Navierovy hypotézy
Diferenciální rovnice ohybu prutu
Schwedlerovy věty
Rovnováha na segmentech prutu
Clebschova metoda integrace
Vliv teploty na průhyb a křivost prutu
Příklady

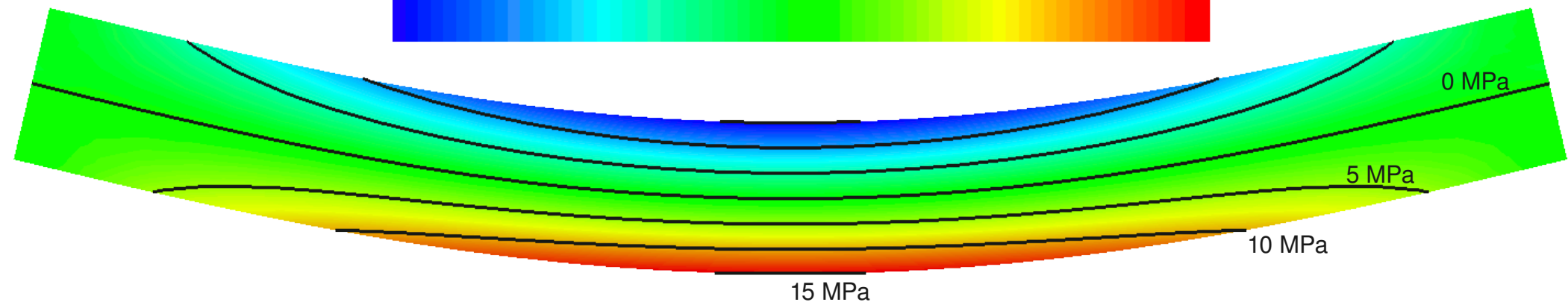
Copyright (c) 2011 Vít Šmilauer
Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Mechanics, Czech Republic

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License" found at <http://www.gnu.org/licenses/>

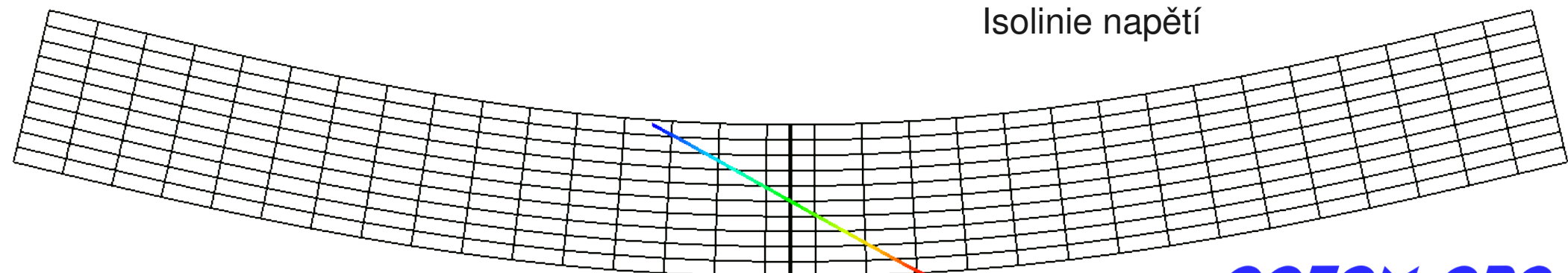
Platnost Bernoulli-Navierovy hypotézy

Sig_x (MPa)

-15.0 -7.50 0.00 7.50 15.0

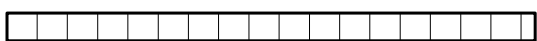


Isolinie napětí



OOFCM.ORG

20 kN/m'



0.5 m

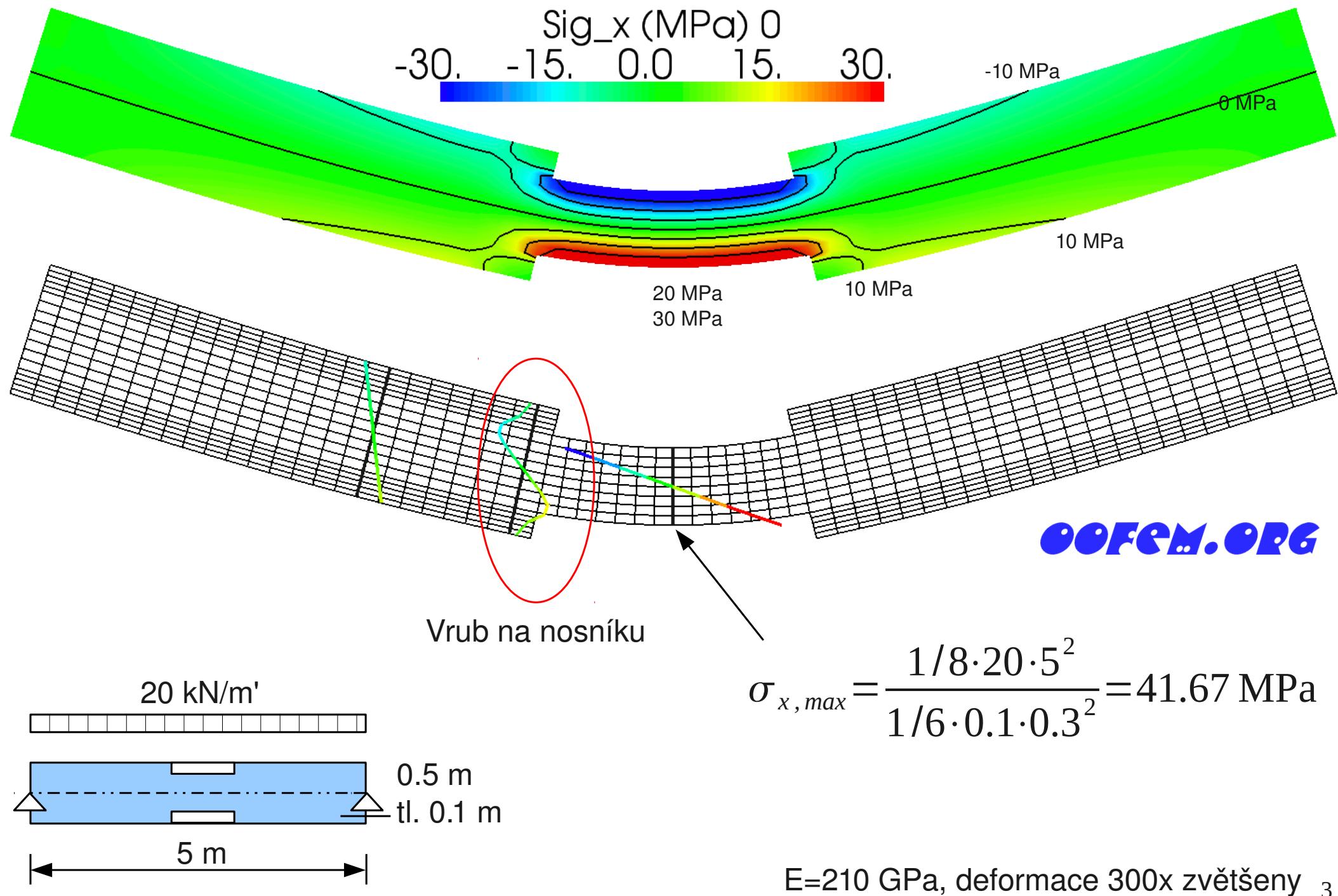
tl. 0.1 m

5 m

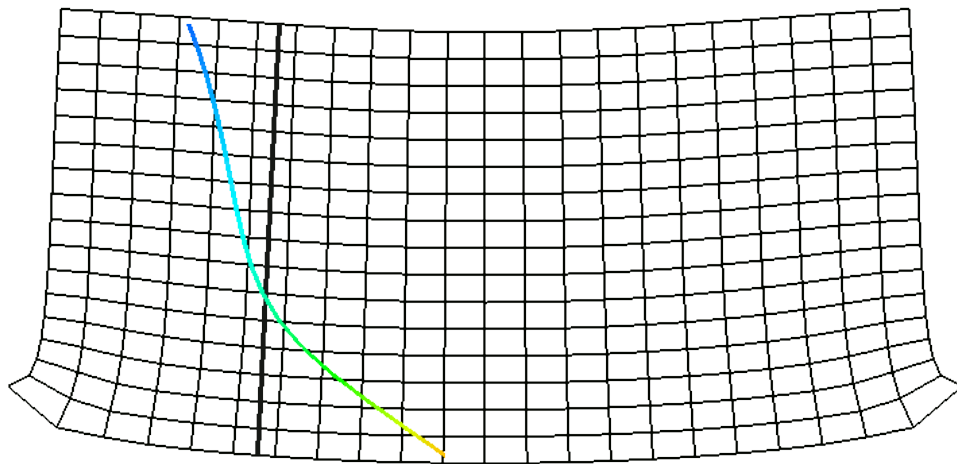
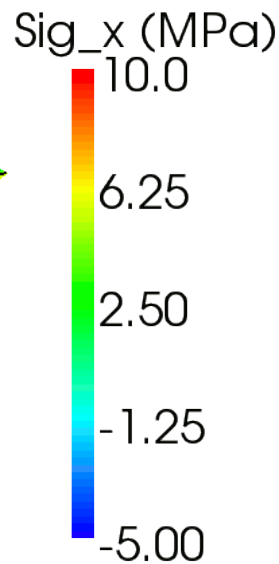
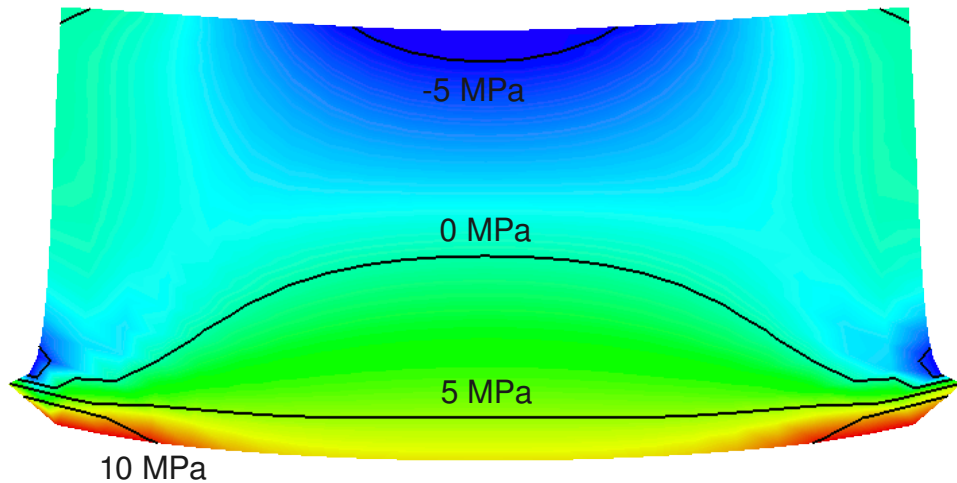
$$\sigma_{x, max} = \frac{1/8 \cdot 20 \cdot 5^2}{1/6 \cdot 0.1 \cdot 0.5^2} = 15.0 \text{ MPa}$$

E=210 GPa, deformace 500x zvětšeny 2

Platnost Bernoulli-Navierovy hypotézy



Platnost Bernoulli-Navierovy hypotézy



Tato nosná stěna nesplňuje Bernoulli-Navierovu hypotézu:
Ztráta rovinnosti průřezů
Ztráta kolmosti průřezů
Neutrální osa není spojnicí těžišť průřezů

Nelze tedy modelovat jako nosník

Pro analýzu napjatostního stavu je nutné použít teorii 2D či 3D napjatosti (napjatost stěn, napjatost 3D těles)

20 kN/m'



