

Přednáška 06

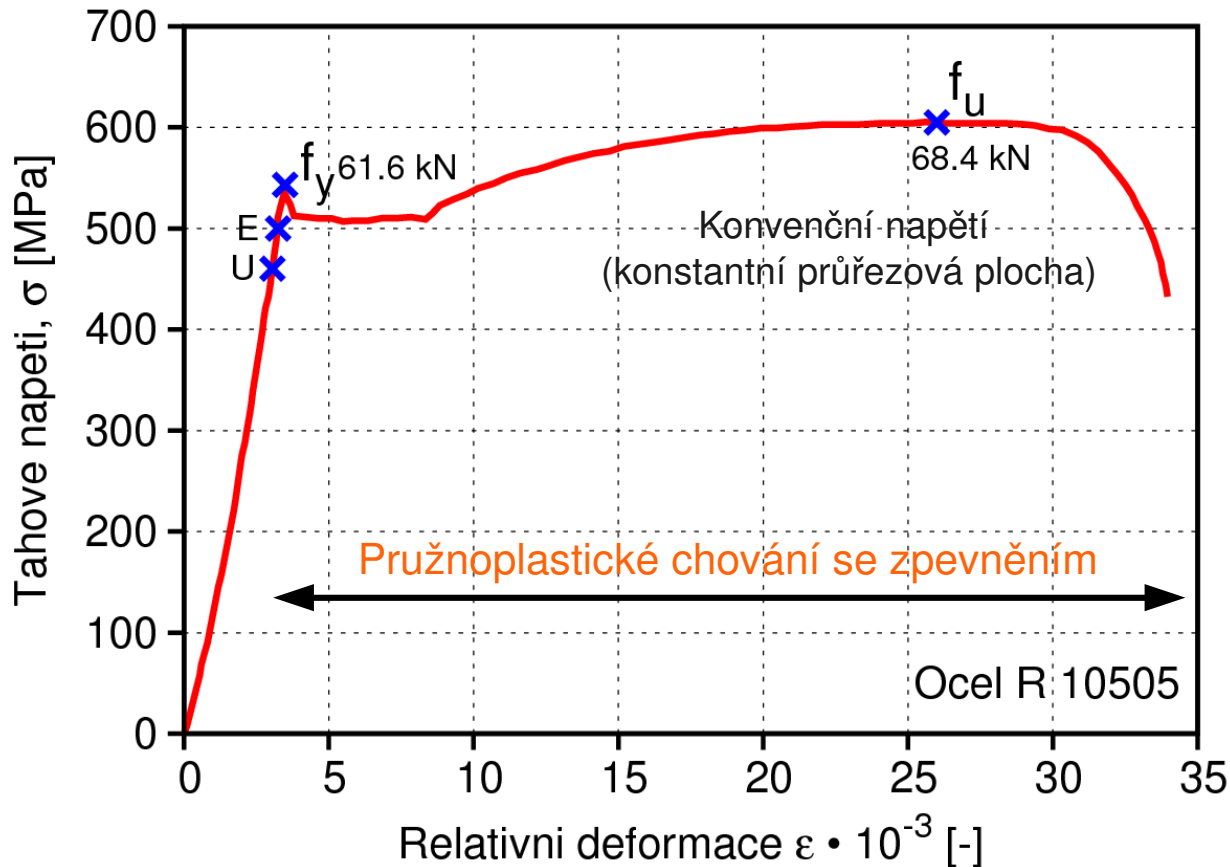
Nepružné chování materiálu
Ideálně pružnoplastický model
Plastická analýza průřezu ohýbaného prutu
Mezní plastický stav konstrukce
Plastický kloub
Interakční diagram N , M
Příklady

Copyright (c) 2011 Vít Šmilauer
Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Mechanics, Czech Republic

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License" found at <http://www.gnu.org/licenses/>

