

Přednáška 05

Vybočení ideálně přímého prutu
Vybočení prutu s počáteční deformací
Energetická formulace stability
Okrajové podmínky a staticky neurčité případy
Příklady

Copyright (c) 2011 Vít Šmilauer

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Mechanics, Czech Republic

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License" found at <http://www.gnu.org/licenses/>

Stabilita přímých prutů

- Tlačené štíhlé pruty jsou ohroženy ztrátou stability
 - Prut zůstává přímý až do kritické hodnoty zatížení
 - Po překročení kritické hodnoty může prut vybočit
 - U viskoelastických materiálů hraje roli čas
- Vzpěr = namáhání prutu tlakovou osovou silou
- Vybočení štíhlých prutů patří mezi časté havárie konstrukcí, zatížení teplotou na stat. neurč. konstrukcích

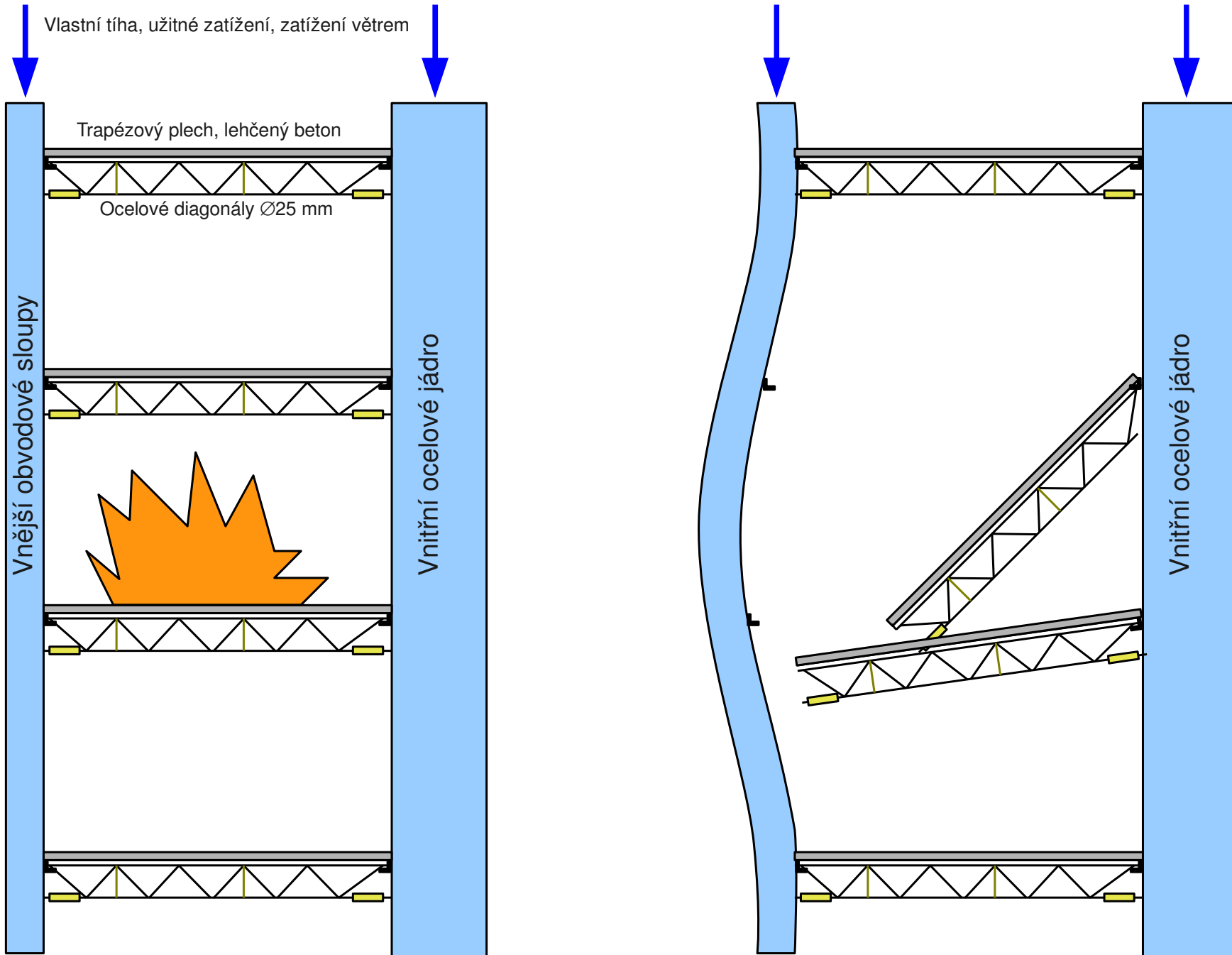


[Publikováno se svolením Hasičského záchranného sboru hl.m.Prahy]



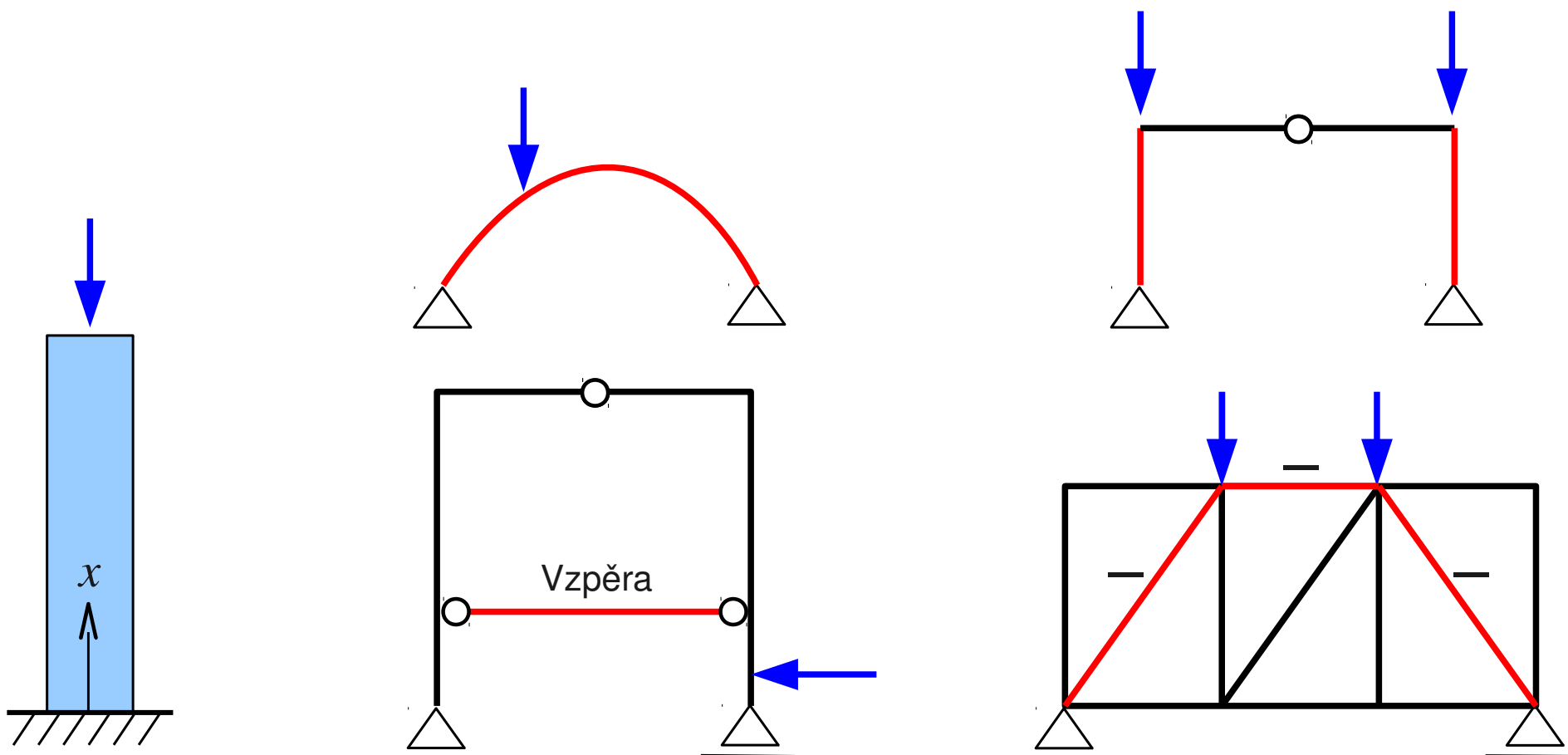
[Zdroj: BBC, EPA, Reuters]

World Trade Center



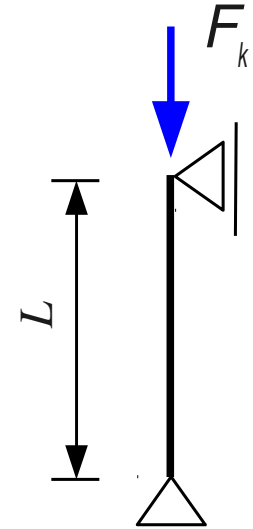
Prvky náchylné na vzpěr

- Vybočení prutu u staticky určité konstrukce může vést ke kolapsu celé konstrukce
- U většiny inženýrských konstrukcí se snažíme vybočení prutu zabránit

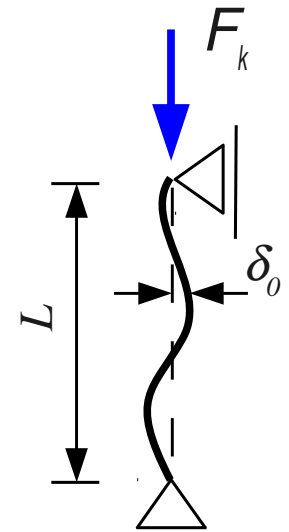


Geometrické modely prutu

- Ideální prut
 - Dokonale přímý, centricky zatížený
 - K vybočení je třeba příčného impulzu (příčná síla, nerovn. ohřátí)
 - Výpočet kritické síly F_k

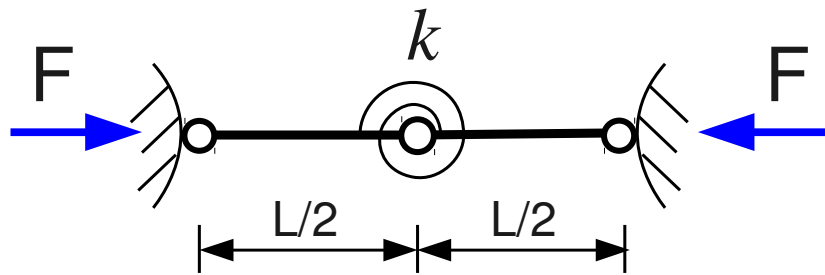


- Geometricky imperfektní prut
 - Odchytky δ_0 od přímého tvaru mají náhodný charakter, obvykle $(1/500-1/1000 \ l)$
 - Kombinace tlaku s ohybem pro výpočet síly F_k