0.5 m

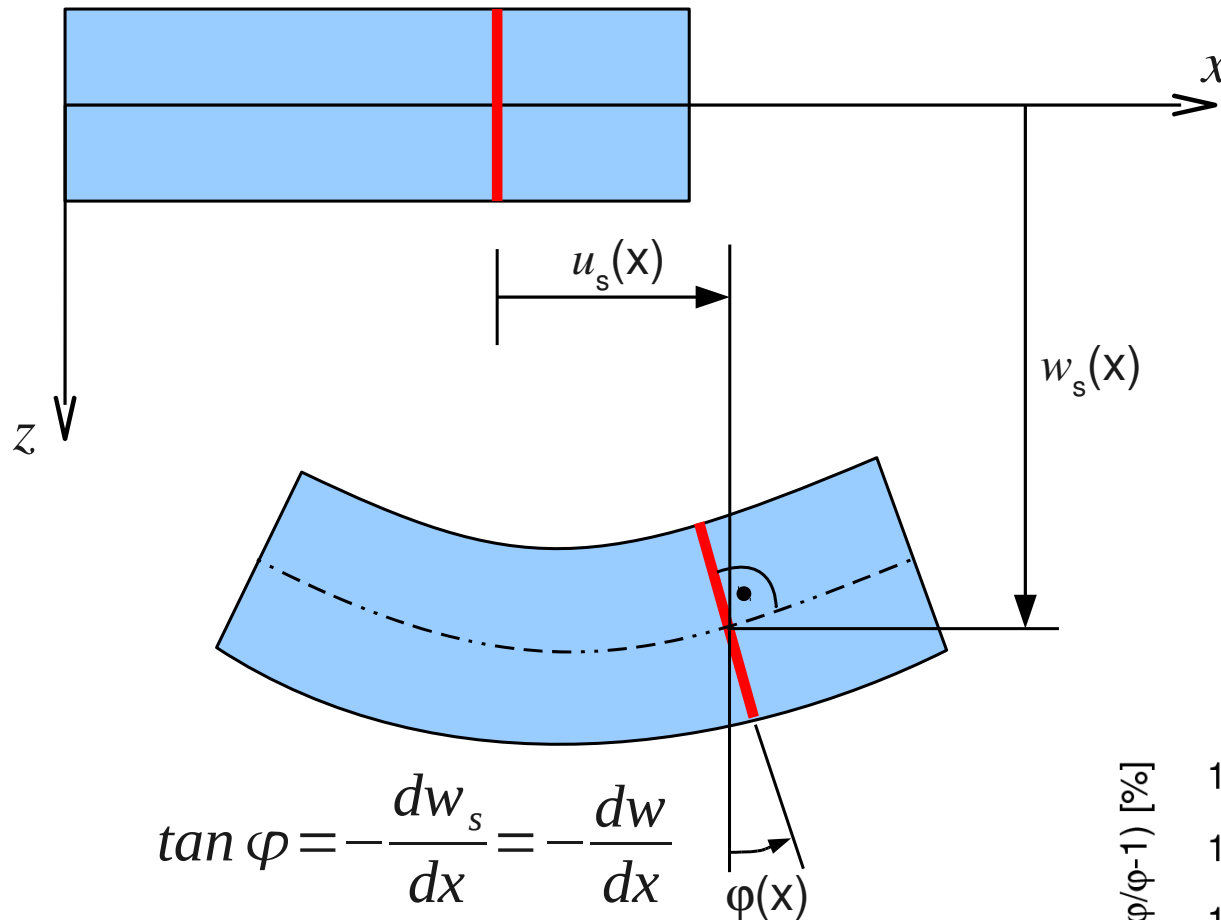
tl. 0.1 m

1 m

OOFCM.ORG

$E=210$ GPa, deformace 2000x zvětšeny 4

Důsledky kolmosti průřezu na střednici - ohyb M_y

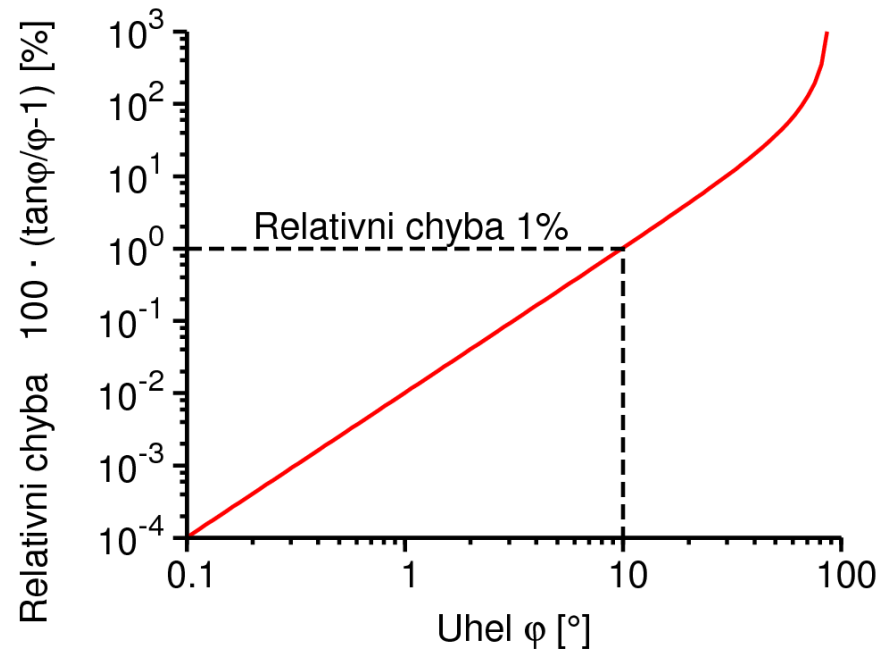


Pro malé rotace, $\varphi \ll 1$, lze aproximovat

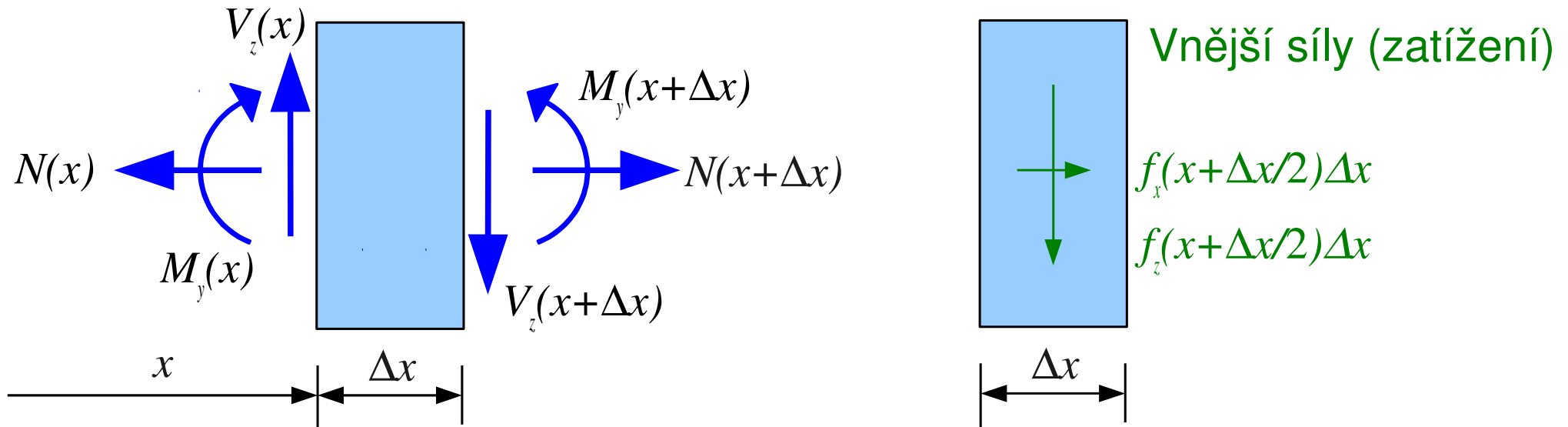
$$\tan \varphi \approx \varphi, \quad \varphi = -\frac{dw}{dx}$$

$$\kappa = \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{d^2 w}{dx^2}$$

Geometrická rovnice pro B-N model,
geometricky lineární model



Rovnice rovnováhy pro segment prutu



$$-V_z(x) + V_z(x + \Delta x) + f_z(x + \Delta x/2)\Delta x = 0$$

$$-V_z(x) + V_z(x) + \underbrace{\frac{dV_z(x)}{dx}\Delta x + \frac{d^2V_z(x)}{2!dx^2}(\Delta x)^2 + \dots}_{=0 \equiv \Delta x \rightarrow 0} + \left[f_z(x) + \underbrace{\frac{df_z(x)}{dx} \cdot \frac{\Delta x}{2} + \dots}_{=0 \equiv \Delta x \rightarrow 0} \right] \Delta x = 0$$

$$\frac{dV_z(x)}{dx} = -f_z(x)$$


1. Schwedlerova věta

$$-M_y(x) + M_y(x + \Delta x) - V_z(x)\frac{\Delta x}{2} - V_z(x + \Delta x)\frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\frac{dM_y(x)}{dx} = V_z(x)$$

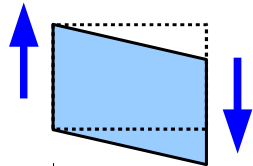
2. Schwedlerova věta

Rovnice rovnováhy pro segment prutu



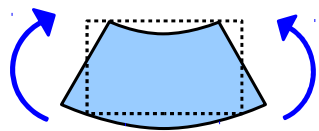
A diagram of a rectangular beam segment of length dx . A vertical dashed line is drawn at the right end. Blue arrows point outwards from the left and right faces, representing normal forces.

$$\frac{dN_x(x)}{dx} = -f_x(x)$$



A diagram of a beam segment of length dx . A vertical dashed line is drawn at the right end. The top surface is tilted upwards. Blue arrows point upwards from the left face and downwards from the right face, representing shear forces.

$$\frac{dV_z(x)}{dx} = -f_z(x)$$

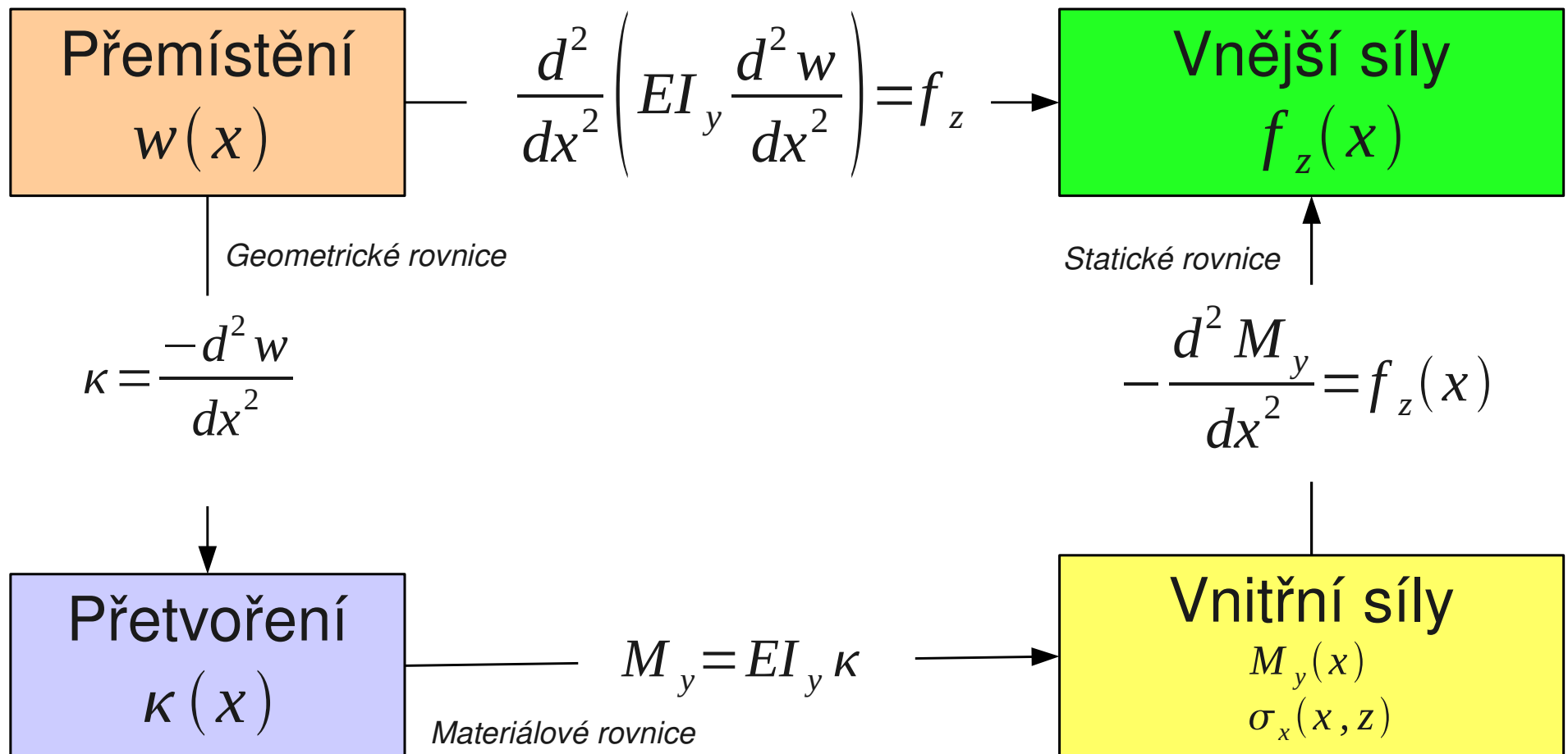


A diagram of a beam segment of length dx . A vertical dashed line is drawn at the right end. The top surface is curved downwards. Blue curved arrows at the left and right faces represent bending moments.

$$\frac{dM_y(x)}{dx} = V_z(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dV_z(x)}{dx} = -f_z(x) \\ \frac{dM_y(x)}{dx} = V_z(x) \end{array} \right\} \frac{d^2 M_y(x)}{dx^2} = -f_z(x)$$

Tonitio diagram pro ohýbaný prut



Diferenciální rovnice ohybové čáry

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f_z$$

Umožňuje řešit i staticky neurčitě prutové konstrukce

- Obyčejná lineární diferenciální rovnice 4. řádu
- Na každém konci prutu jsou dvě okrajové podmínky
 - Předepsaná V_z ... statická o.p.
 - Předepsaný M_y ... statická o.p.
 - Předepsané natočení $\varphi_y = -w'$... kinematická o.p.
 - Předepsaný průhyb w ... kinematická o.p.
- Pokud je EI_y konstantní a M_y je jednoznačně určen (stat. určitá konstrukce), používá se často tvar diferenciální rovnice 2. řádu, jedna o.p. pro každý konec

$$EI_y w'' = -M_y$$

Okrajové podmínky pro ohýbaný prut, dif. rov. 4. řádu

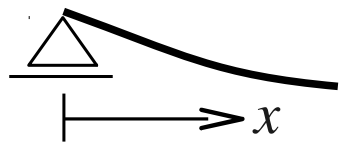
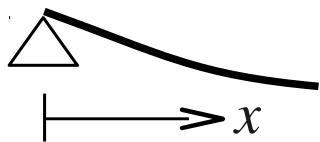
- V každém koncovém průřezu se předepisuje

- 1. okrajová podmínka

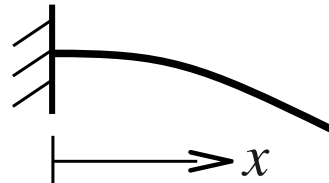
$$w \text{ nebo } V_z \text{ (pro konst. } EI_y \rightarrow V_z = -EI_y w''')$$

- a zároveň 2. okrajová podmínka

$$\varphi_y = -w' \text{ nebo } M_y \text{ (pro konst. } EI_y \rightarrow M_y = -EI_y w'')$$

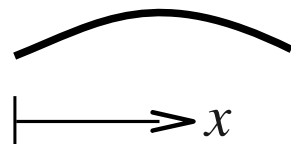


$$w(0)=0 \quad \wedge \quad M_y(0)=0$$



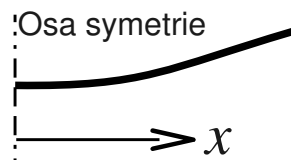
$$w(0)=0 \quad \wedge \quad w'(0)=0$$

Volný konec prutu



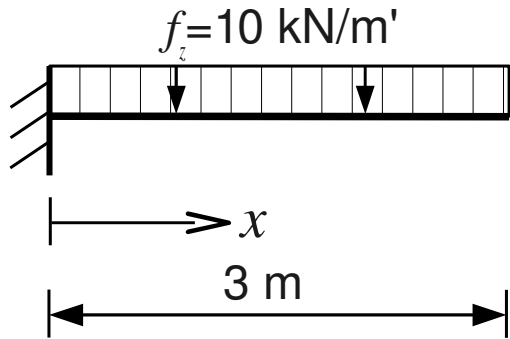
$$V_z(0)=0 \quad \wedge \quad M_y(0)=0$$

Symetrická konstrukce
Symetrické zatížení



$$w'(0)=0 \quad \wedge \quad V_z(0)=0$$

Příklad – spojitě zatížená konzola



$$EI_y = 10\,000 \text{ kNm}^2$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f_z$$