Teorie 2. řádu – geometrická nelinearita

- Podmínky rovnováhy se sestavují na **deformované konstrukci**
- Na ohýbaných prutech posuny u a rotace φ_y zůstávají malé, průhyby w jsou velké



$$M_{destab} = Fw = F \frac{L}{2} \sin \Delta \varphi$$

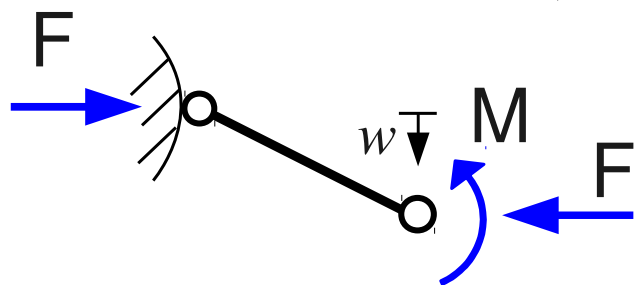
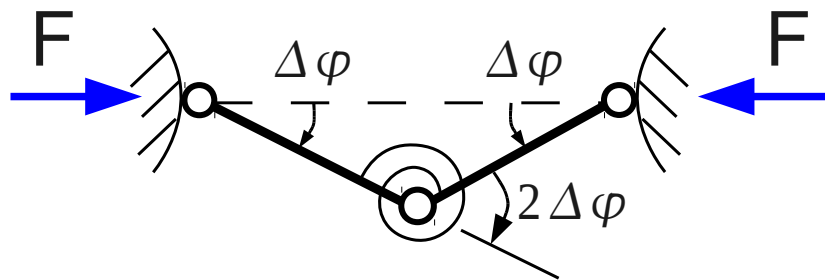
$$M_{stab} = k 2 \Delta \varphi$$

$$M_{destab} = M_{stab} = F_k \frac{L}{2} \sin \Delta \varphi = k 2 \Delta \varphi$$

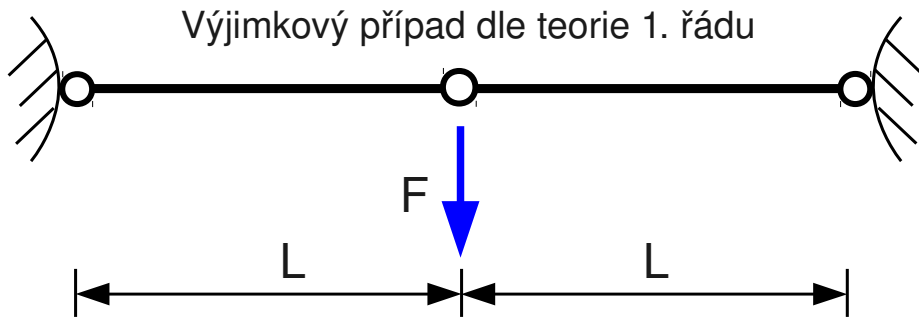
$$\sin \Delta \varphi \approx \Delta \varphi$$

Netriviální řešení $\Delta \varphi \neq 0$

$$F_k = \frac{4k}{L}$$



Teorie 2. řádu – geometrická nelinearita



$$-2 N \sin \varphi + F = 0$$

$$\Delta L = \frac{L}{\cos \varphi} - L = \frac{1 - \cos \varphi}{\cos \varphi} L$$

$$N = EA \frac{\Delta L}{L} = EA \frac{1 - \cos \varphi}{\cos \varphi}$$

$$2 EA \frac{1 - \cos \varphi}{\cos \varphi} \sin \varphi = F$$

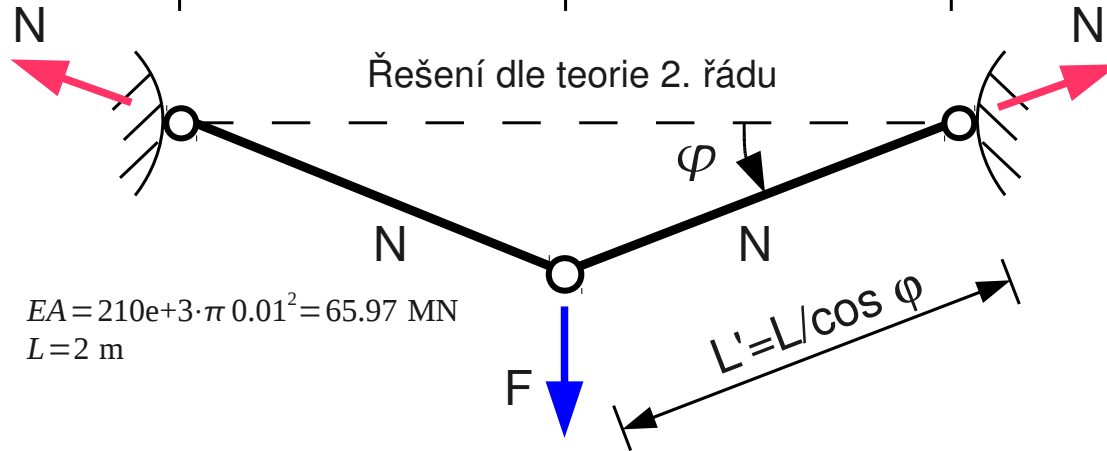
$$\sin \varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \approx \varphi$$

$$\cos \varphi \approx \varphi - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots \approx \varphi - \frac{\varphi^2}{2}$$

$$2EA \varphi \frac{\varphi^2}{2} = F, \quad \varphi^3 = \frac{F}{EA}$$

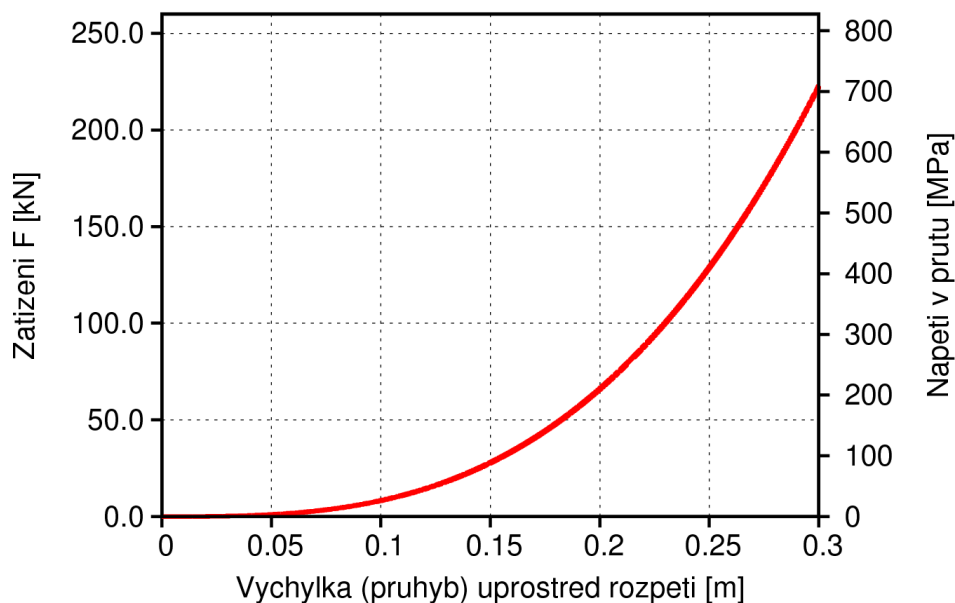
$$\varphi = \sqrt[3]{\frac{F}{EA}}, \quad w \approx \varphi L = L \sqrt[3]{\frac{F}{EA}}$$

$$N = EA \frac{1 - \cos \varphi}{\cos \varphi} \approx EA \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \sqrt[3]{EA F^2}$$



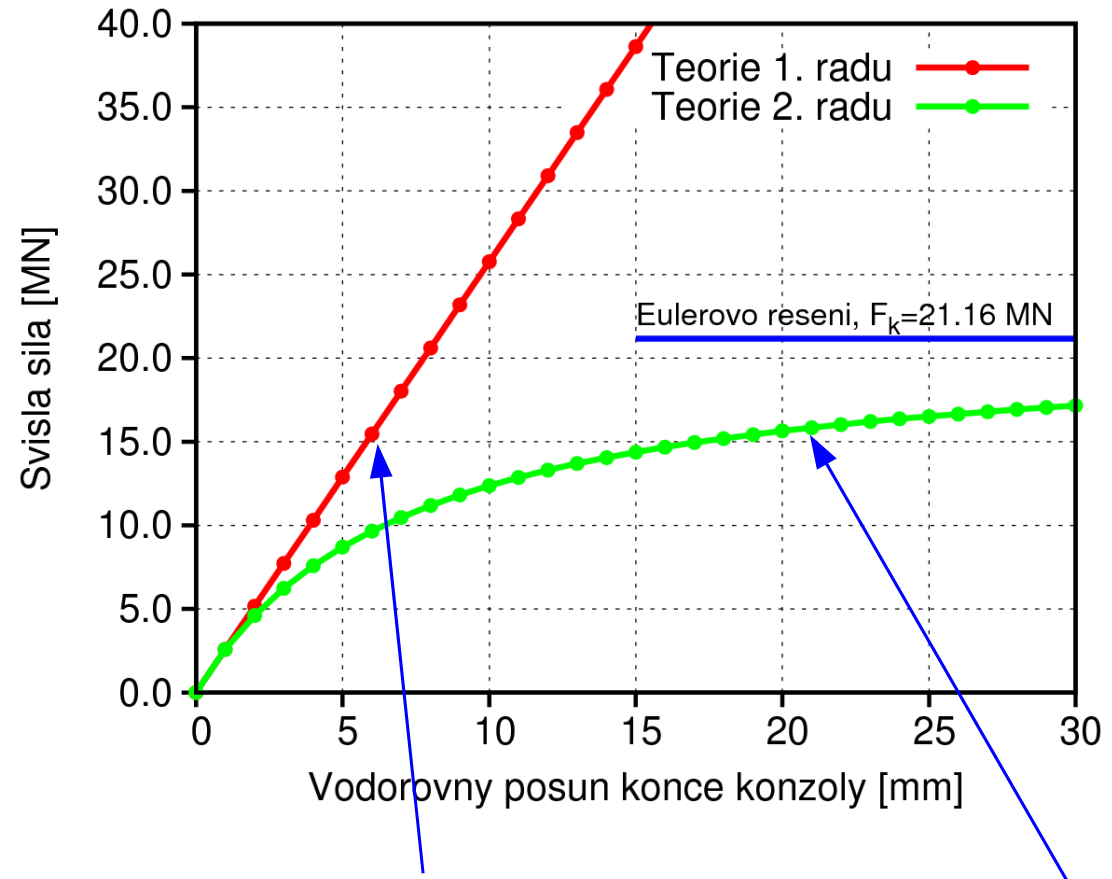
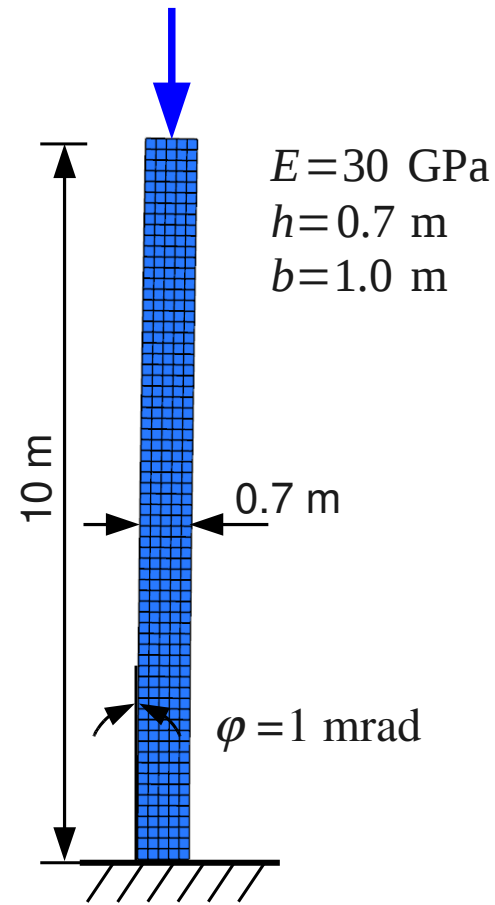
$$EA = 210 \times 10^9 \cdot \pi \cdot 0.01^2 = 65.97 \text{ MN}$$

$$L = 2 \text{ m}$$



Pozn. Do výpočtu geometricky nelineární úlohy nebyla zavedena pevnost!

Simulace vzpěru pomocí metody konečných prvků



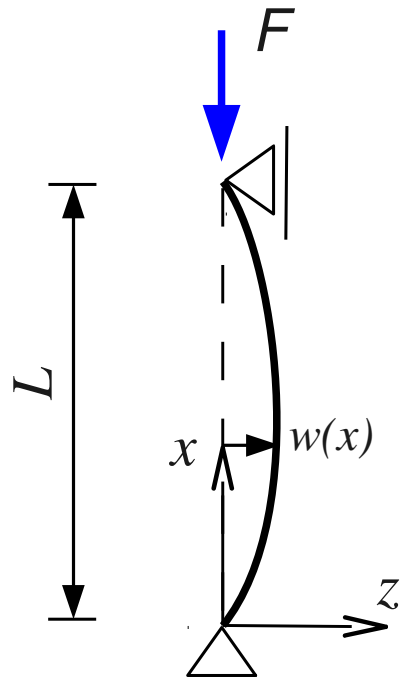
Posuny 500x zvětšeny

V obou případech se uvažoval čistě lineárně elastický materiál.

Problém vzpěru nezávisí na pevnosti materiálu!

Vybočení ideálně přímého prutu

- Eulerova geometrická metoda – publikována 1759



$$M_y(x) = Fw(x)$$

$$M_y(x) = -EIw''(x)$$

$$EIw''(x) + Fw(x) = 0$$

$$w(0) = 0, w(L) = 0$$

$$w''(x) + \alpha^2 w(x) = 0, \quad \alpha = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

$$\text{Char. rovnice } \lambda^2 + \alpha^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm \alpha i$$

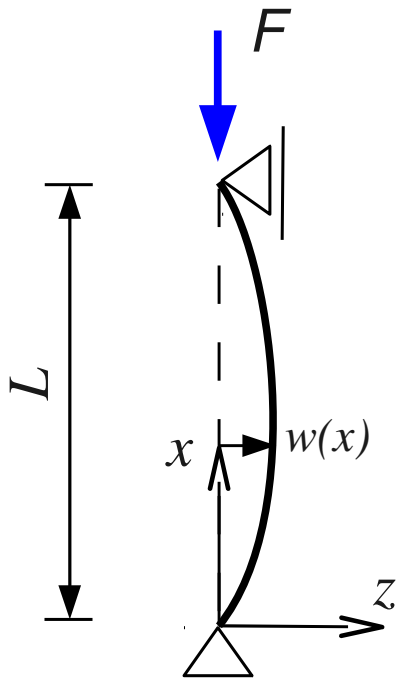
$$w(x) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x$$

$$w(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$w(L) = 0 = C_1 \sin \alpha L \rightarrow C_1 = 0 \dots \text{triviální řešení}$$

$\sin \alpha L = 0 \dots \text{netriviální řešení}$

Vybočení ideálně přímého prutu



$$\sin \alpha L = 0, \alpha L = n \pi$$

$$L \sqrt{\frac{F}{EI}} = n \pi$$

$$F = \frac{EI n^2 \pi^2}{L^2}$$

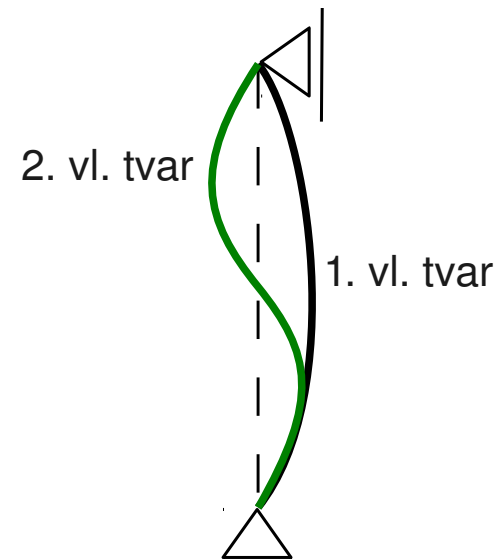
Kritické břemeno, $n=1$: $F = F_k = \frac{EI \pi^2}{L^2}$

První vlastní tvar vybočení: $w(x) = C_1 \sin \frac{\pi x}{L}$

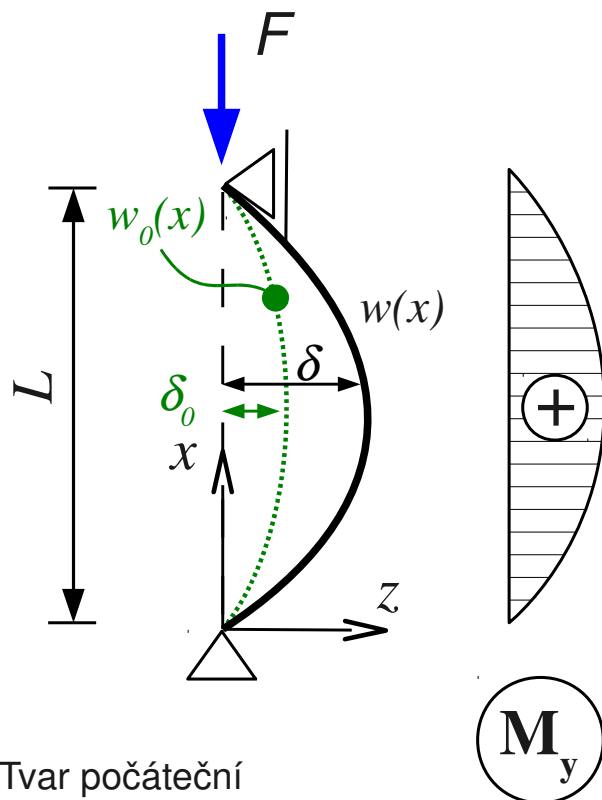
Kritické břemeno, $n=2$: $F = \frac{EI 4 \pi^2}{L^2} = 4 F_k$

Druhý vlastní tvar vybočení: $w(x) = C_1 \sin \frac{2 \pi x}{L}$

... a další vlastní tvary ...



Vybočení prutu s počátečním zakřivením



Tvar počáteční imperfekce prutu volíme jako první vlastní tvar vybočení.

Předpoklad: $w_0(x) = \delta_0 \sin \frac{\pi x}{L}$

$M = -EI (w'' - w_0'')$ Argumenty (x) u funkcí vynechány

$EI w'' + Fw = EI w_0''$ Diferenciální rovnice 2. řádu pro vzpěr

$w'' + \alpha^2 w = w_0''$, $\alpha = \sqrt{\frac{F}{EI}}$

$w_0'' = -\frac{\delta_0 \pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L}$

$w = \underbrace{-\frac{\delta_0 \pi^2}{L^2 (\alpha^2 - \pi^2/L^2)} \sin \frac{\pi x}{L}}_{w_p} + C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x$

$w(0) = 0, w(L) = 0 \rightarrow C_1 = C_2 = 0$

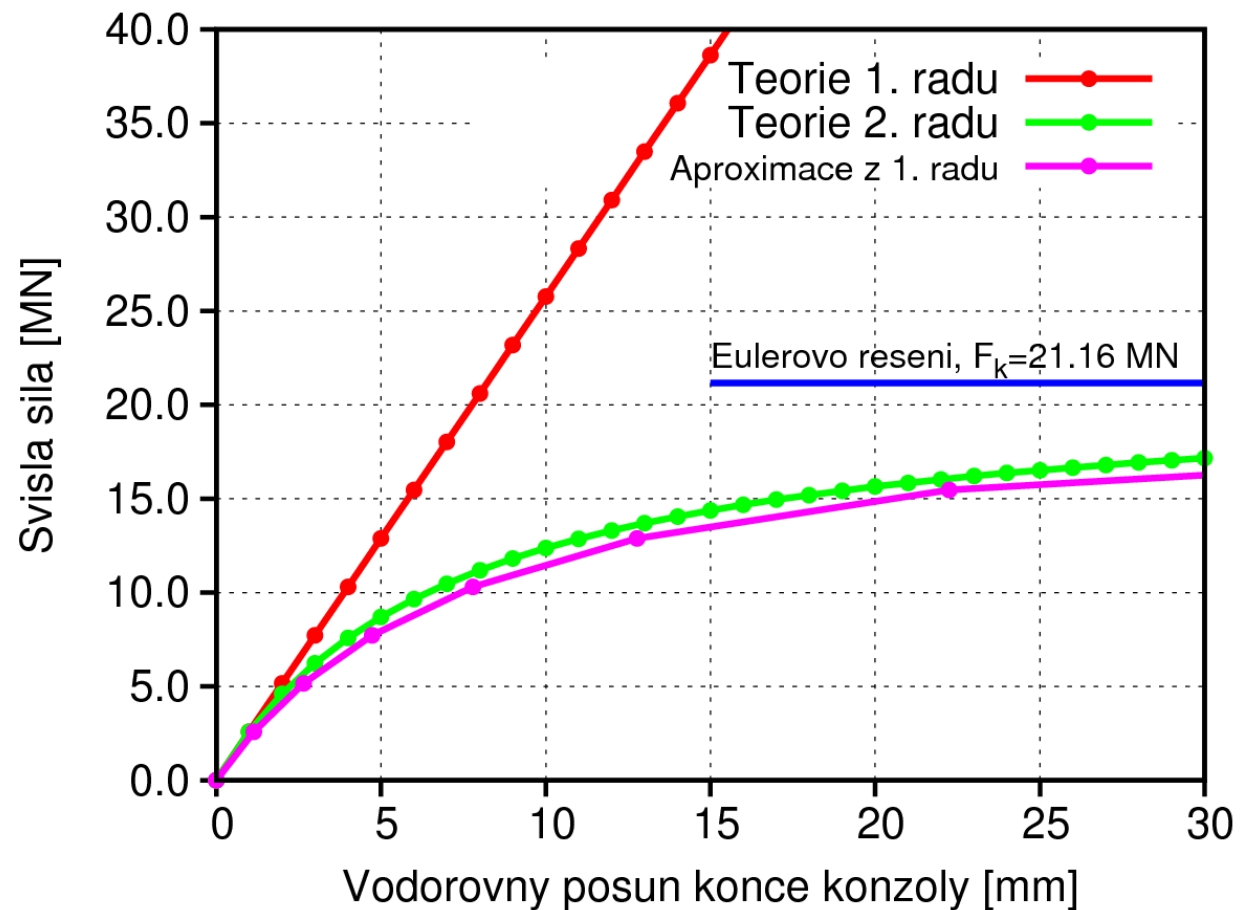
$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{w}{w_0} = \frac{-\pi^2}{L^2 (\alpha^2 - \pi^2/L^2)} = \frac{1}{1 - \frac{FL^2}{EI \pi^2}} = \frac{1}{1 - \frac{F}{F_k}}$