První dvojnásobná integrace

$$\frac{dV_z(x)}{dx} = -f_z, \quad V_z = -10x + \underbrace{C_1}_{30}$$

$$\frac{dM_y(x)}{dx} = V_z(x), \quad M_y = -5x^2 + 30x + \underbrace{C_2}_{-45}$$

Konstanty C_1 a C_2 lze určit přímo z reakcí

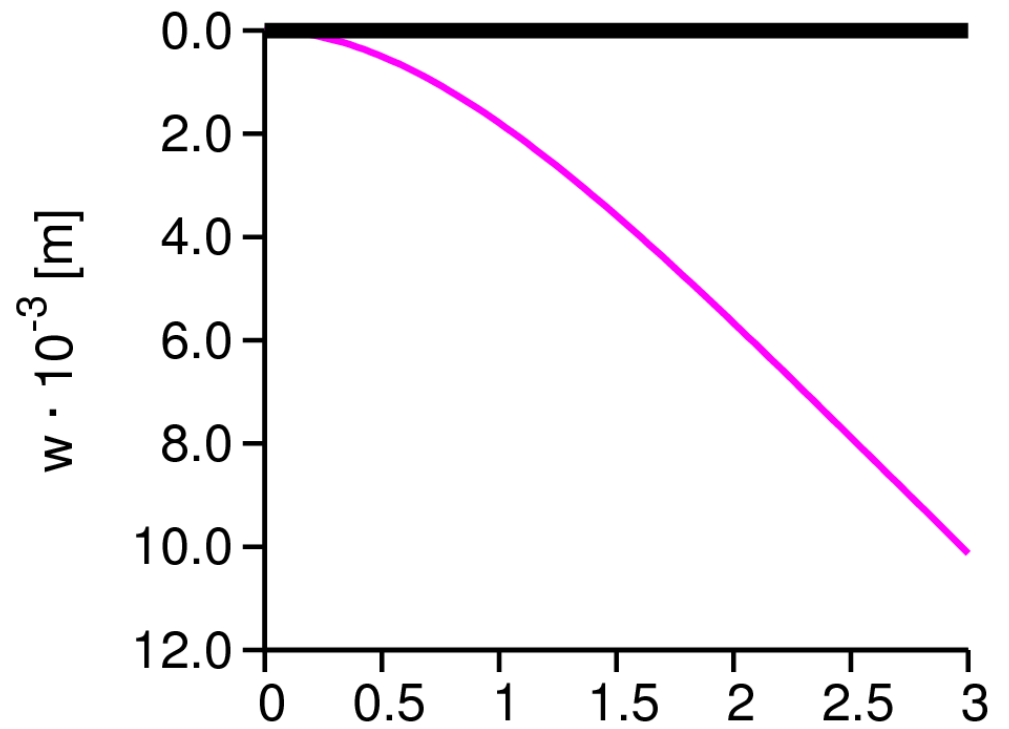
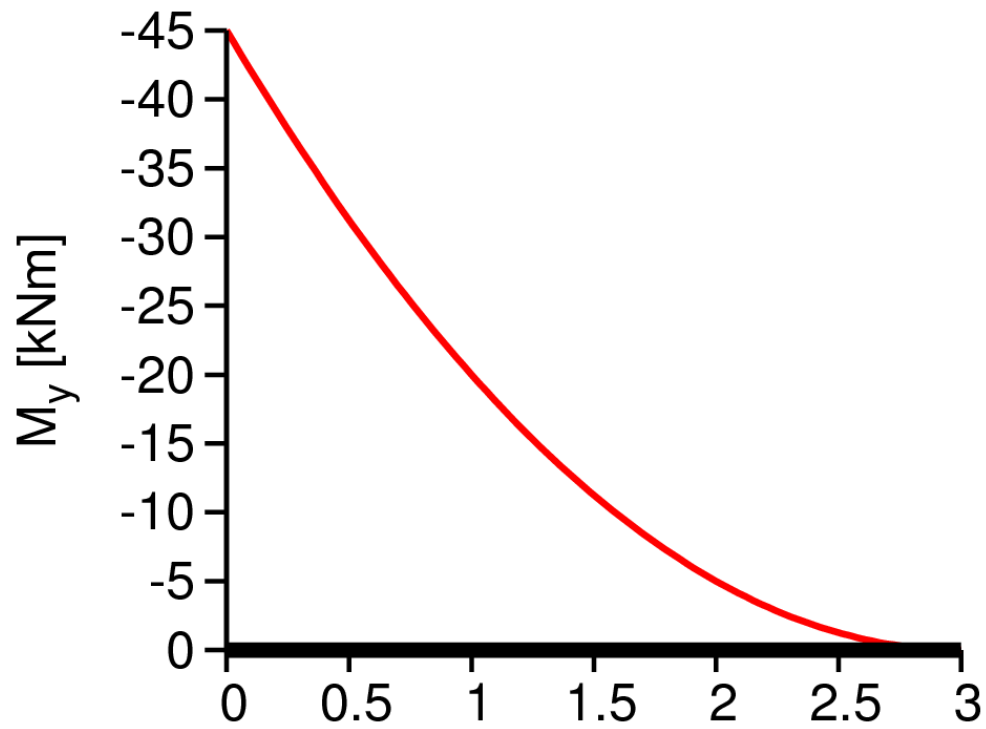
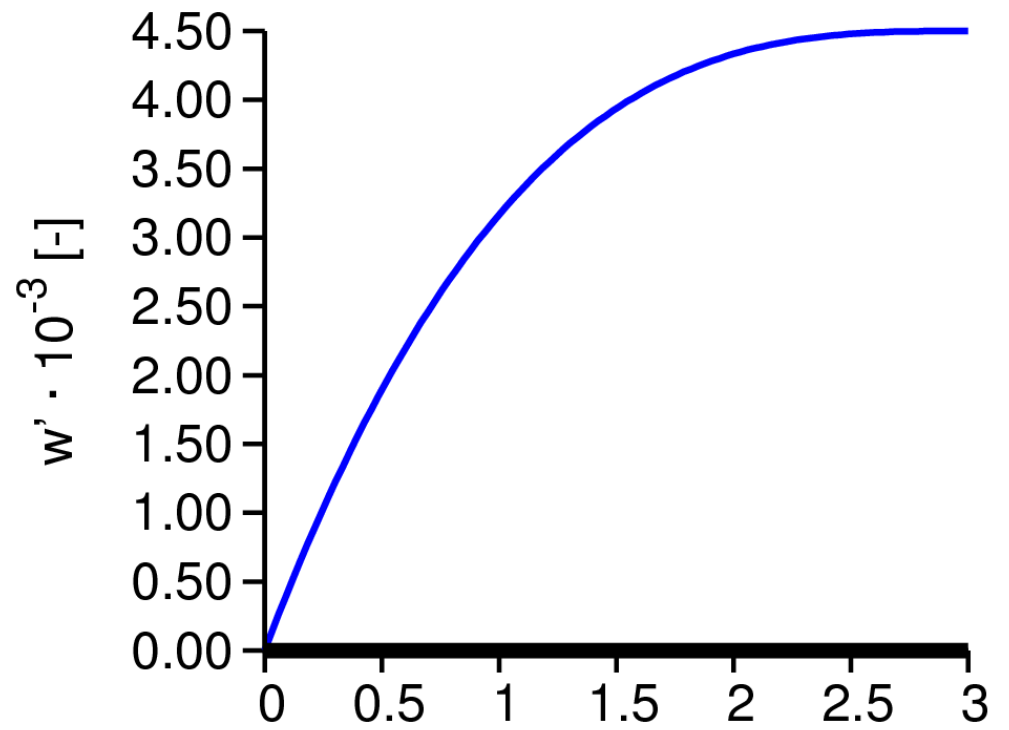
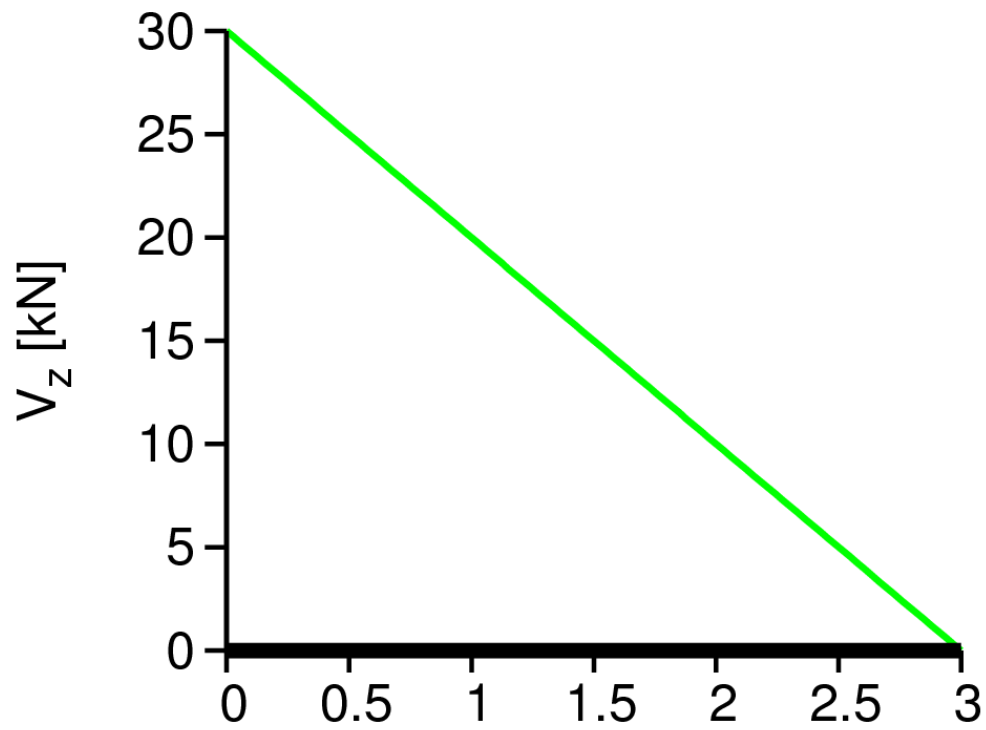
$$EI_y w'' = -M_y = 5x^2 - 30x + 45$$

Druhá dvojnásobná integrace

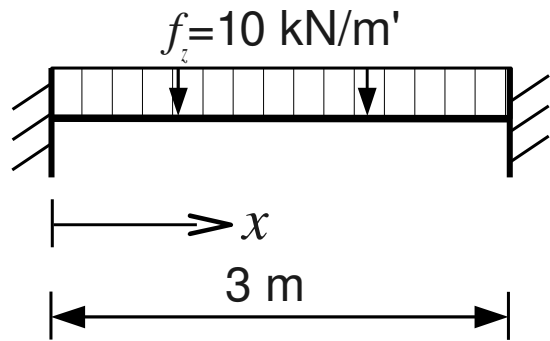
$$EI_y w' = \frac{5}{3} x^3 - 15x^2 + 45x + C_3, \quad w'(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

$$EI_y w = \frac{5}{12} x^4 - 5x^3 + 22.5x^2 + C_4, \quad w(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

Průhyb konce konzoly $w(3) = 10.125 \text{ mm}$



Příklad – spojitě zatížený oboustanně vetknutý nosník



$$EI_y = 10000 \text{ kNm}^2$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = f_z$$

$$0 = 11.25 + 1.5 C_2$$

$$C_1 = 15, C_2 = -7.5$$

Alt. 1 - řešení přímou integrací na stat. neurčitém nosníku

První dvojnásobná integrace

$$\frac{dV_z(x)}{dx} = -f_z, \quad V_z = -10x + C_1$$

$$\frac{dM_y(x)}{dx} = V_z(x), \quad M_y = -5x^2 + C_1x + C_2$$

$$EI_y w'' = -M_y = 5x^2 - C_1x - C_2$$

Druhá dvojnásobná integrace

$$EI_y w' = \frac{5}{3}x^3 - \frac{C_1}{2}x^2 - C_2x + C_3, \quad w'(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

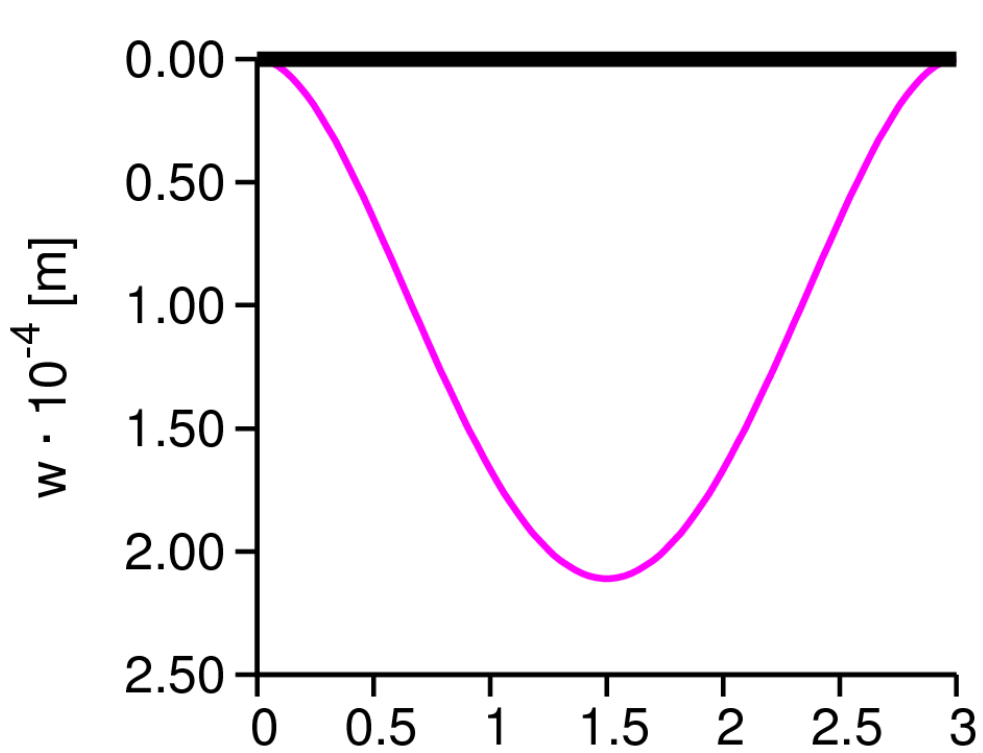
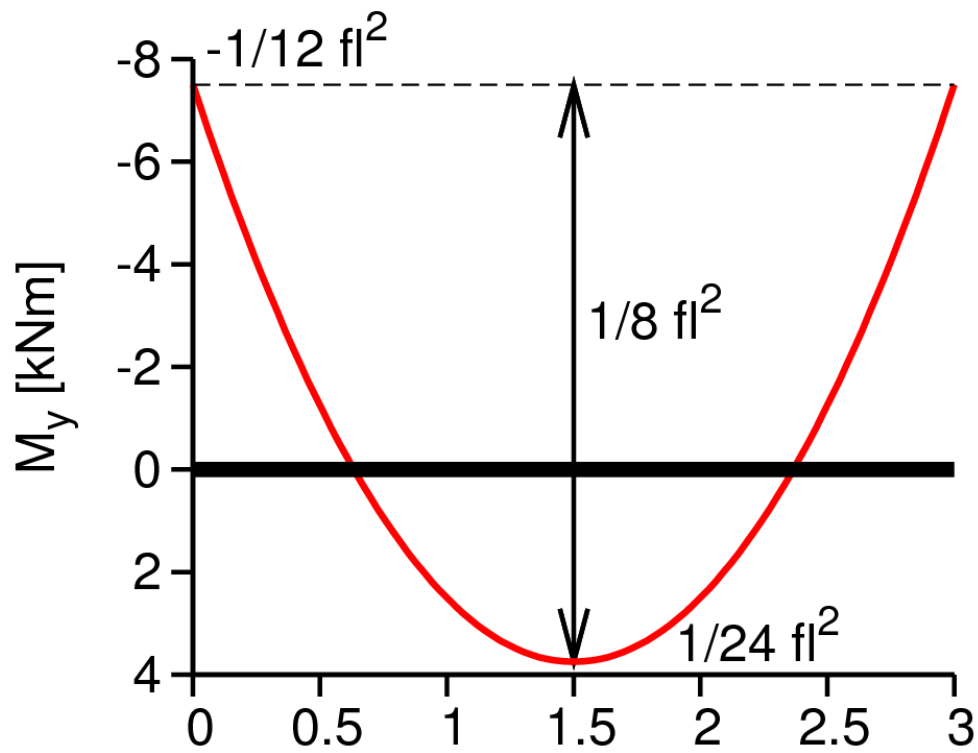
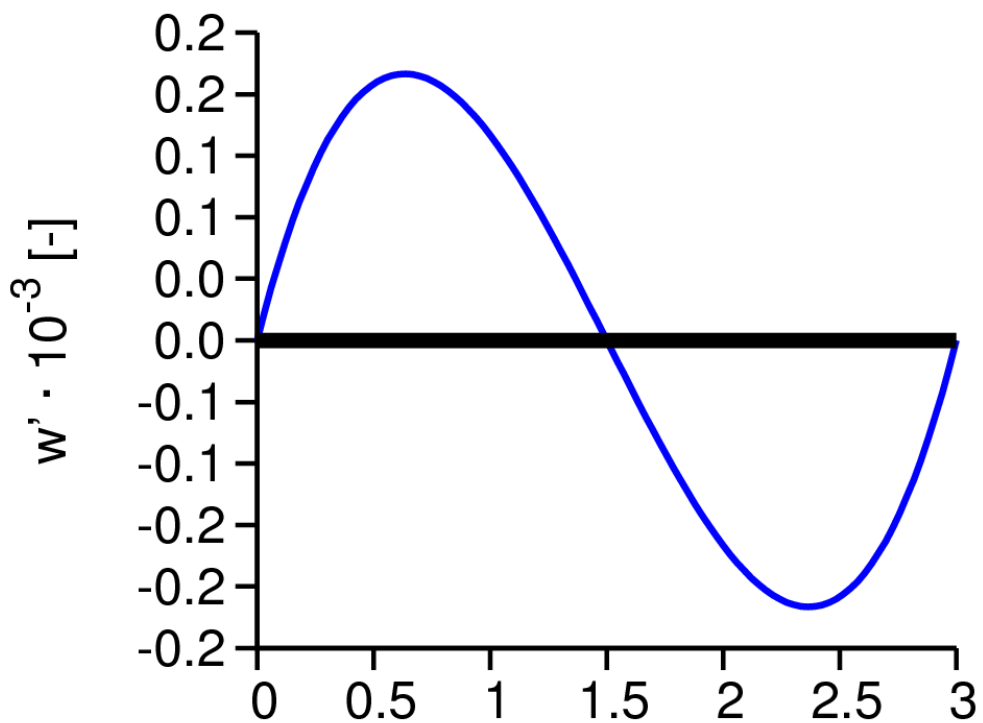
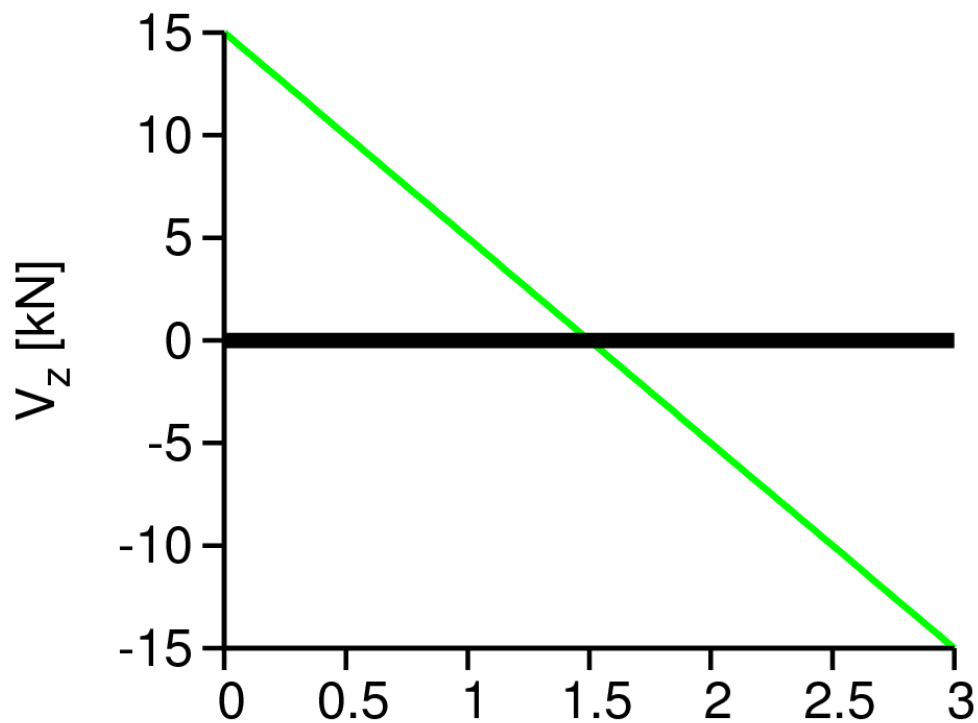
$$w'(3) = 0 \rightarrow 0 = 45 - 4.5C_1 - 3C_2$$

$$EI_y w = \frac{5}{12}x^4 - \frac{C_1}{6}x^3 - \frac{C_2}{2}x^2 + C_4, \quad w(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

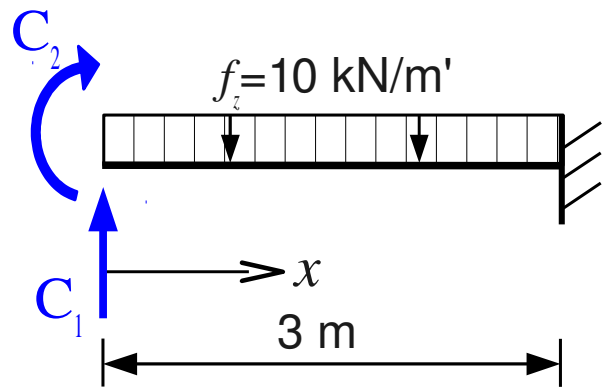
$$w(3) = 0 \rightarrow 0 = 33.75 - 4.5C_1 - 4.5C_2$$

$$EI_y w = \frac{5}{12}x^4 - 2.5x^3 + 3.75x^2$$

Průhyb středu nosníku $w(1.5) = 0.21 \text{ mm}$



Příklad – spojitě zatížený oboustanně vetknutý nosník



Alt. 2 - řešení pomocí staticky určitého nosníku

$$V_z = -10x + C_1$$

$$M_y = -5x^2 + C_1x + C_2$$

$$EI_y w'' = -M_y = 5x^2 - C_1x - C_2$$

$$w(0) = w'(0) = 0$$

$$EI_y = 10\,000 \text{ kNm}^2$$

Dvojnásobná integrace stejně jako v Alt. 1

$$EI_y w' = \frac{5}{3}x^3 - \frac{C_1}{2}x^2 - C_2x + C_3, \quad w'(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

$$w'(3) = 0 \rightarrow 0 = 45 - 4.5C_1 - 3C_2$$

$$EI_y w = \frac{5}{12}x^4 - \frac{C_1}{6}x^3 - \frac{C_2}{2}x^2 + C_4, \quad w(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

$$w(3) = 0 \rightarrow 0 = 33.75 - 4.5C_1 - 4.5C_2$$

$$EI_y w = \frac{5}{12}x^4 - 2.5x^3 + 3.75x^2$$

$$0 = 11.25 + 1.5C_2$$

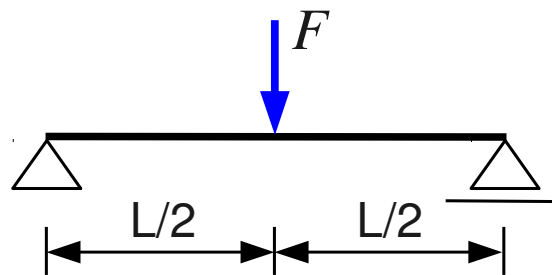
$$C_1 = 15, C_2 = -7.5$$

Odvodte vzorce pro průhyby a koncové síly

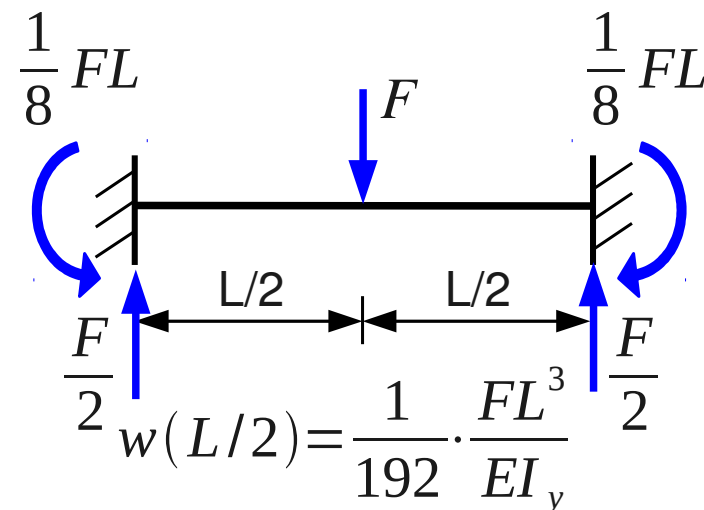
$EI_y = \text{kost.}$



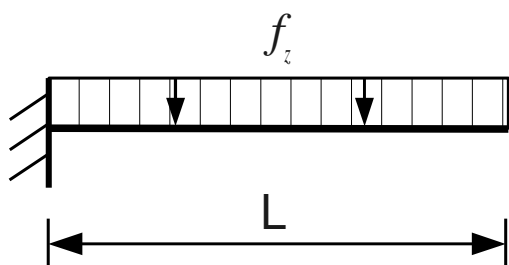
$$w(L) = \frac{1}{3} \cdot \frac{FL^3}{EI_y}$$



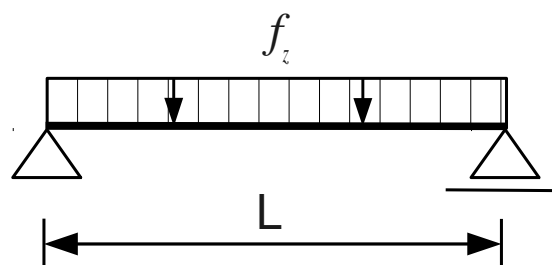
$$w(L/2) = \frac{1}{48} \cdot \frac{FL^3}{EI_y}$$



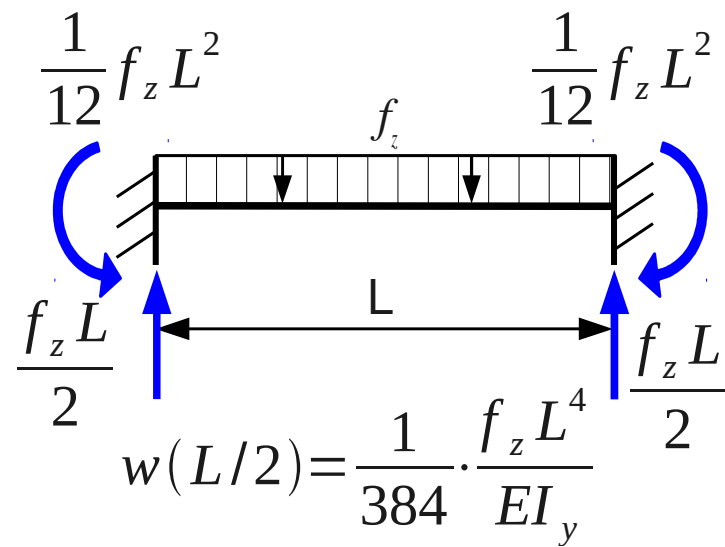
$$w(L/2) = \frac{1}{192} \cdot \frac{FL^3}{EI_y}$$



$$w(L) = \frac{1}{8} \cdot \frac{f_z L^4}{EI_y}$$



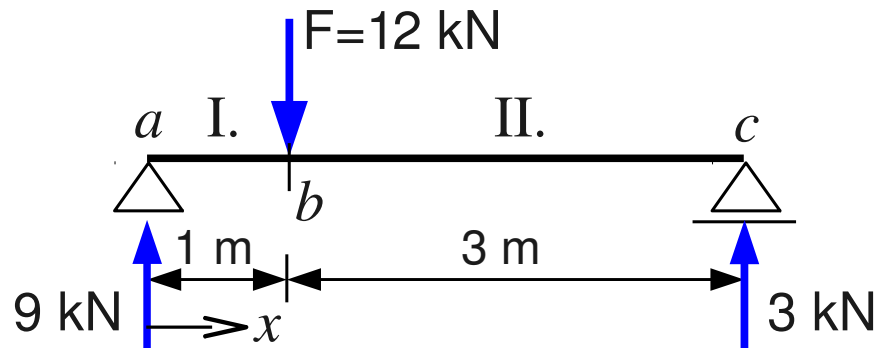
$$w(L/2) = \frac{5}{384} \cdot \frac{f_z L^4}{EI_y}$$



$$w(L/2) = \frac{1}{384} \cdot \frac{f_z L^4}{EI_y}$$

Podmínky spojitosti na intervalech

- Při nespojitém (osamělém) zatížení je možné integrovat po částech, platí podmínky spojitosti pro w' , w