Aproximace teorie 2. řádu pomocí teorie 1. řádu

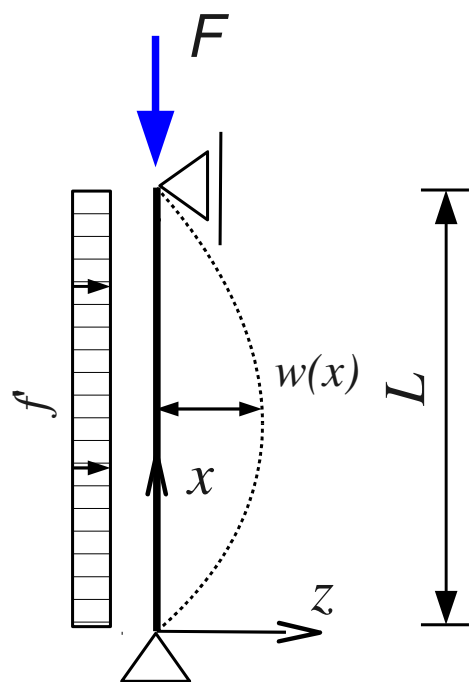
- Skutečné posuny (dle teorie 2. řádu) lze aproximovat, pokud známe kritické zatížení a posuny podle teorie 1. řádu

$$\frac{\delta}{\delta_0} = \frac{1}{1 - \frac{F}{F_k}}$$

Při polovině kritického zatížení jsou skutečná přemístění dvojnásobná oproti výsledkům z teorie 1. řádu!



Příklad - určete kritickou sílu geometrickou metodou



$$M_f = \frac{fL}{2}x - \frac{f}{2}x^2$$

$$w_f''' = -M_f/EI = \left(\frac{f}{2}x^2 - \frac{fL}{2}x \right) / EI$$

$$EIw'' + Fw = EI w_f''$$

$$w'' + \alpha^2 w = \frac{\alpha^2}{F} \left(\frac{f}{2}x^2 - \frac{fL}{2}x \right), \quad \alpha = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

Řešení programem Maxima (open-source - M\$, Linux)

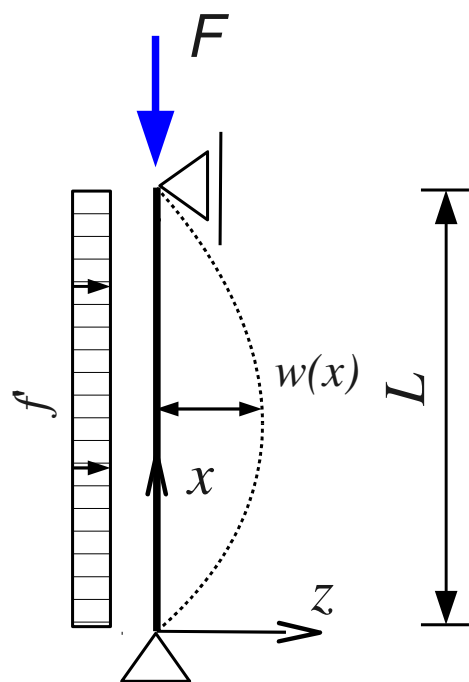
```
(%i1) assume(a > 0);
(%i2) sol1:ode2('diff(w,x,2) + a^2 * w = a^2/F * (f*x^2/2 - f*L*x/2), w, x);
```

```
(%o2) w = - \frac{a^2 f x L - a^2 f x^2 + 2 f^2}{2 a^2 F} + %k1 \sin(a x) + %k2 \cos(a x)
```

```
(%i3) fo1:bc2(sol1, x=0, w=0, x=L, w=0);
```

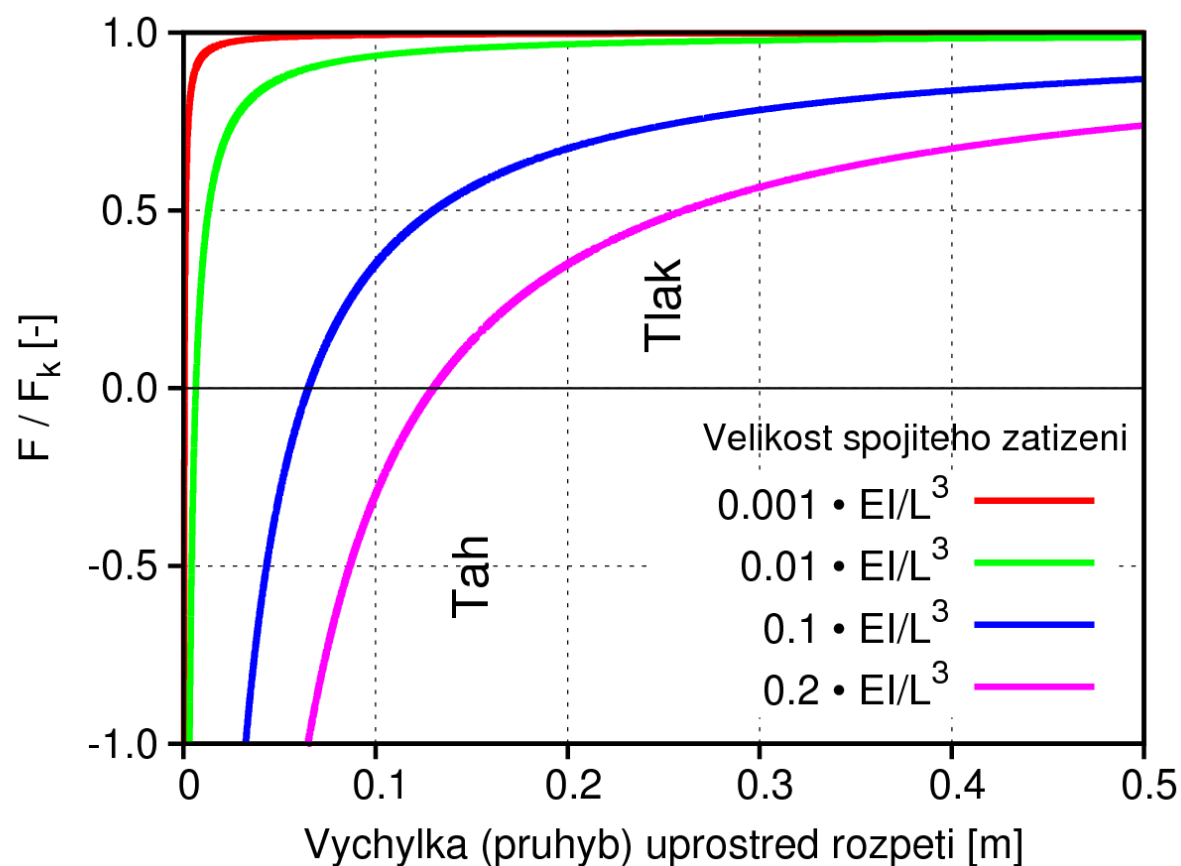
```
(%o3) w = - \frac{f \sin(a x) (\cos(a L) - 1)}{a^2 F \sin(a L)} - \frac{a^2 f x L - a^2 f x^2 + 2 f^2}{2 a^2 F} + \frac{f \cos(a x)}{a^2 F}
```

Příklad - určete kritickou sílu geometrickou metodou



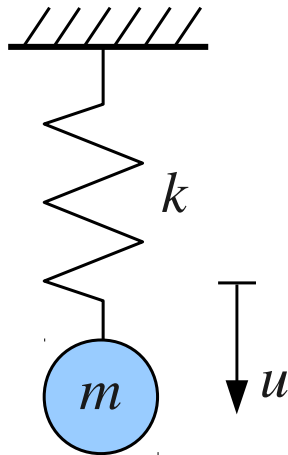
$$\psi = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{F}{EI}} = \frac{\alpha L}{2}$$

$$w(x=L/2) = \frac{5fL^4}{384EI} \left[\frac{12 \left(\frac{2}{\cos \psi} - 2 - \psi^2 \right)}{5\psi^4} \right]$$



Stabilita z energetického pohledu

- Na pružné konstrukci definujeme
 - Energii pružné deformace E_{int}
 - Potenciální energii zatížení E_{ext}
 - Potenciální energii soustavy $E_{pot} = E_{int} + E_{ext}$



$$E_{int} = \frac{1}{2} k u^2$$

$$E_{ext} = -m g u$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} k u^2 - m g u$$

$$\frac{dE_{pot}}{du} = k u - m g = 0 \quad \dots \text{ rovnováha}$$

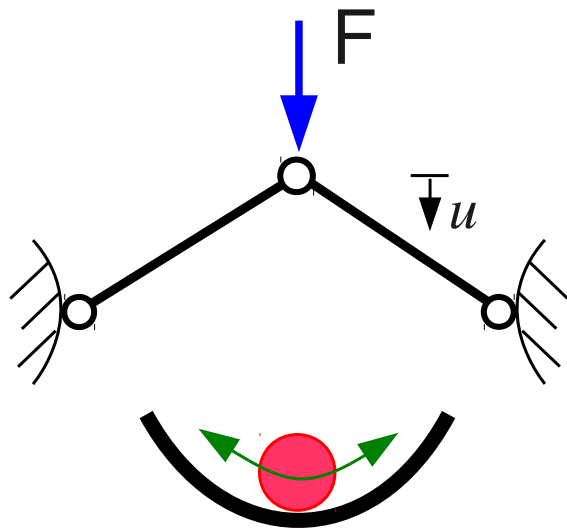
$$\frac{d^2 E_{pot}}{du^2} = k \quad \begin{array}{l} > 0 & \text{stabilní rovnováha} \\ = 0 & \text{indiferentní rovnováha} \\ < 0 & \text{nestabilní rovnováha} \end{array}$$

Pozn. E_{ext} zde vyjadřuje **potenciální energii vnějších sil** na systému. Posunem hmotnosti m o u dojde k poklesu potenciální energie hmotného bodu o $m g u$. U lineárně elastického materiálu odpovídá rovnováze stav $E_{ext} = -2E_{int}$ a $E_{pot} = -E_{int} = 0.5E_{ext}$.