$n \dots$ intervalů
 $4n \dots$ integračních konstant
 ($2n \dots$ integračních konstant při zadané funkci M_y)

2 intervaly, 4 okraje, integračních konstant **8**-dif.r.4.řádu, (**4**-dif.r.2.řádu)

$$EI_y = 10000 \text{ kNm}^2$$

I. interval

$$M_y = 9x$$

$$EI_y w'' = -9x$$

$$EI_y w' = -4.5x^2 + C_1 \quad \text{Spojitost natočení v průřezu } b$$

$$EI_y w = -1.5x^3 + C_1 x + C_2, \quad w(0) = 0 \quad \text{Spojitost průhybu}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

$$w = \frac{1}{EI_y} (-1.5x^3 + 10.5x)$$

II. interval - ponechám proměnnou x
 Integrace pomocí Clebschovy metody

$$M_y = 9x - 12(x-1)$$

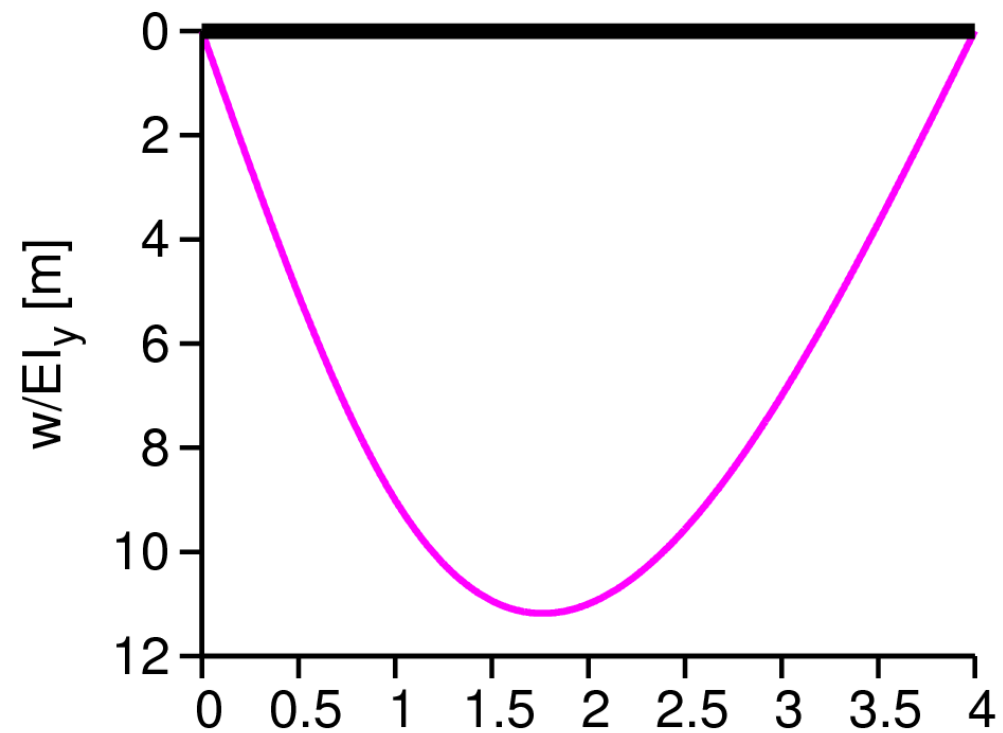
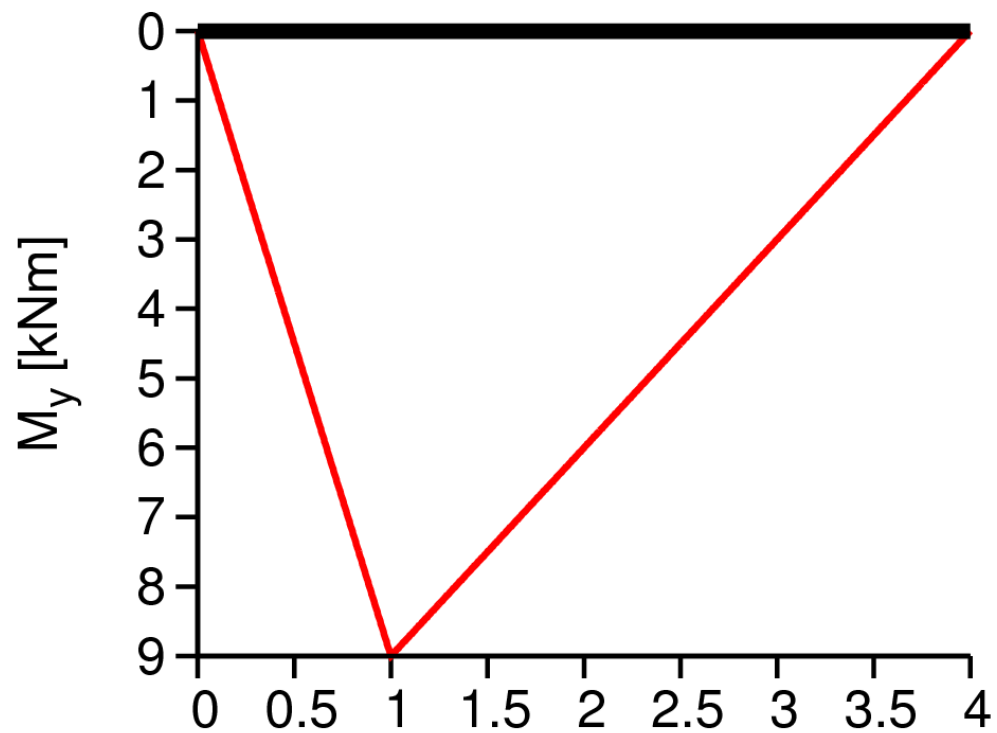
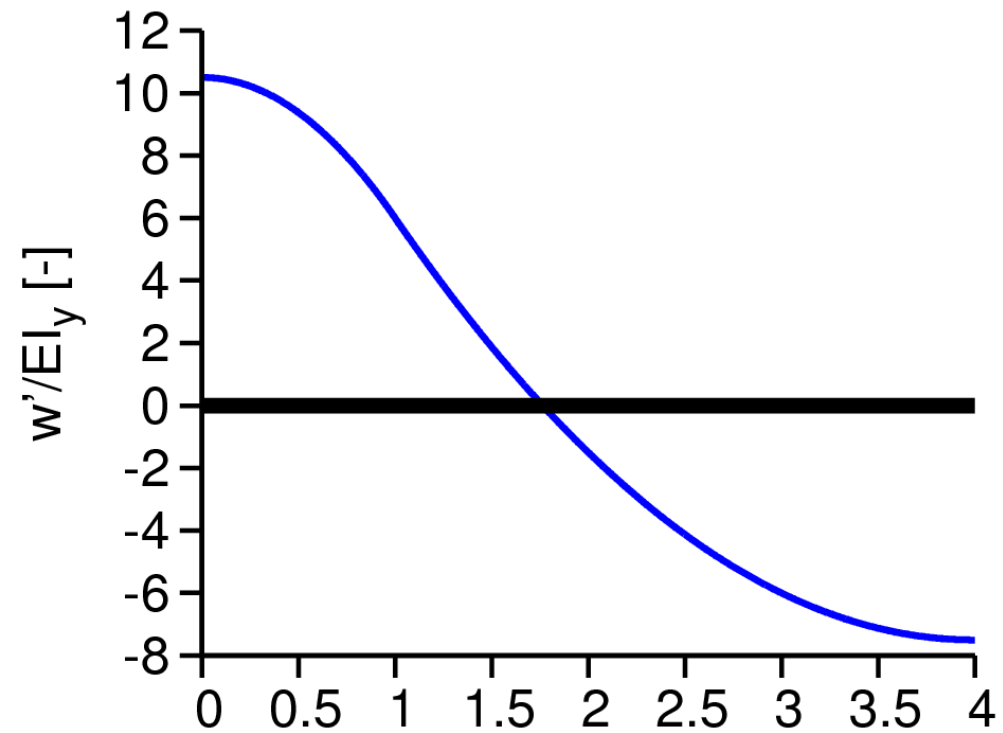
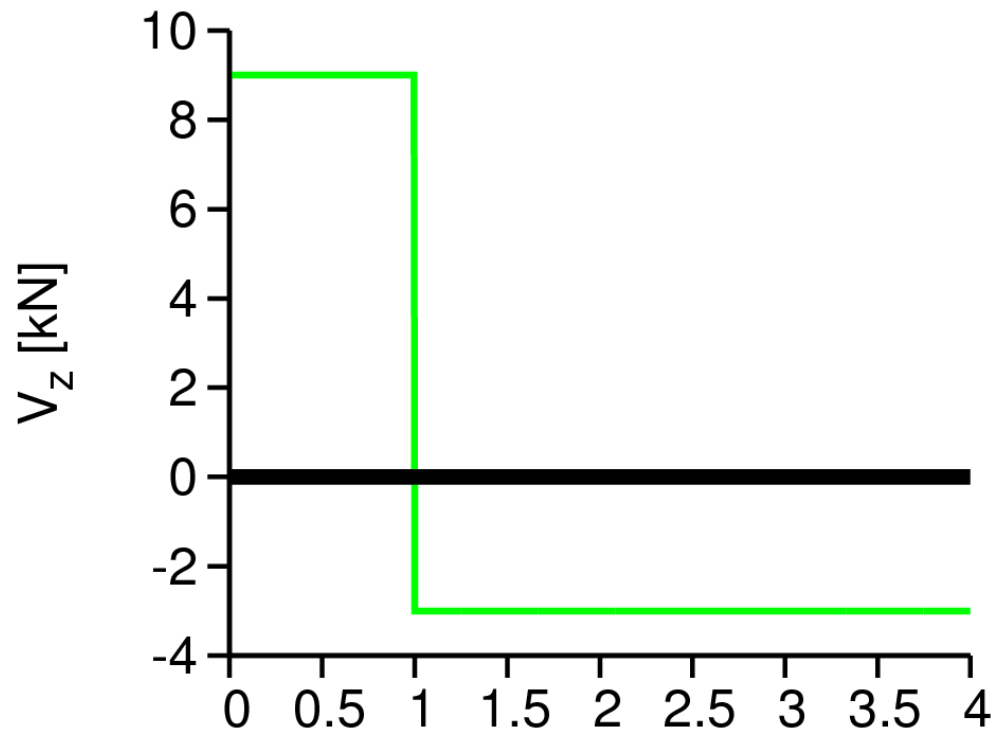
$$EI_y w'' = -9x + 12(x-1)$$

$$EI_y w' = -4.5x^2 + 6(x-1)^2 + C_1$$

$$EI_y w = -1.5x^3 + 2(x-1)^3 + C_1 x$$

$$w(4) = 0 \rightarrow C_1 = 10.5$$

$$w = \frac{1}{EI_y} (-1.5x^3 + 2(x-1)^3 + 10.5x)$$



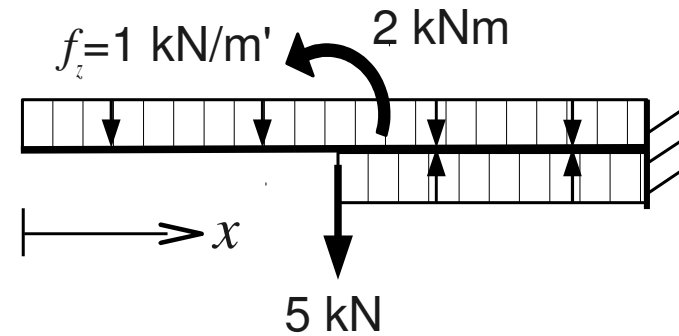
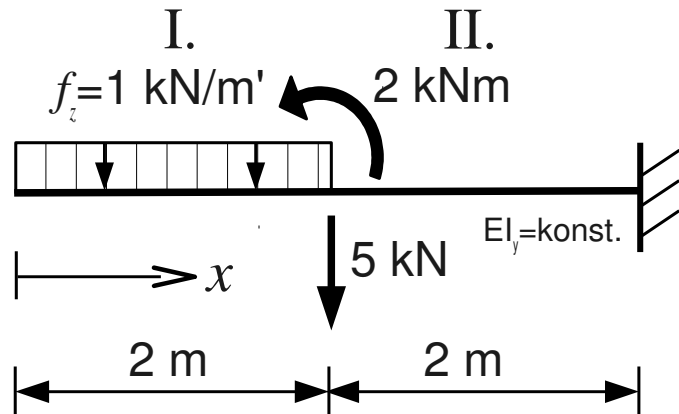
Clebschova metoda integrace

- Vhodná pouze pro nosníky, kde $EI_y = \text{konst.}$
- Pro libovolný počet intervalů zredukuje celkový počet integračních konstant na dvě (pro dif. r. 2. řádu)

Zásady integrace

- 1) Systém souřadnic volit jednotně pro celý nosník
- 2) Po částech spojitě zatížení je nutné vhodně odečítat. „Chybějící“ spojitě zatížení na dalším intervalu nahradit „protizatížením“ užitím principu superpozice. Celkové zatížení pak odpovídá zatížení zadanému.
- 3) Moment vyjádřit jako součet momentu z předchozího intervalu a dalšího členu
- 4) Osamělý moment nutno integrovat přes $d(x-a)$
- 5) Výrazy tvaru $(x-a)^n$ integrovat v uzavřeném tvaru tak, aby na rozhraní intervalů byly rovny nule (jako při substituci $t=x-a$, $dx=dt$)

Příklad – Clebschova metoda



I. interval

$$M_y = \frac{-x^2}{2}$$

$$EI_y w'' = \frac{x^2}{2}$$

$$EI_y w' = \frac{x^3}{6} + C_1 \xrightarrow{\text{Spojitost natočení}}$$

$$EI_y w = \frac{x^4}{24} + C_1 x + C_2 \xrightarrow{\text{Spojitost průhybu}}$$

$$w'(0) = \frac{-70}{3EI_y}, \quad w(0) = \frac{218}{3EI_y}$$

$$w'(2) = \frac{-22}{EI_y}, \quad w(2) = \frac{80}{3EI_y}$$

II. interval

$$M_y = \frac{-x^2}{2} + \frac{(x-2)^2}{2} - 5(x-2) - 2$$

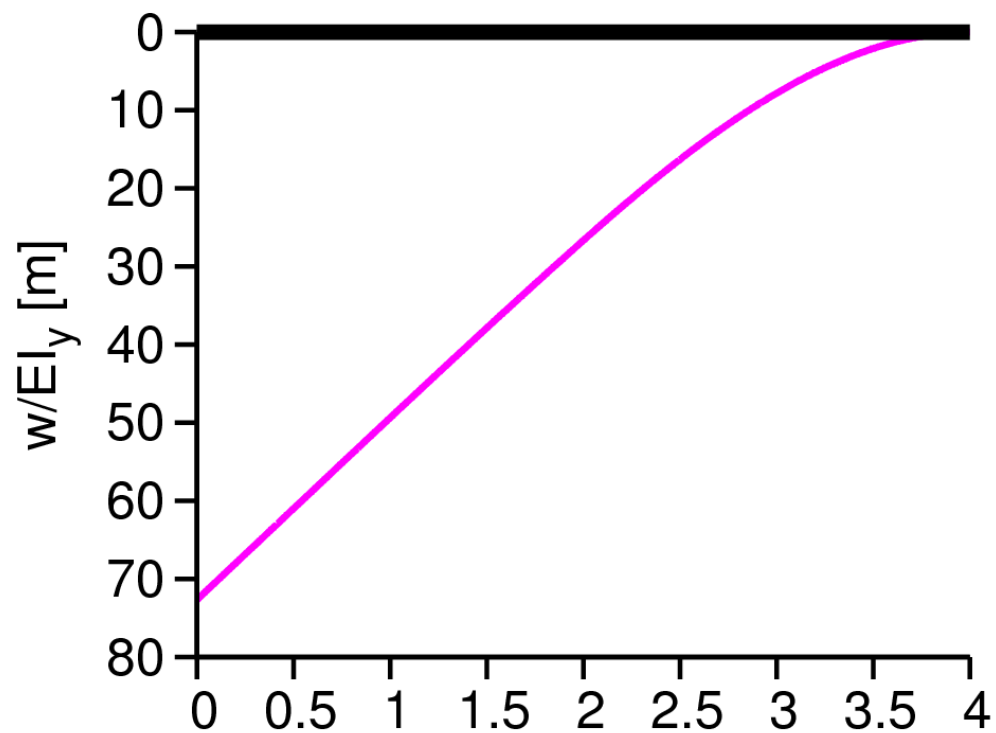
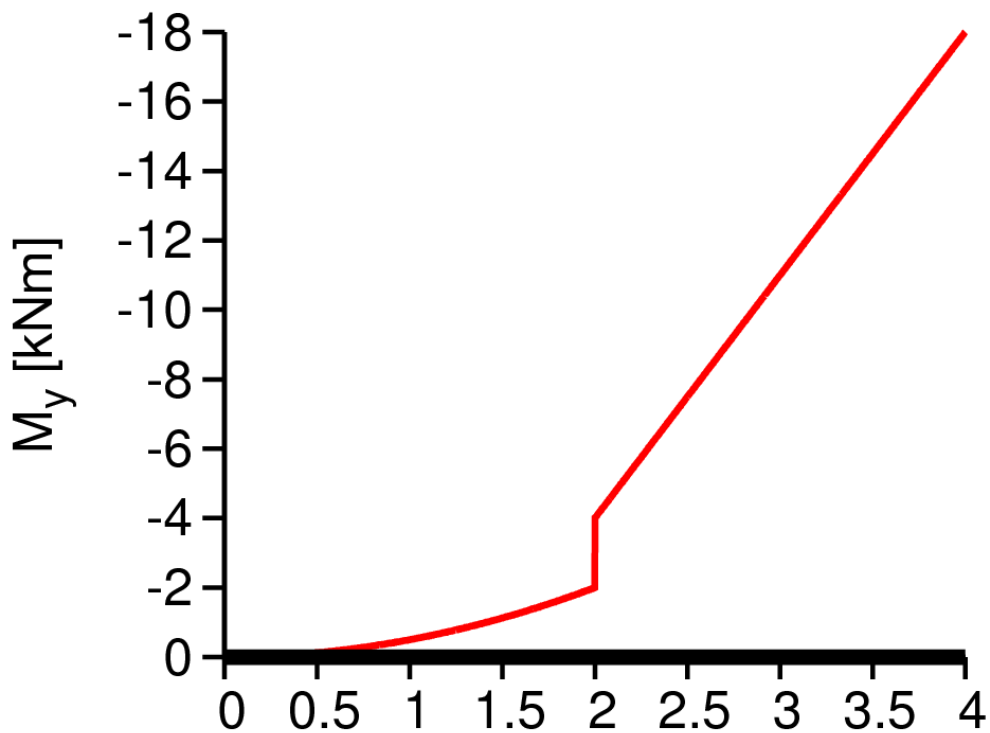
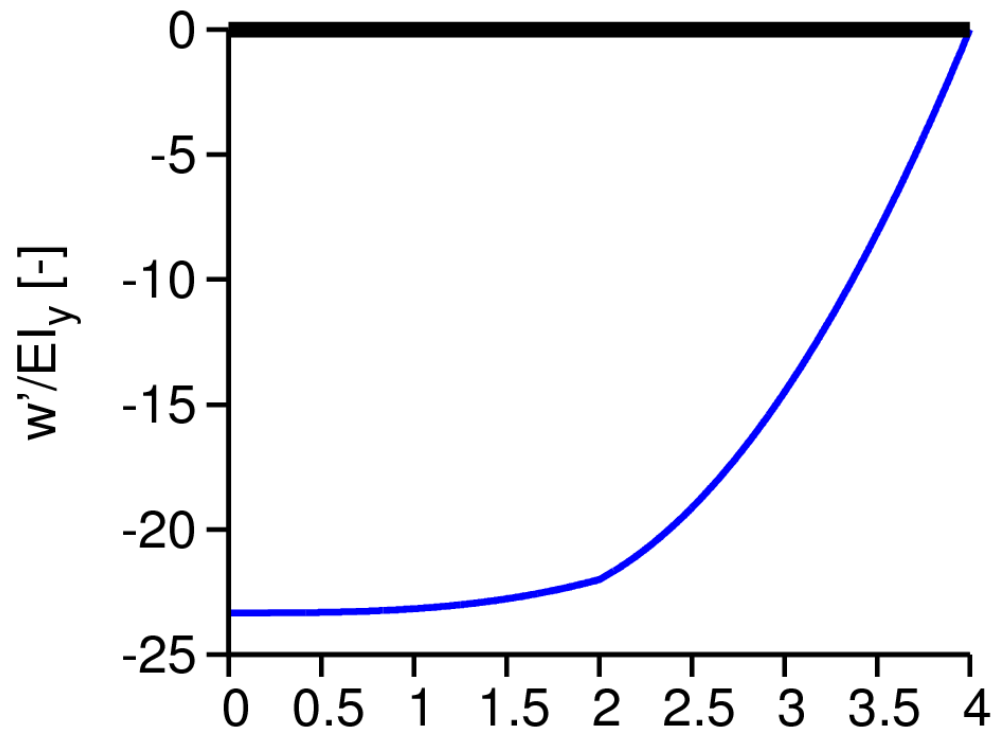
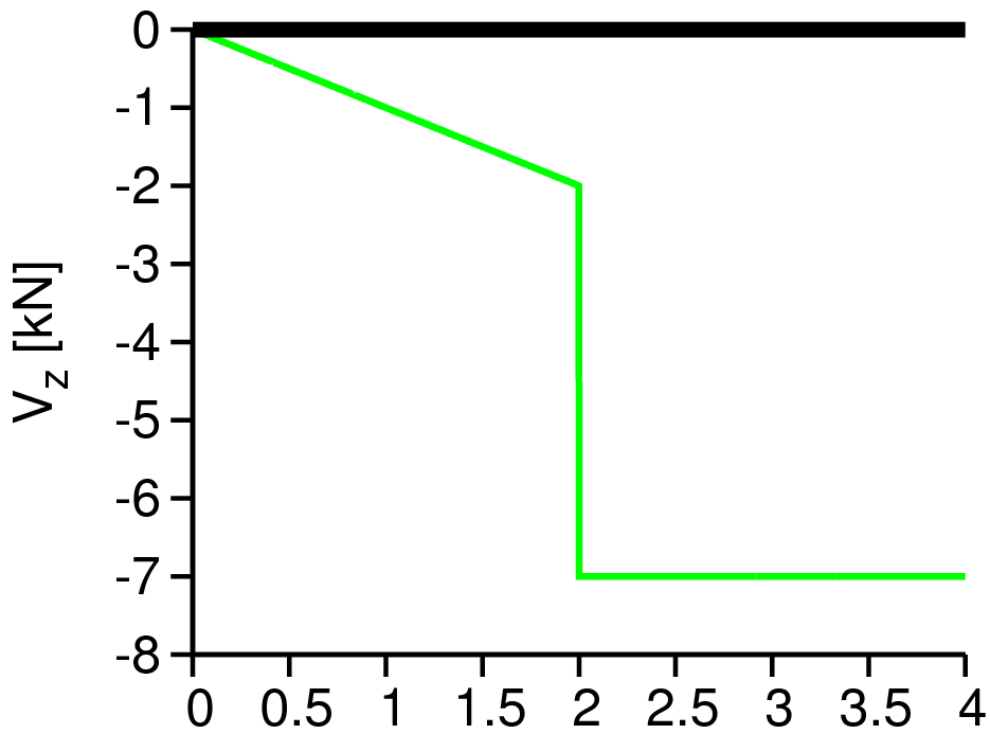
$$EI_y w'' = \frac{x^2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2} + 5(x-2) + 2$$

$$EI_y w' = \frac{x^3}{6} - \frac{(x-2)^3}{6} + 5 \frac{(x-2)^2}{2} + 2(x-2) + C_1$$

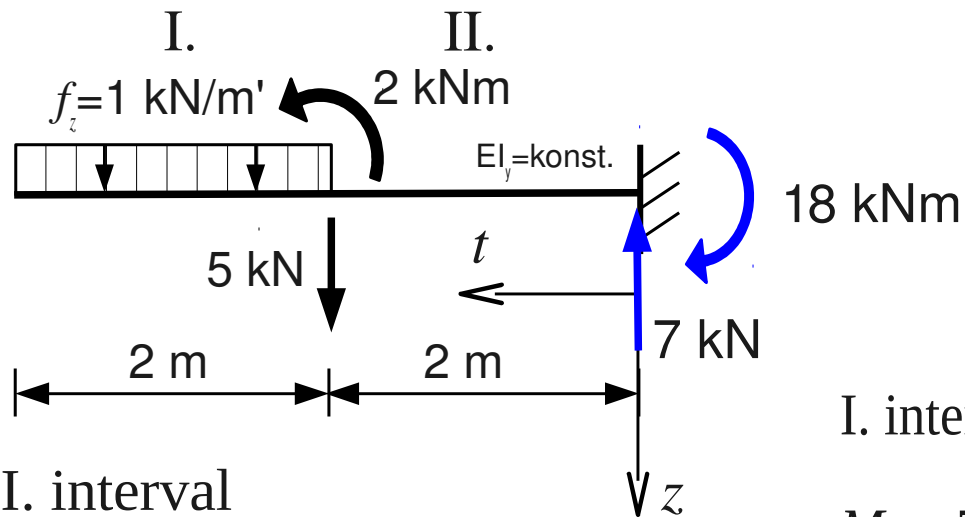
$$EI_y w = \frac{x^4}{24} - \frac{(x-2)^4}{24} + 5 \frac{(x-2)^3}{6} + (x-2)^2 + C_1 x + C_2$$

$$w'(4) = 0 \rightarrow C_1 = \frac{-70}{3}$$

$$w(4) = 0 \rightarrow C_2 = \frac{218}{3}$$



Příklad – Clebschova metoda, integrace zprava



Obecně: $dx = d(l-t) = -dt$

$$\frac{dV(t)}{dt} = f_z(t), \quad \frac{dM_y(t)}{dt} = -V_z(t), \quad EI_y w'' = -M_y$$

$$\kappa = \frac{-d^2 w}{dt^2}, \quad w' = \int w'' dt, \quad w = \int w' dt$$

II. interval

$$M_y = 7t - 18$$

$$EI_y w'' = -M_y = -7t + 18$$

$$EI_y w' = \frac{-7}{2} t^2 + 18t + C_1$$

$$w'(t=0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$EI_y w = \frac{-7}{6} t^3 + 9t^2 + C_2$$

$$w(t=0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$w'(t=2) = \frac{22}{EI_y}, \quad w(t=2) = \frac{80}{3EI_y}$$

I. interval

$$M_y = 7t - 18 + 2 - 5(t-2) - \frac{(t-2)^2}{2}$$

$$EI_y w'' = -M_y = -7t + 18 - 2 + 5(t-2) + \frac{(t-2)^2}{2}$$

Spojitosť natočení

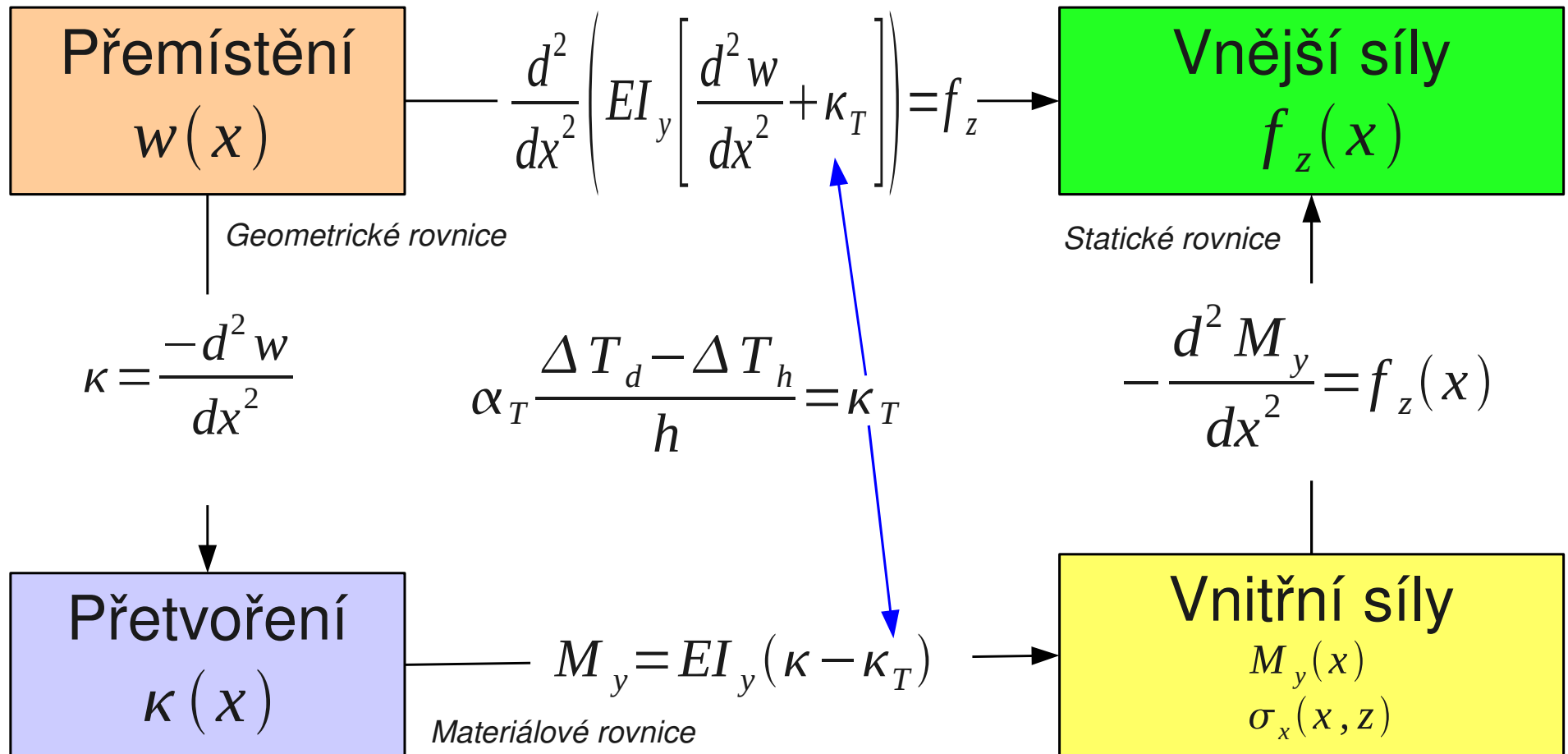
$$EI_y w' = \frac{-7}{2} t^2 + 18t - 2(t-2) + 5 \frac{(t-2)^2}{2} + \frac{(t-2)^3}{6} + \underbrace{C_1}_{=0}$$