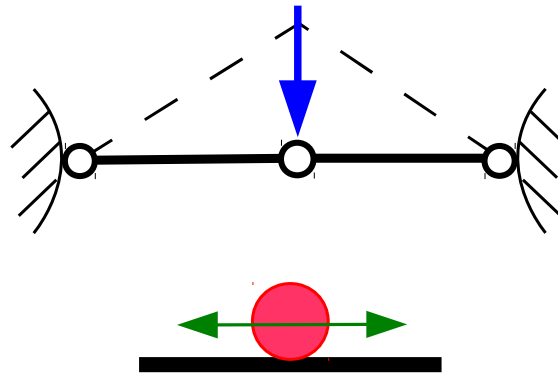
V mechanice \bar{E}_{ext} často označuje také **práci vnějších sil**, což je zcela jiný případ. V tomto případě se uvažuje zákon zachování energie a platí $E_{int} = \bar{E}_{ext}$, vnější síla tedy vykonala práci $F u^2/2$. Z toho plyne vztah $F = k u$.

Stabilita z energetického pohledu

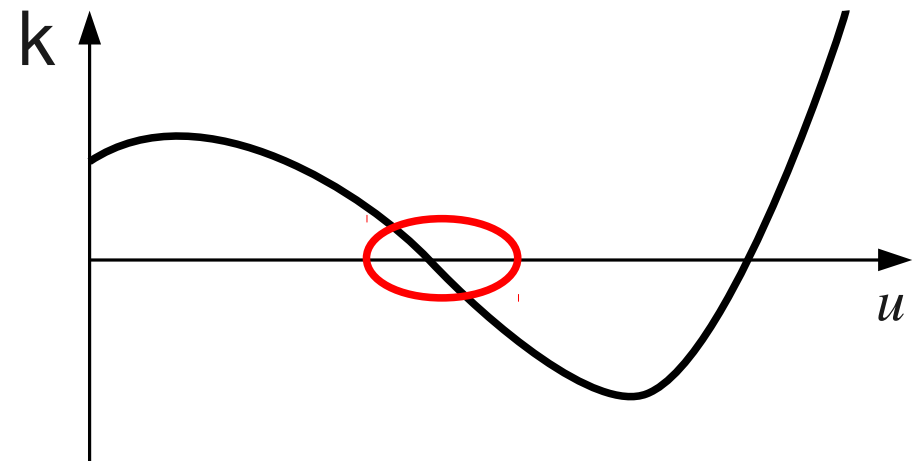
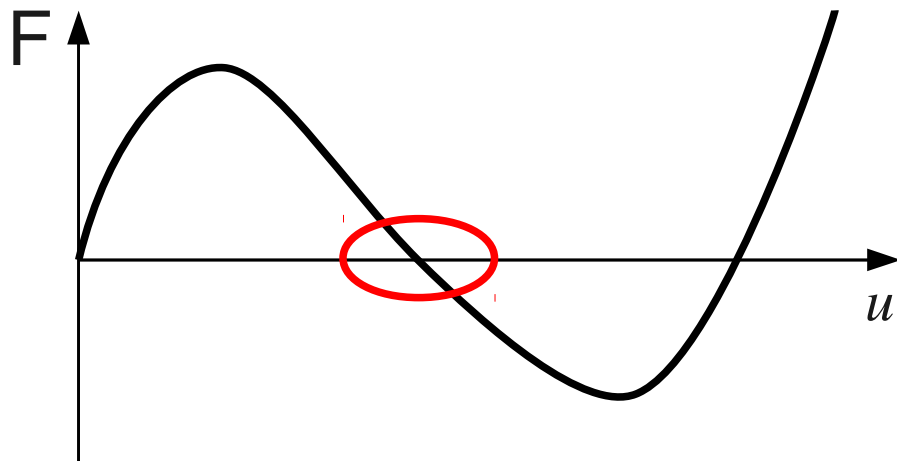
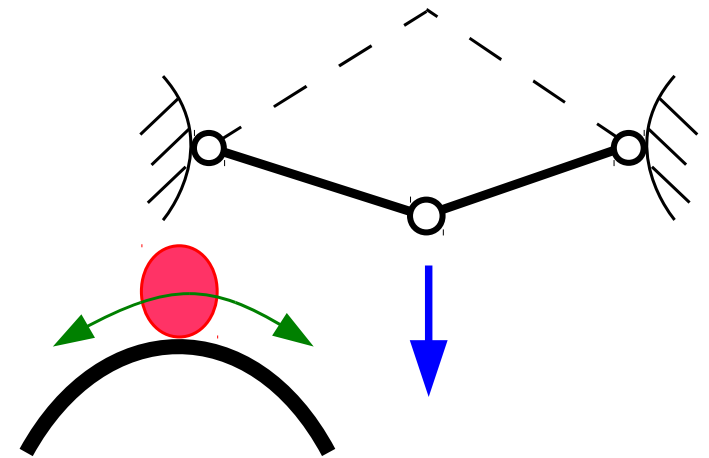
Stabilní rovnováha



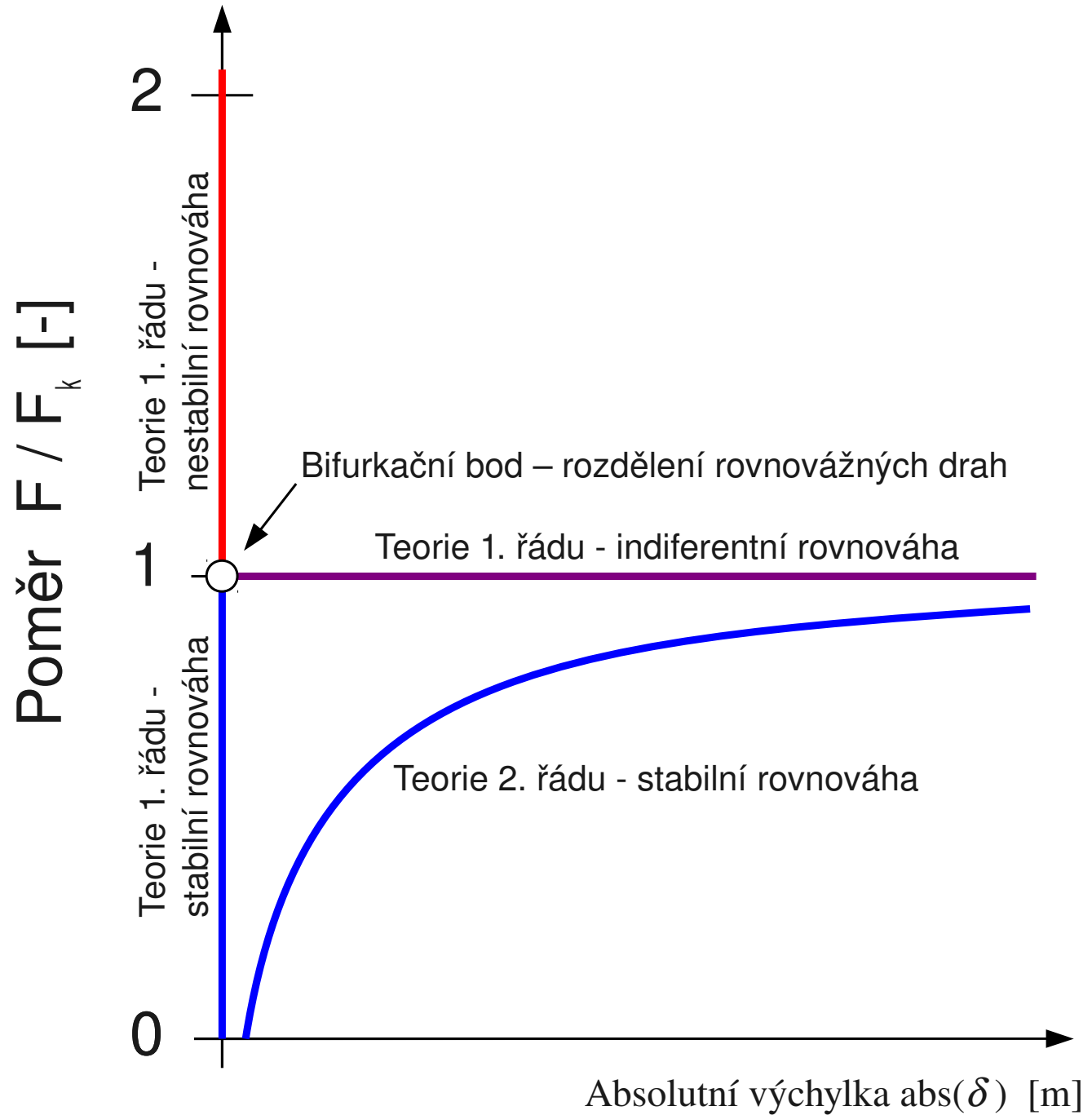
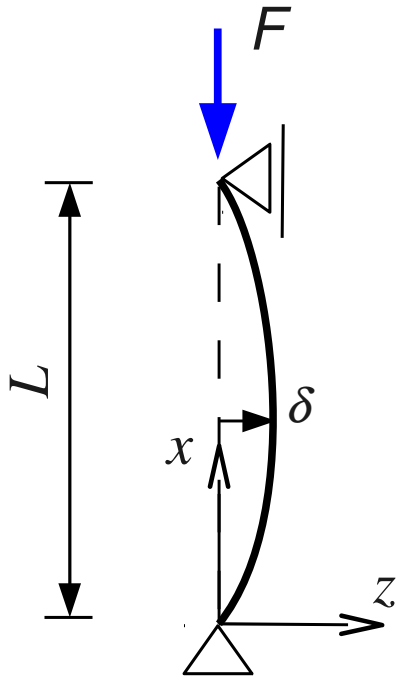
Stav blízky indiferentní rovnováze



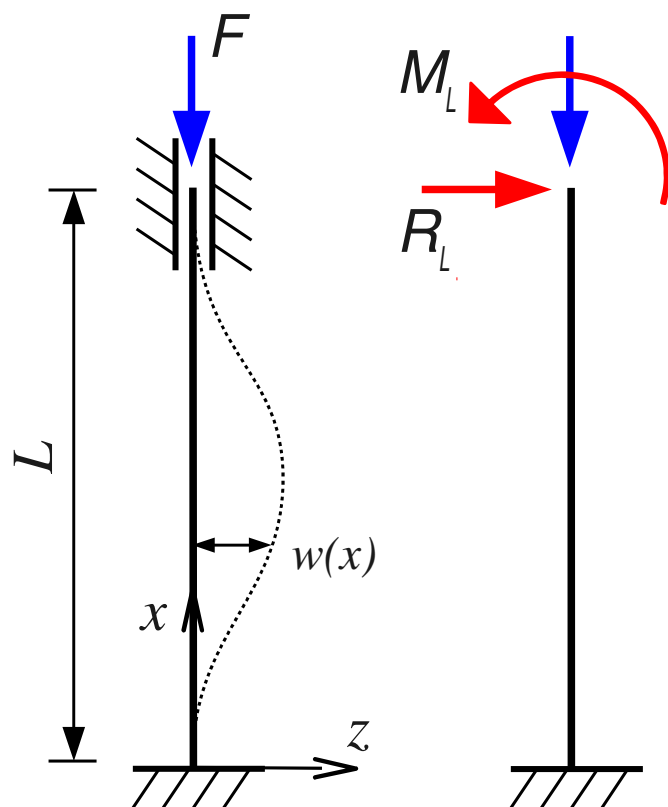
Nestabilní rovnováha



Stabilita z energetického pohledu



Vybočení přímého prutu oboustranně vetknutého



$$M_y(x) = Fw(x) + M_L - R_L x$$

$$M_y(x) = -EIw''(x)$$

$$EIw''(x) + Fw(x) = R_L x - M_L$$

$$w''(x) + \alpha^2 w(x) = \frac{\alpha^2}{F} (R_L x - M_L), \quad \alpha = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

$$w(x) = \frac{R_L x - M_L}{F} + C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x$$

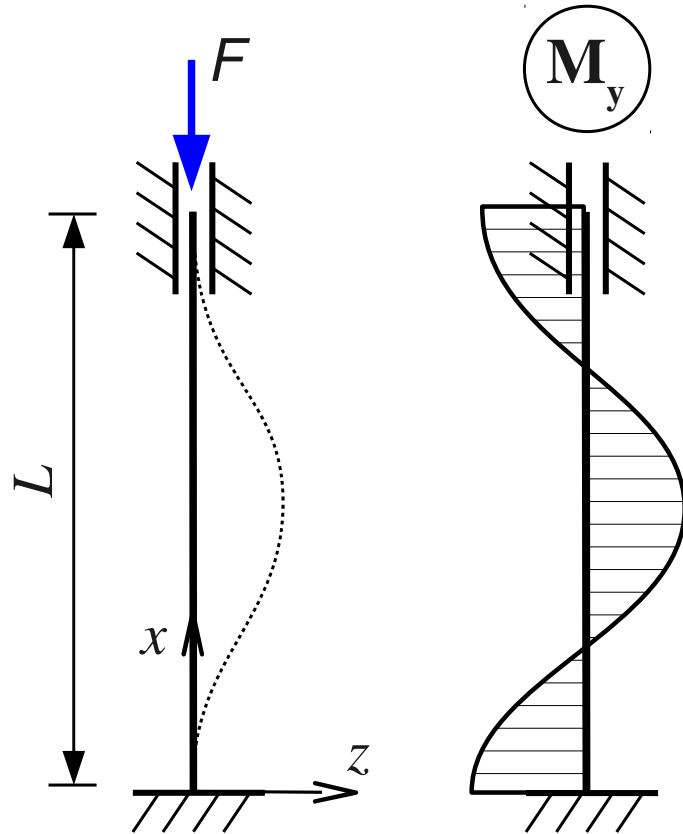
$$w(0) = 0 \rightarrow C_2 = \frac{M_L}{F}$$

$$w'(0) = 0 \rightarrow C_1 = \frac{-R_L}{\alpha F}$$

$$w(L) = w'(L) = 0$$

Řešení dále vede na soustavu 2 algebraických rovnic s neznámými R_L a M_L .

Vybočení přímého prutu oboustranně vetknutého

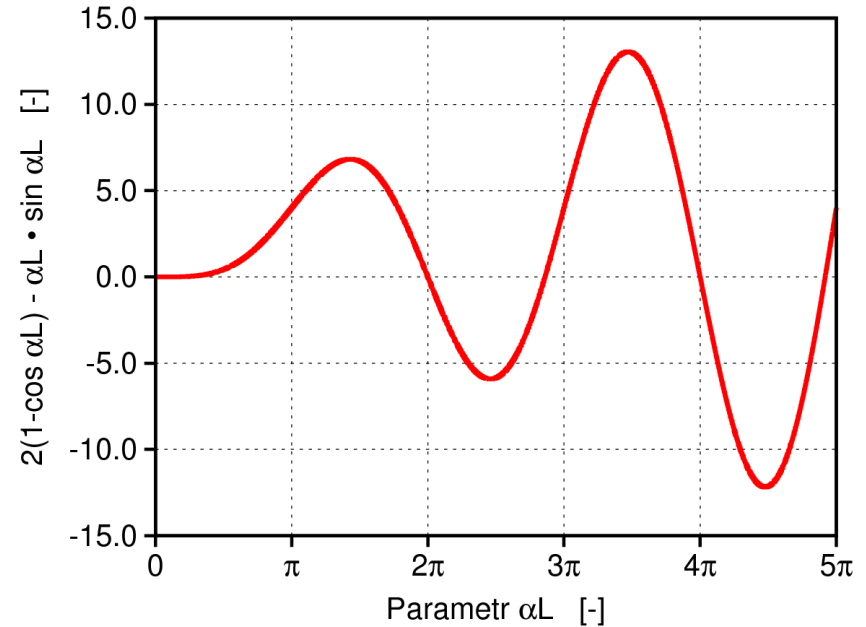


$$\begin{bmatrix} L - \frac{\sin \alpha L}{\alpha} & \cos \alpha L - 1 \\ 1 - \cos \alpha L & -\alpha \sin \alpha L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Det} \begin{bmatrix} L - \frac{\sin \alpha L}{\alpha} & \cos \alpha L - 1 \\ 1 - \cos \alpha L & -\alpha \sin \alpha L \end{bmatrix} = 0$$

Pozn. Úlohu lze řešit využitím symetrie. V diferenciální rovnici se pak vyskytují 3 neznámé – C_1 , C_2 a moment uprostřed rozpětí. I násobky momentu M_y vyhovují problému vlastních tvarů.

$$2(1 - \cos \alpha L) - \alpha L \sin \alpha L = 0$$



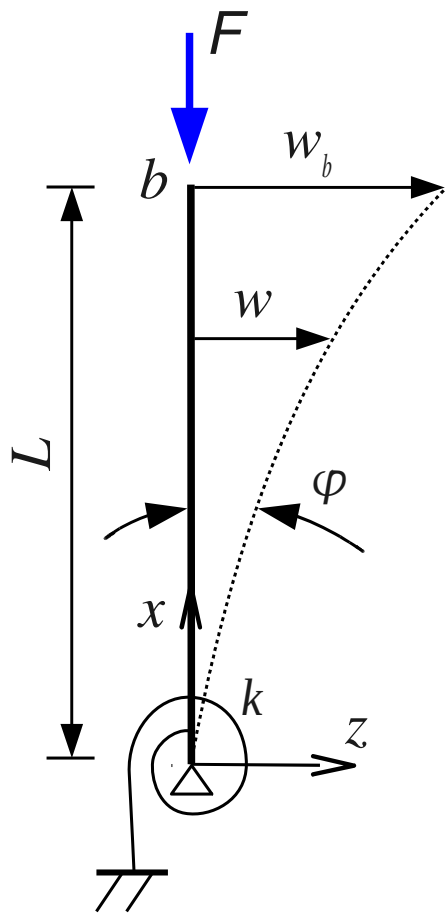
$$\alpha L = 2\pi = \sqrt{\frac{F}{EI}} L$$

$$F_k = \frac{4EI\pi^2}{L^2} = \frac{EI\pi^2}{(0.5L)^2}$$

$$w(x) = 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

$$M_y = -EIw'' = -EI \frac{4\pi^2}{L^2} \cos \frac{2\pi}{L}x$$

Vybočení přímého prutu s pružným vetknutím



$$M(x) = -F(w_b - w)$$

$$EIw'' + Fw = Fw_b$$

$$w'' + \alpha^2 w = \alpha^2 w_b, \quad \alpha = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

$$w(x) = w_b + C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x$$

$$w(0) = 0 \rightarrow C_2 = -w_b$$

$$M(0) = -k\varphi = -EIw''(0) = EIC_2\alpha^2 = -k\varphi'(0) = -kC_1\alpha$$

$$C_1 = -EIC_2 \frac{\alpha}{k} = w_b \frac{EI\alpha}{k}$$

$$w(L) = w_b = C_1 \sin \alpha L + C_2 \cos \alpha L + w_b = w_b$$

$$w_b \left(\frac{EI\alpha}{k} \sin \alpha L - \cos \alpha L \right) = 0, \quad \text{netriviální řešení}$$

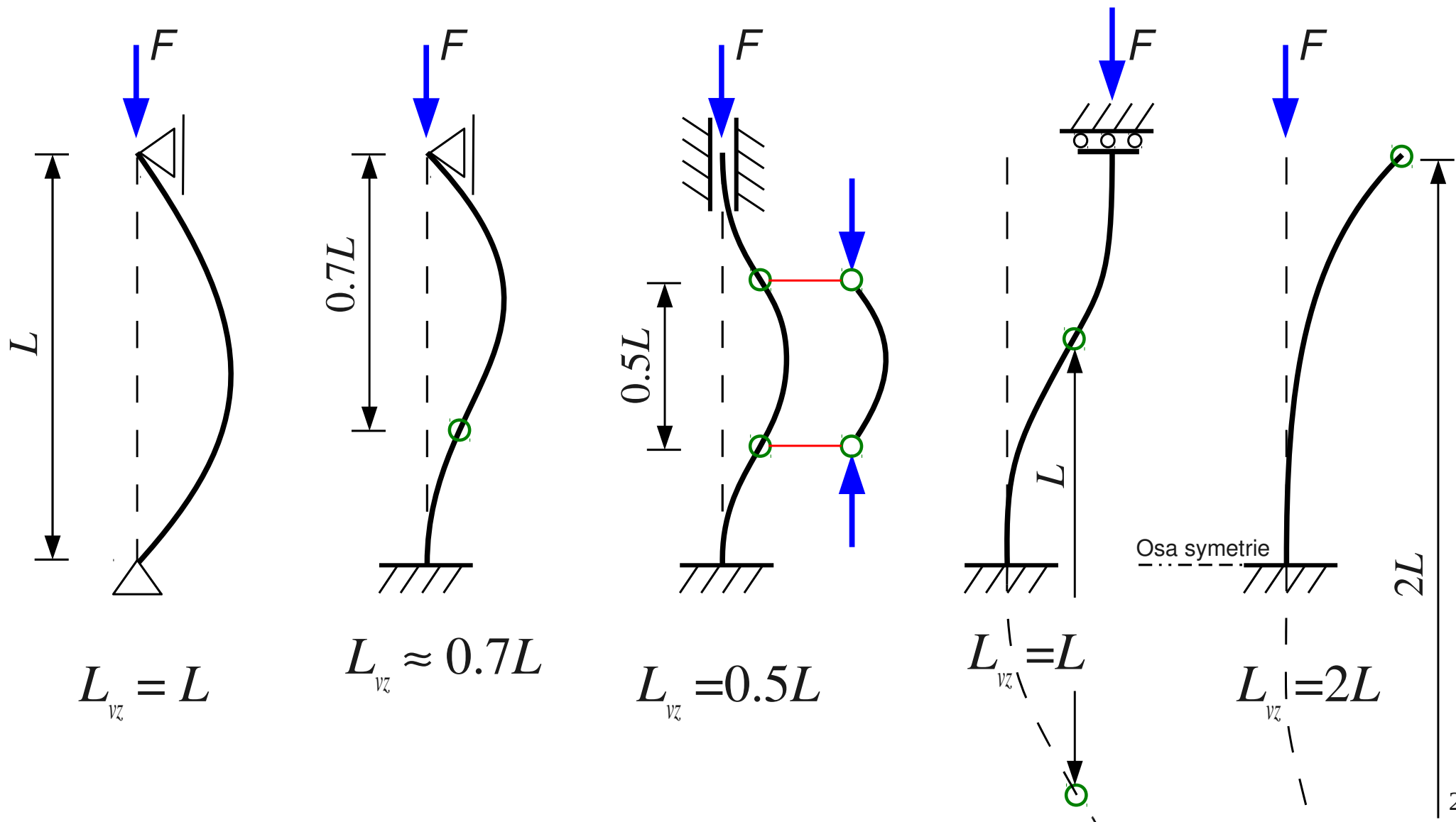
$$\beta = \alpha L, \quad \beta \tan \beta = \frac{kL}{EI}$$

$$F_k = \alpha^2 EI = \beta^2 \frac{EI}{L^2} = EI \frac{\pi^2}{L_{vz}^2}, \quad L_{vz} = \frac{\pi}{\beta} L$$