Spojitosť průhybu

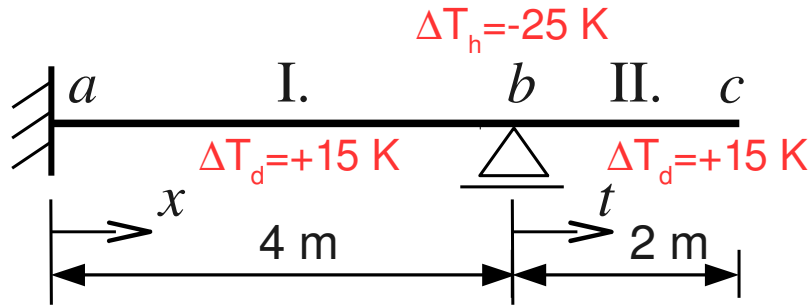
$$EI_y w = \frac{-7}{6} t^3 + 9t^2 - (t-2)^2 + 5 \frac{(t-2)^3}{6} + \frac{(t-2)^4}{24} + \underbrace{C_2}_{=0}$$

$$w'(t=4) = \frac{70}{3EI_y}, \quad w(t=4) = \frac{218}{3EI_y}$$

Toného diagram pro ohýbaný prut s vlivem teploty



Příklad – určete průhyb volného konce c od teploty



$$\alpha = 1e-5 \text{ K}^{-1}$$

$$EI_y = 10 \text{ MNm}^2$$

$$h = 0.4 \text{ m}$$

$$\kappa_T = 0.001 \text{ m}^{-1}$$

I. interval $x \in \langle 0, 4 \rangle$

$$V_z = C_1$$

$$M_y = C_1 x + C_2$$

$$M_y(4) = 0 \rightarrow C_2 = -4C_1$$

$$EI_y w'' = -C_1 x + 4C_1 - EI_y \kappa_T$$

$$EI_y w' = \frac{-C_1}{2} x^2 + 4C_1 x - EI_y \kappa_T x + \underbrace{C_3}_{=0}$$

$$EI_y w = \frac{-C_1}{6} x^3 + 2C_1 x^2 - EI_y \frac{\kappa_T}{2} x^2 + \underbrace{C_4}_{=0}$$

$$w(4) = 0 \rightarrow C_1 = 3.75, \quad C_2 = -15$$

$$w'(4) = -0.001$$

Spojitost natočení v průřezu b

II. interval $t \in \langle 0, 2 \rangle$

$$M_y = 0$$

$$EI_y w'' = -EI_y \kappa_T$$

$$EI_y w' = -EI_y \kappa_T t + C_5$$

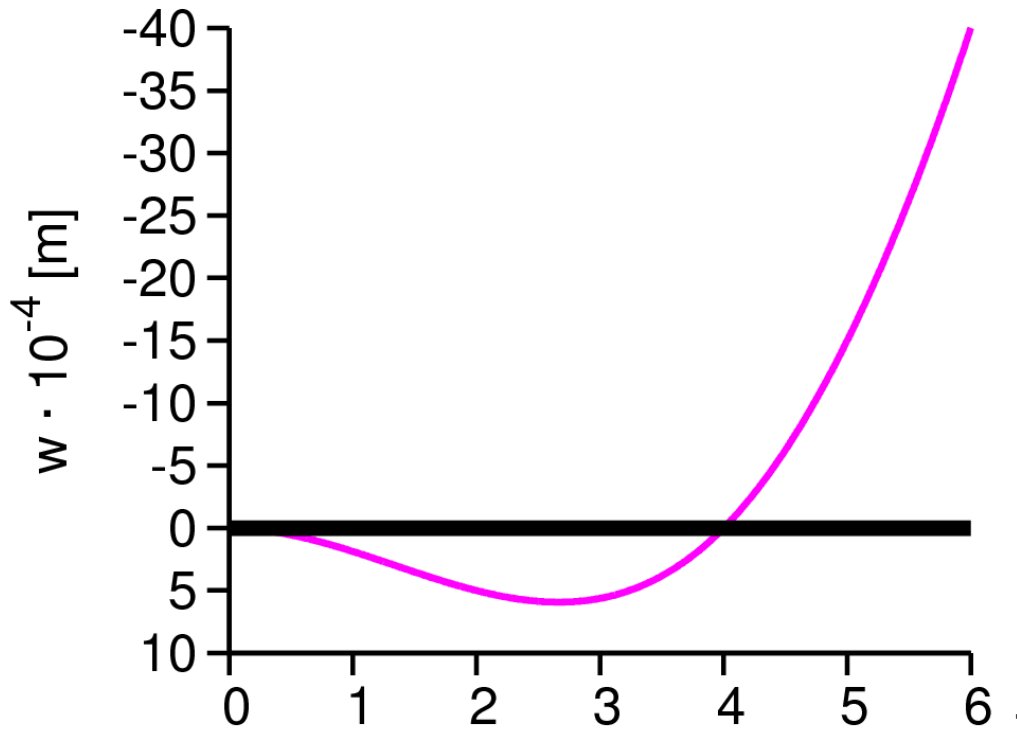
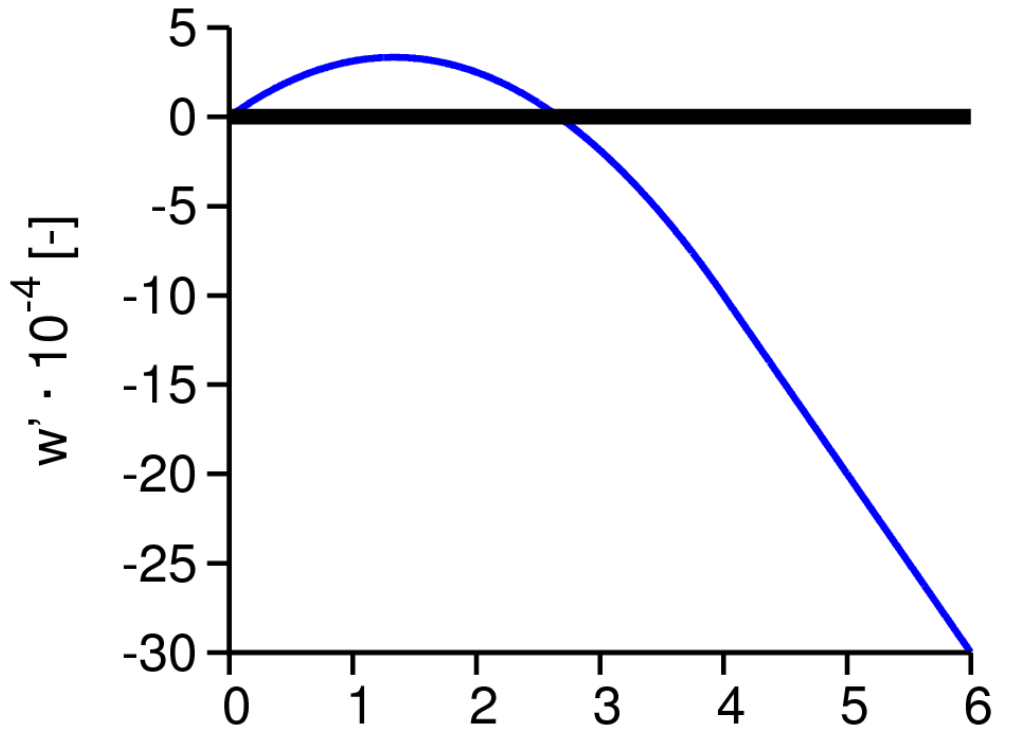
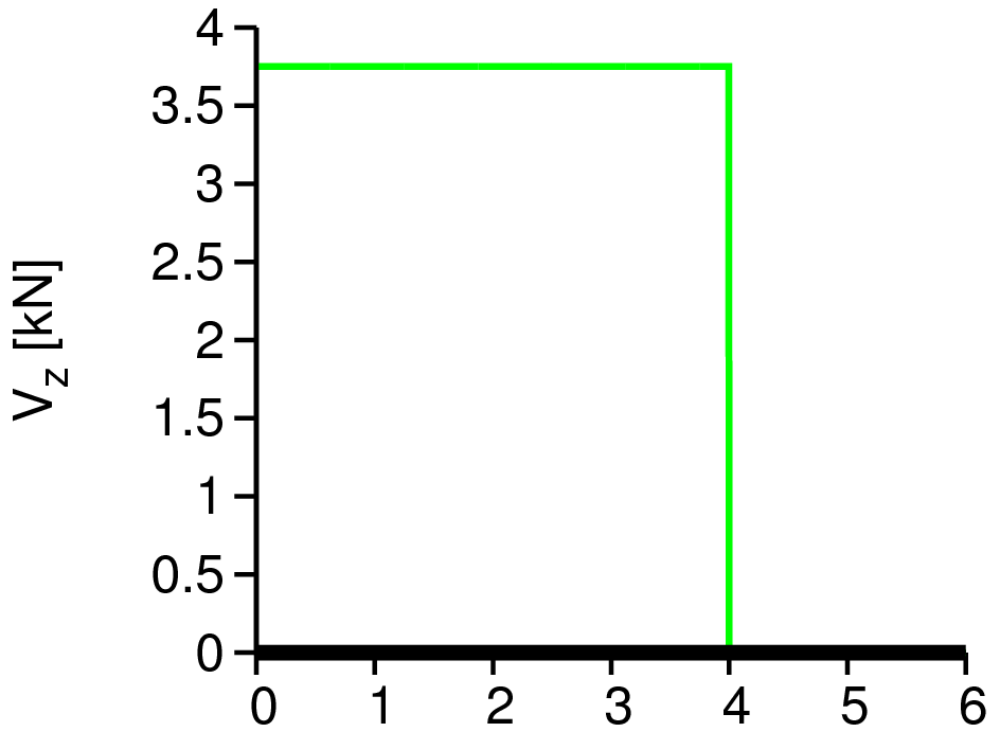
$$w'(t=0) = -0.001 \rightarrow C_5 = -10$$

$$EI_y w = -EI_y \kappa_T \frac{t^2}{2} + C_5 t + C_6$$

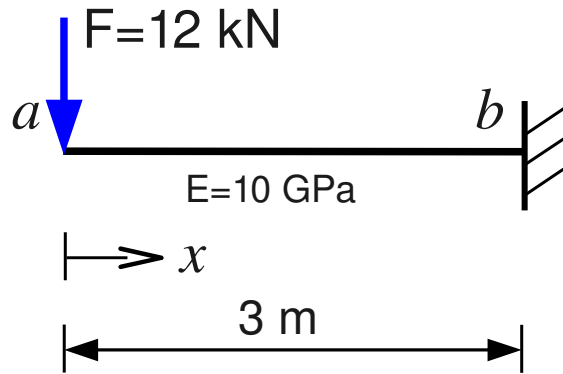
$$w(t=0) = 0 \rightarrow C_6 = 0$$

$$w(t=2) = -2 \kappa_T - \frac{20}{10000} = -4 \text{ mm}$$

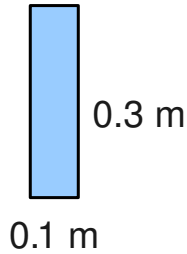
Na intervalu I. jsou k dispozici 4 o.p., interval II. lze tedy řešit „ex post“



Příklad – konzola s proměnlivým průřezem

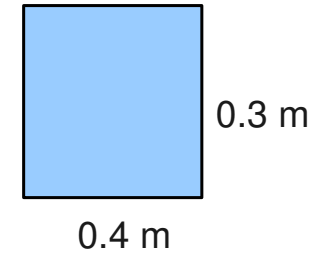


Průřez a



Lineární změna
šířky průřezu
 $b = 0.1(x+1) \text{ [m]}$

Průřez b



$$V_z = -12 \text{ kN}, \quad M_y = -12x \text{ kNm}$$

$$EI_y = \frac{10e+6 \cdot 0.1}{12} (x+1) \cdot 0.3^3 = 2250(x+1) \text{ kNm}^2$$