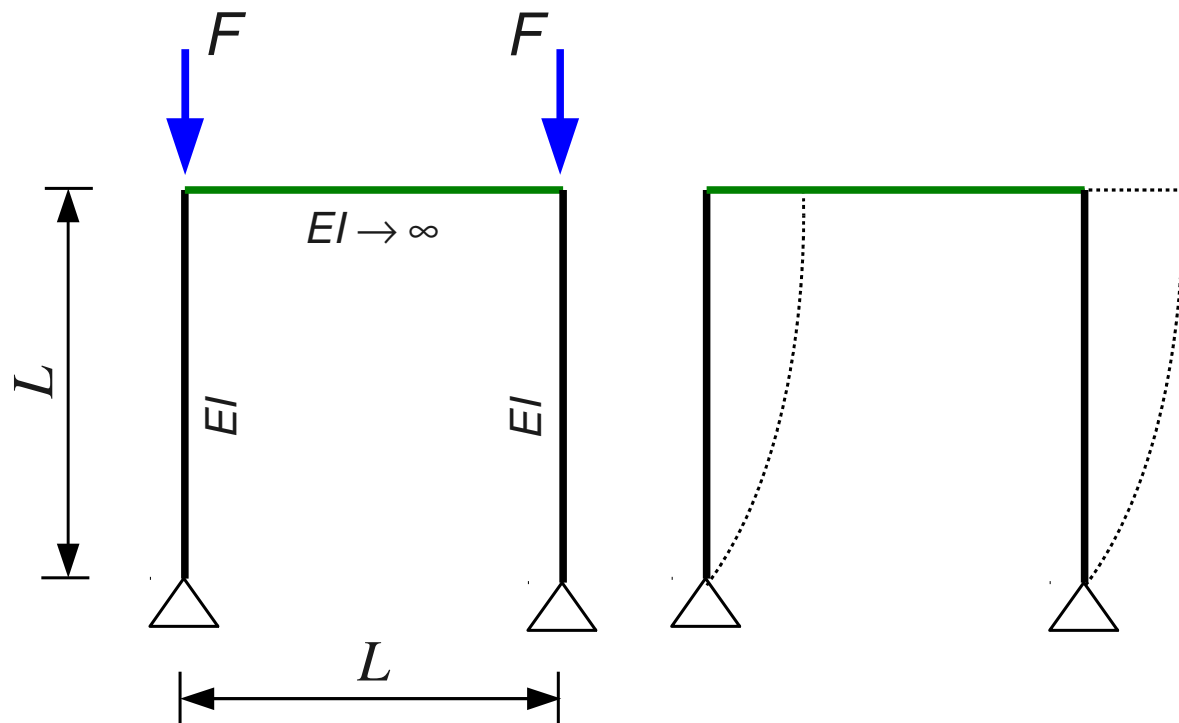
Nejhorší
případy vzpěru!

Základní Eulerovy případy vzpěru

- Vzpěrná délka – vzdálenost inflexních bodů vlastního tvaru vybočení (míst s nulovými momenty)

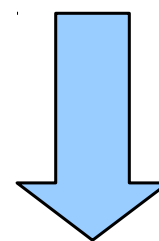


Příklad – porovnejte kritickou sílu u rámců

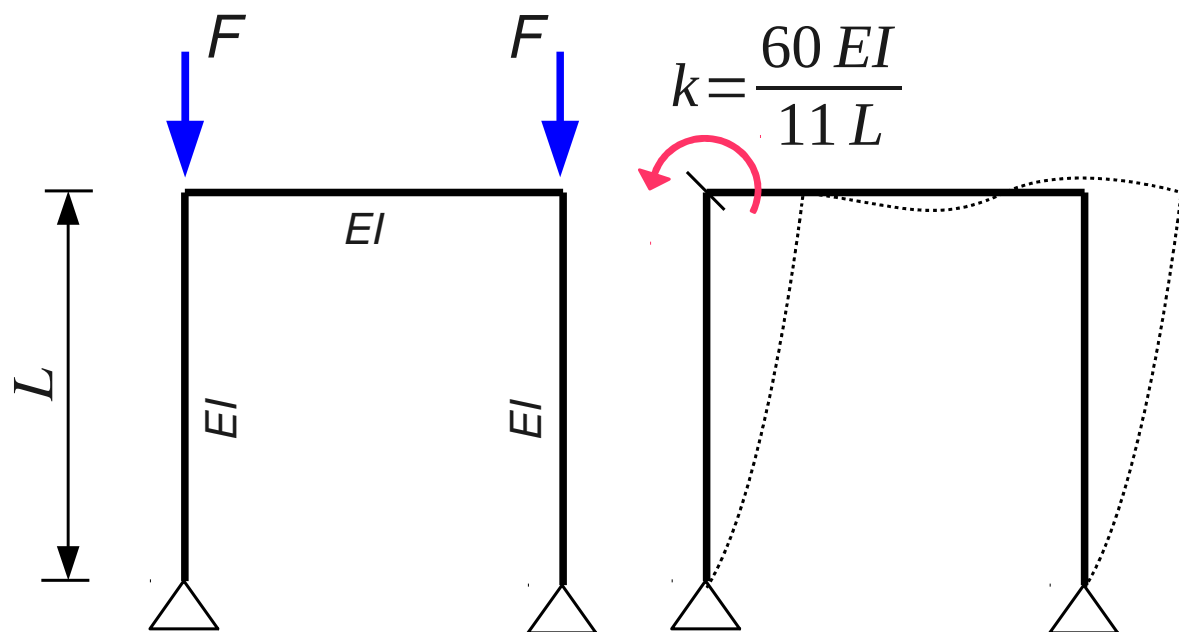


$$L_{vz} = 2L$$

$$F_k = \frac{EI \pi^2}{(2L)^2} = \frac{2.467 EI}{L^2}$$



Kritická síla o 28% nižší



$$\beta \tan \beta = \frac{60 EI}{11 L} \frac{L}{EI} = \frac{60}{11}$$

$$\beta = 1.331$$

$$L_{vz} = \frac{\pi}{1.331} L = 2.36 L$$

$$F_k = \beta^2 \frac{EI}{L^2} = \frac{1.771 EI}{L^2}$$

Kritické napětí

Vzpěrná délka

$$L_{vz}$$

Kritická síla

$$F_k = \frac{EI \pi^2}{L_{vz}^2}$$

Poloměr setrvačnosti

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

Štíhlostní poměr

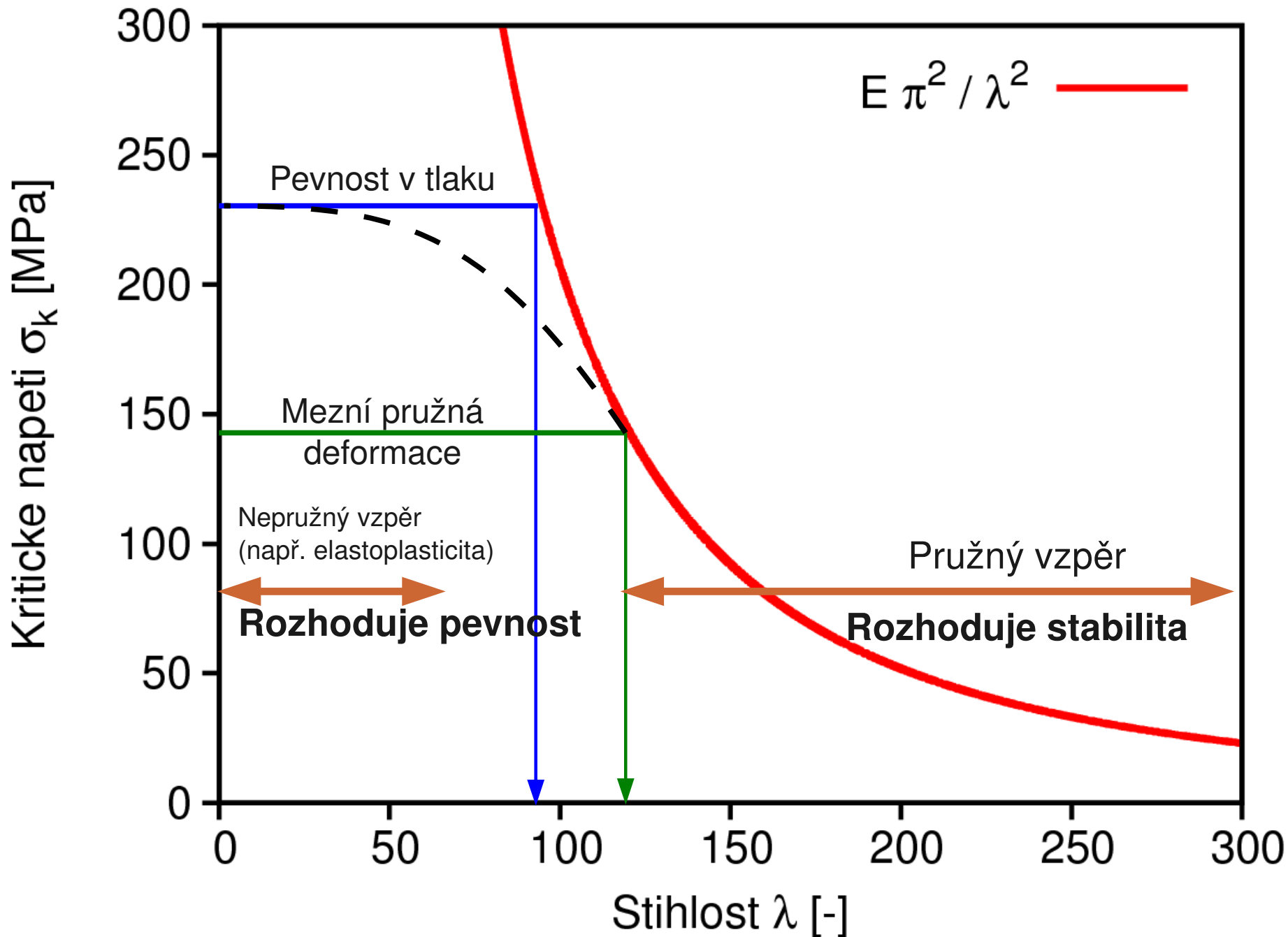
$$\lambda = \frac{L_{vz}}{i}$$

Kritické napětí

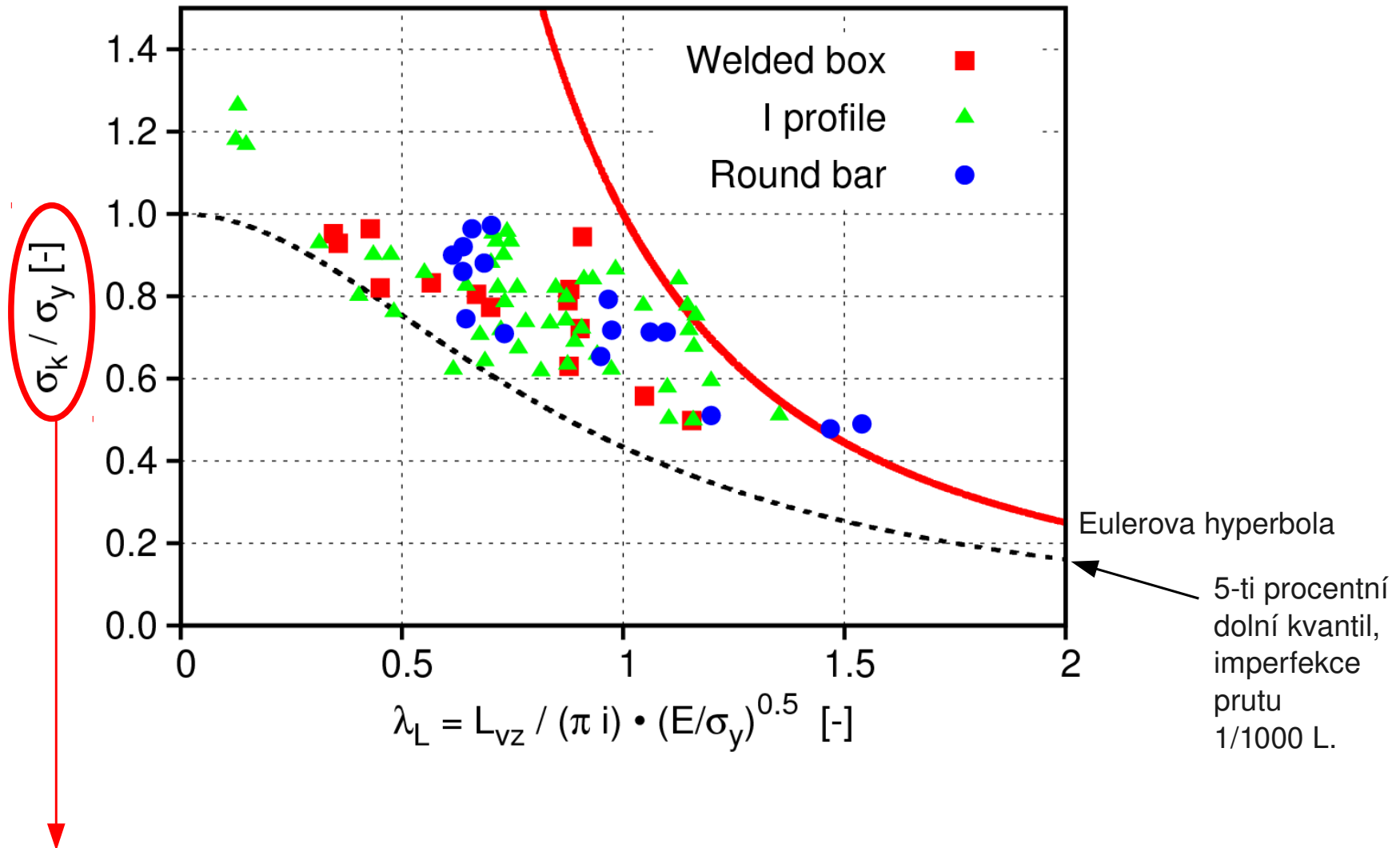
$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} = \frac{EI \pi^2}{A L_{vz}^2} = \frac{Ei^2 \pi^2}{L_{vz}^2} = E \frac{\pi^2}{\lambda^2}$$

Pro prostorový vzpěr se jednotlivé parametry indexují, např. $L_{vz,y}$, i_y , i_z , λ_y , λ_z .

Eulerova hyperbola



Zkoušky ocelových profilů



Pozn. Poměr σ_k / σ_y se v Eurokódech označuje jako součinitel vzpěrnosti χ . Tím se redukuje únosnost materiálu a problém vzpěru se převádí na problém tlaku. Pro masivní pruty platí $\chi=1$ a pro štíhlé pruty $\chi < 1$.

Obečná diferenciální rovnice pro ohýbaný prut

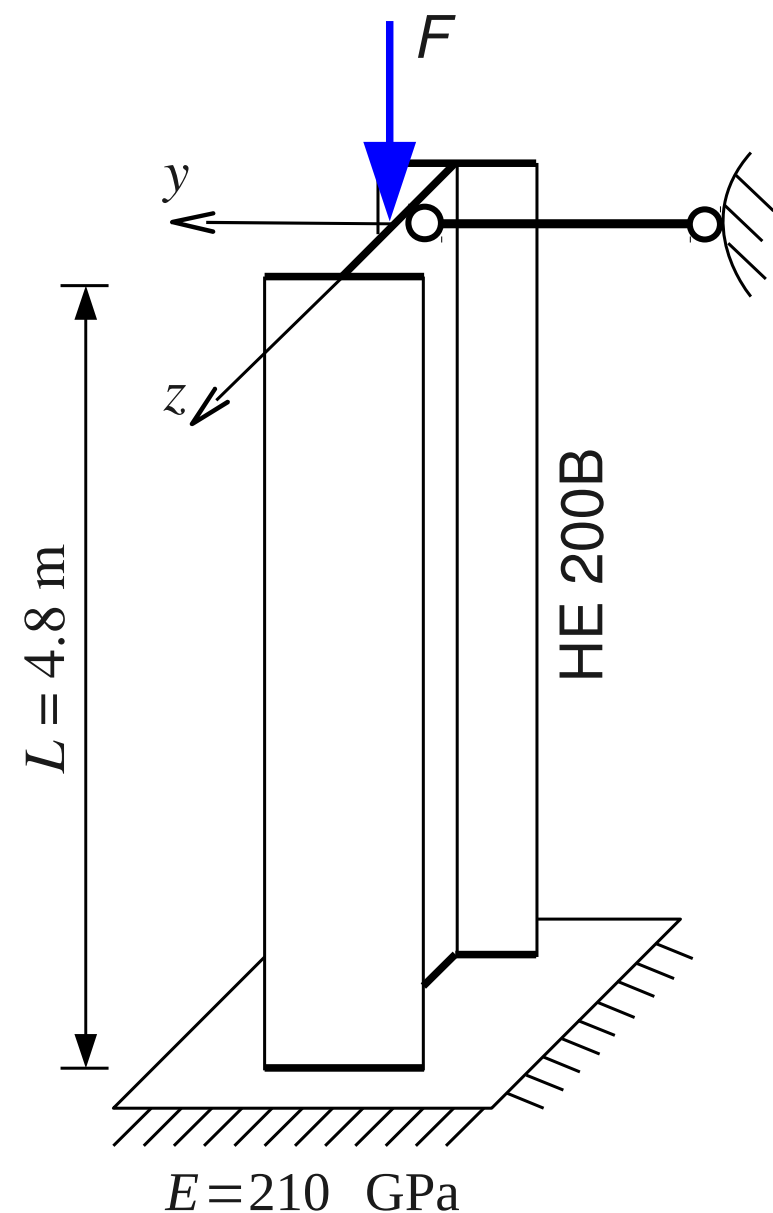
$$EIw^{IV} + Fw'' = EI w_0^{IV} + f_x$$

Geometrická nelinearita
(moment od osově síly)

Zatížení v ose prutu
(vlastní tíha atp.)

Počáteční imperfekce,
moment od příčného zatížení
nebo koncových momentů

Určete kritické zatížení prostorového sloupu



$$A = 7.81 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2, \quad I_y = 57 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4, \quad I_z = 20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$i_y = 85.4 \text{ mm}, \quad i_z = 50.4 \text{ mm}$$

Vybočení v rovině xz , ohyb okolo osy y

$$L_{vz,y} = 2 \cdot 4.8 = 9.6 \text{ m}$$

$$\lambda_y = \frac{L_{vz,y}}{i_y} = 112.4$$

$$F_k = \frac{EI_y \pi^2}{L_{vz,y}^2} = 1.282 \text{ MN}, \quad \sigma_k = \frac{F_k}{A} = 164.1 \text{ MPa}$$

Vybočení v rovině xy , ohyb okolo osy z

$$L_{vz,z} = 0.7 \cdot 4.8 = 3.36 \text{ m}$$

$$\lambda_z = \frac{L_{k,z}}{i_z} = 66.3$$

$$F_k = \frac{EI_y \pi^2}{L_{vz,z}^2} = 3.672 \text{ MN}, \quad \sigma_k = \frac{F_k}{A} = 470.2 \text{ MPa}$$

Prut vybočí v rovině xz .

Otázky

1. Co je ideální prut z pohledu vzpěru a proč tento model používáme? Čím se liší od skutečných prutů?
2. Jaký je rozdíl mezi teorií 1. a 2. řádu? Lze přibližně určit deformace z teorie 1. řádu na skutečné konstrukci?
3. Vysvětlete, proč problém vzpěru nesouvisí s pevností materiálu. Závisí potenciální energie systému na pevnosti materiálu?
4. Určete vzpěrnou délku u základních Eulerových případů vzpěru.
5. Kolikrát klesne kritická síla, pokud prodloužíme prvek o 20%, 100%?
6. Co je indiferentní rovnováha a bifurkace?
7. Uveďte příklady konstrukcí se zatížením, které vykazují nestabilní rovnováhu.
8. Na Eulerově hyperbole vyznačte oblasti, kde rozhoduje vzpěr a kde rozhoduje pevnost. Jaký je vliv reziduálních napětí v ocelových průřezích?
9. Vypočtete štíhlost kruhové tyče o poloměru r a délce l , pokud je oboustanně vetknutá.