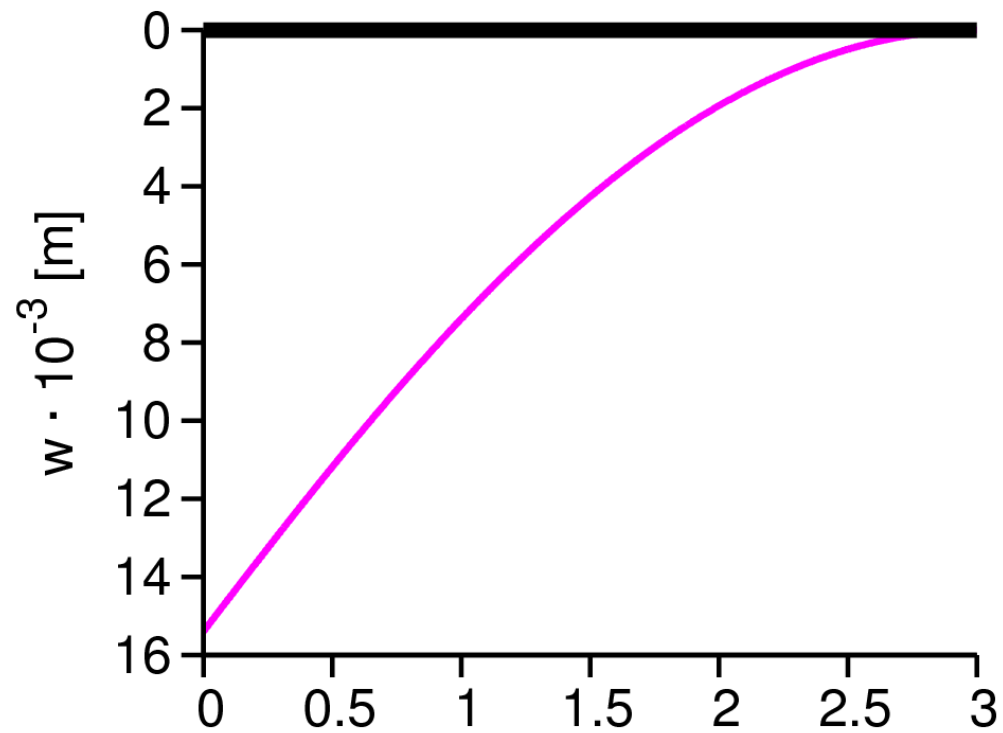
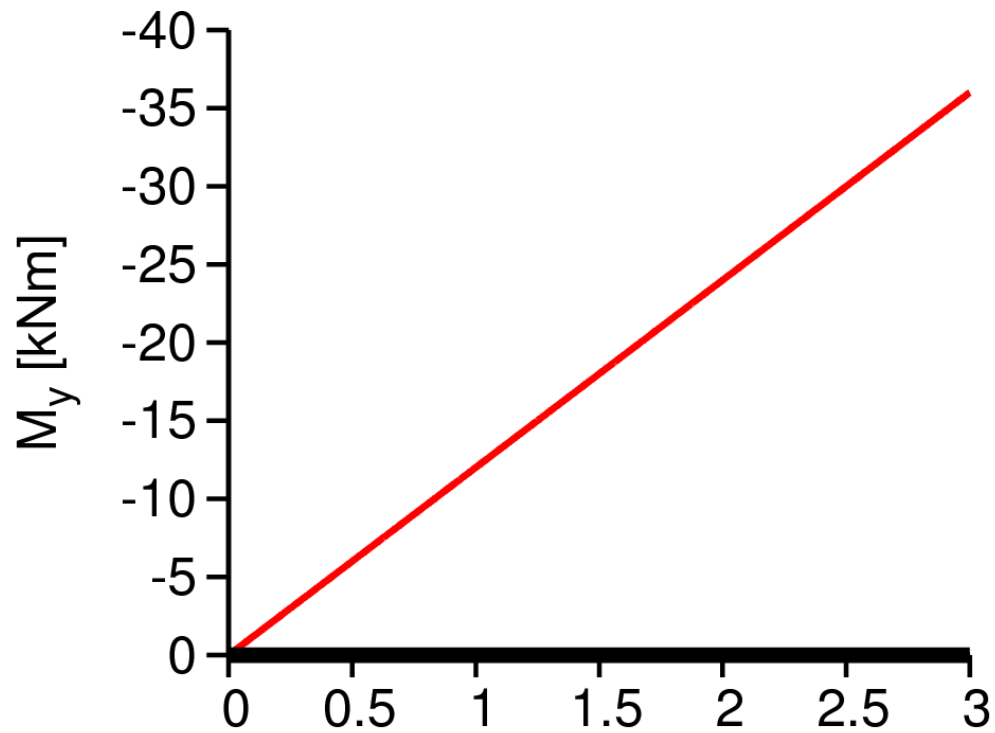
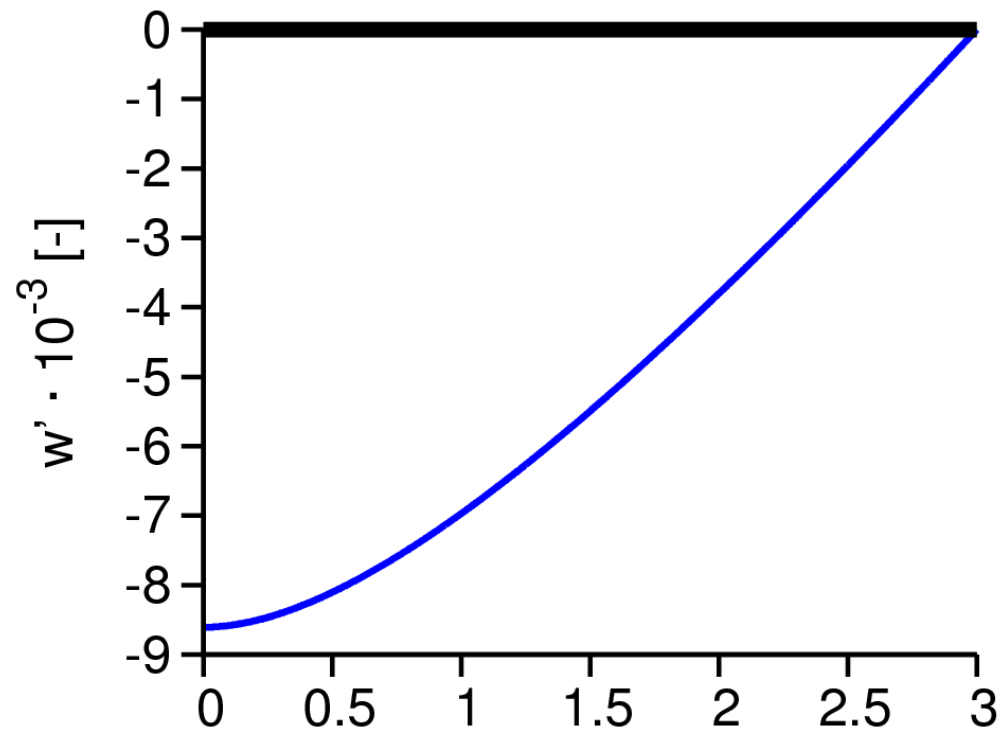
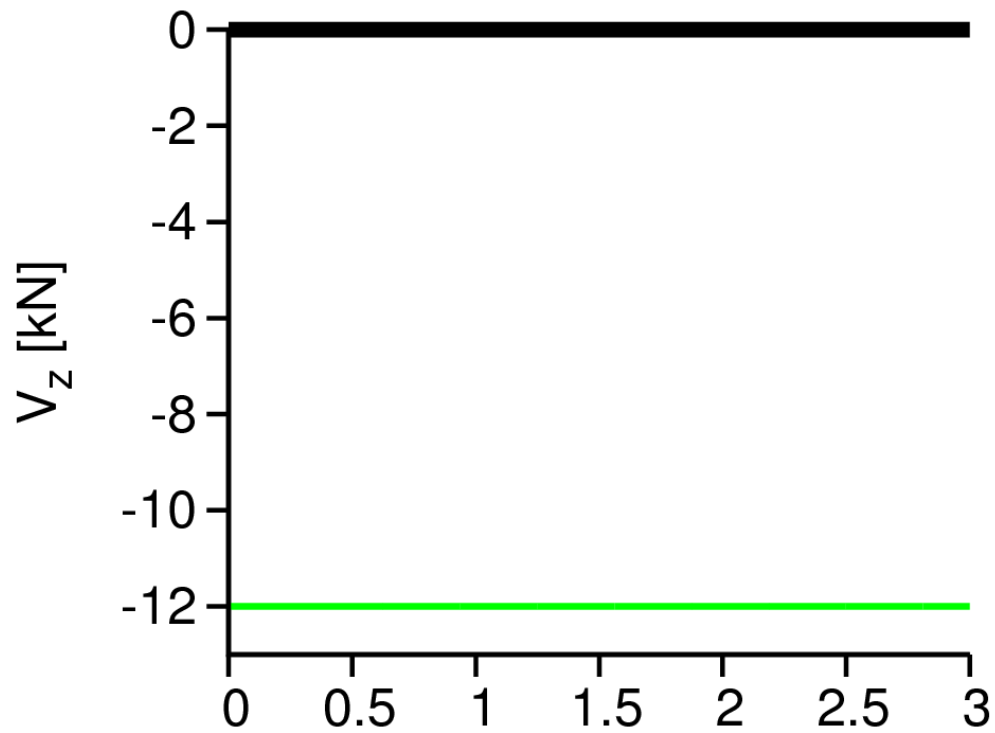
$$w'' = \frac{-M_y}{EI_y} = \frac{12x}{2250(x+1)} = x / (187.5x + 187.5) = \frac{1}{187.5} - \frac{187.5}{187.5(187.5x + 187.5)} =$$

$$= \frac{1}{187.5} - \frac{1}{187.5 \underbrace{(x+1)}_{\text{substitute } =t}}$$

$$w' = \frac{x}{187.5} - \frac{1}{187.5} \ln(x+1) + C_1, \quad w'(3) = 0 \rightarrow C_1 = -0.0086064$$

$$w = \frac{x^2}{375} + \frac{-(x+1)\ln(x+1) + x + 1}{187.5} + C_1 x + C_2, \quad w(3) = 0 \rightarrow C_2 = 0.01006$$

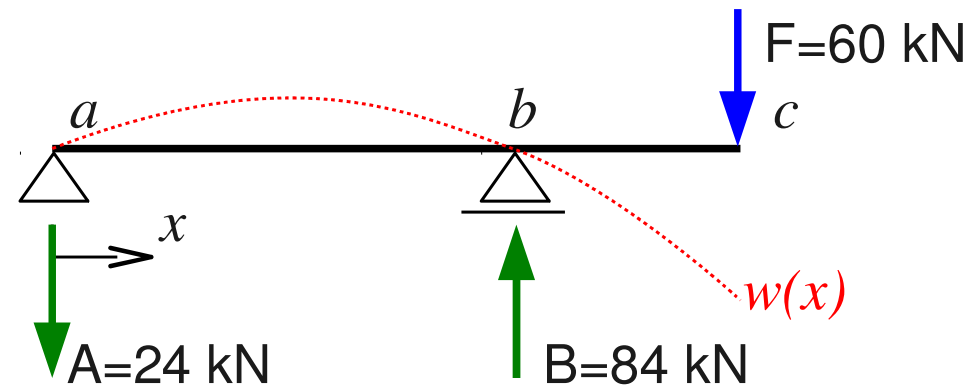
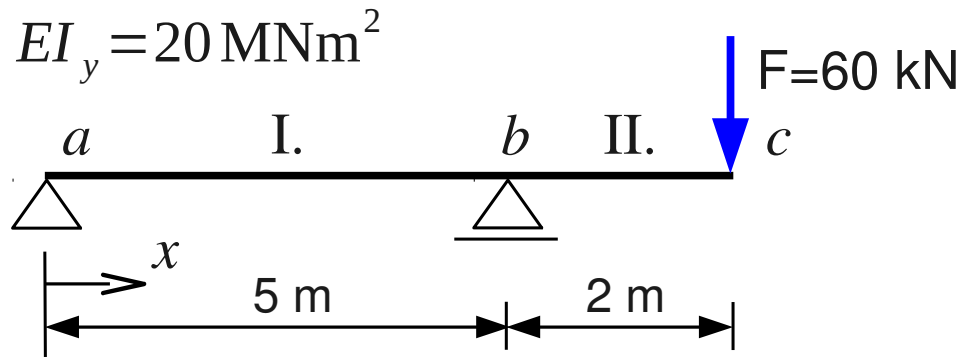
$$w(0) = 0.01539 \text{ m} \quad \left[\text{porovnání s konst. šířkou } b = 0.4 \rightarrow 12 \text{ mm}, \quad b = 0.1 \rightarrow 48 \text{ mm} \right]$$



Otázky

1. Co je izolinie napětí? Při jakých typech výpočtů se používá?
2. Popište závislost mezi křivostí, natočením a průhybem prutu.
3. Odvodte 1. a 2. Schwedlerovu větu na infinitezimálním úseku prutu. Existuje nosník s nulovým momentem a nenulovou posouvající silou?
4. Jakého řádu je diferenciální rovnice ohybové čáry? Jak se změní řád rovnice, pokud známe funkci momentu?
5. Kolik okrajových podmínek potřebujeme předepsat na diferenciální rovnici ohybové čáry 4. řádu? Lze rovnicí řešit staticky neurčitě konstrukce?
6. Jakého řádu je funkce průhybu při rovnoměrném spojitým zatížení?
7. Co jsou podmínky spojitosti na nosníku a za jakých podmínek se používají? Jaký je počet podmínek ve vztahu k počtu intervalů?
8. Při integraci diferenciální rovnice 4. řádu zprava se při některých integracích mění znaménko. Vysvětlete a zdůvodněte proč.
9. Vysvětlete účinek teploty na křivost prutu a jakého stupně polynomu jsou průhyby od konstantního nerovnoměrného zatížení teplotou.

Určete natočení φ_a a průhyb w_c



I. interval $x \in \langle 0, 4 \rangle$

$$M_y = -24x$$

$$EI_y w'' = 24x$$

$$EI_y w' = 12x^2 + C_1 \xrightarrow{\text{Spojitost natočení}}$$

$$EI_y w = 4x^3 + C_1 x + C_2 \xrightarrow{\text{Spojitost průhybu}}$$

$$w(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$w(5) = 0 \rightarrow 0 = 4 \cdot 5^3 + 5C_1, C_1 = -100$$

$$w'(0) = \frac{-100}{EI_y} = -0.005 \text{ rad}$$

$$\varphi(0) = -w'(0) = 0.005 \text{ rad}$$

II. interval $x \in \langle 5, 7 \rangle$

Integrace pomocí Clebschovy metody

$$M_y = -24x + 84(x - 5)$$

$$EI_y w'' = 24x - 84(x - 5)$$

$$EI_y w' = 12x^2 - 42(x - 5)^2 + C_1$$

$$EI_y w = 4x^3 - 14(x - 5)^3 + C_1 x + C_2$$

$$w(x=7) = \frac{4 \cdot 7^3 - 14 \cdot 2^3 - 100 \cdot 7}{EI_y}$$

$$= \frac{560}{EI_y} = 0.028 \text{ m}$$