Jednoosá tahová zkouška betonářské oceli

- Měkká betonářská ocel R10 505, $\varnothing 12$ mm



U ... mez úměrnosti
 $\sigma = E\varepsilon$

E ... mez pružnosti

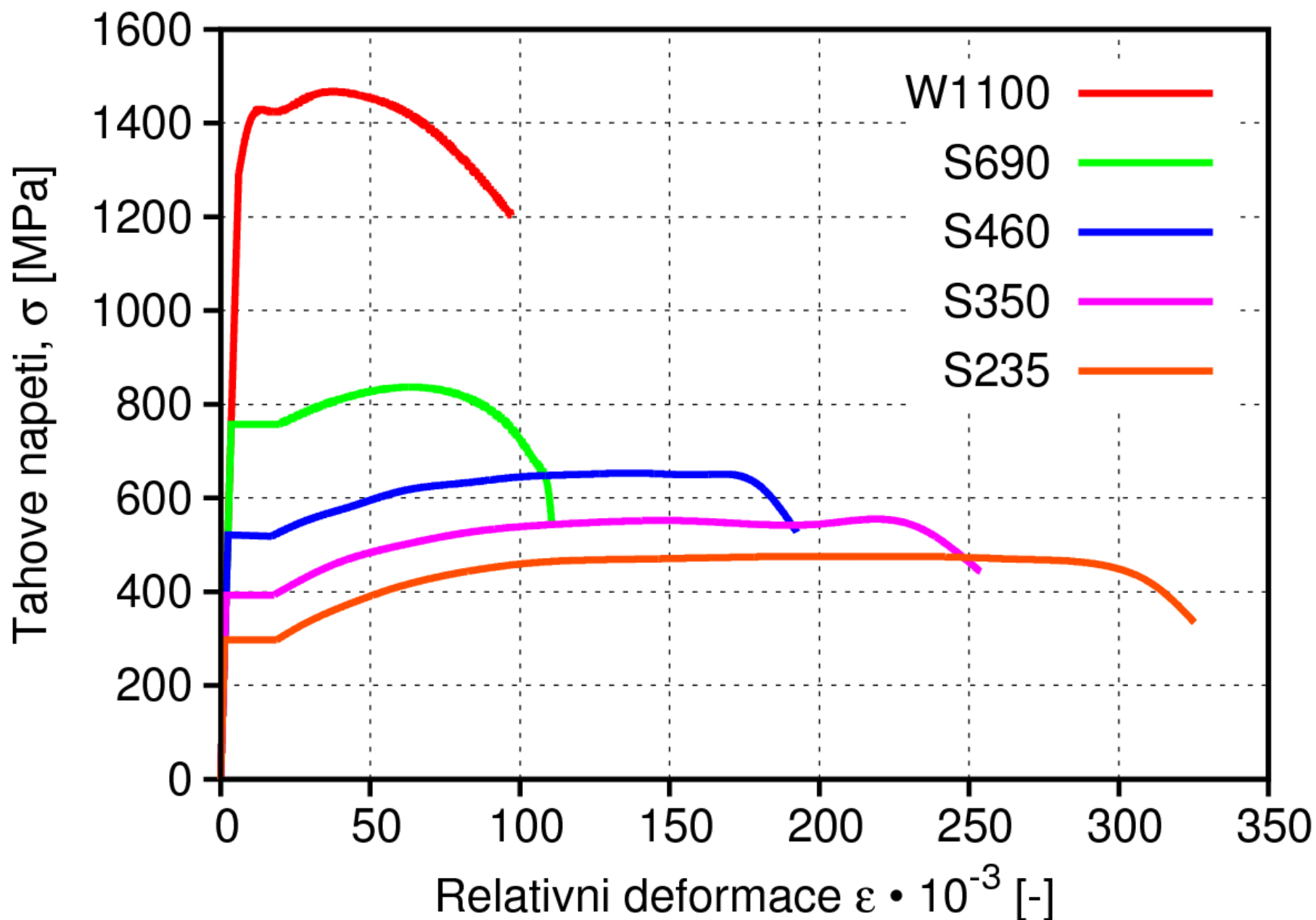
f_y ... mez kluzu
Ocel se stává plastickou.

f_u ... mez pevnosti
Maximální přenos napětí.

Dle klasifikace oceli R jsou požadavky $f_{yk} = 490$ MPa a $f_{uk} = 550$ MPa.

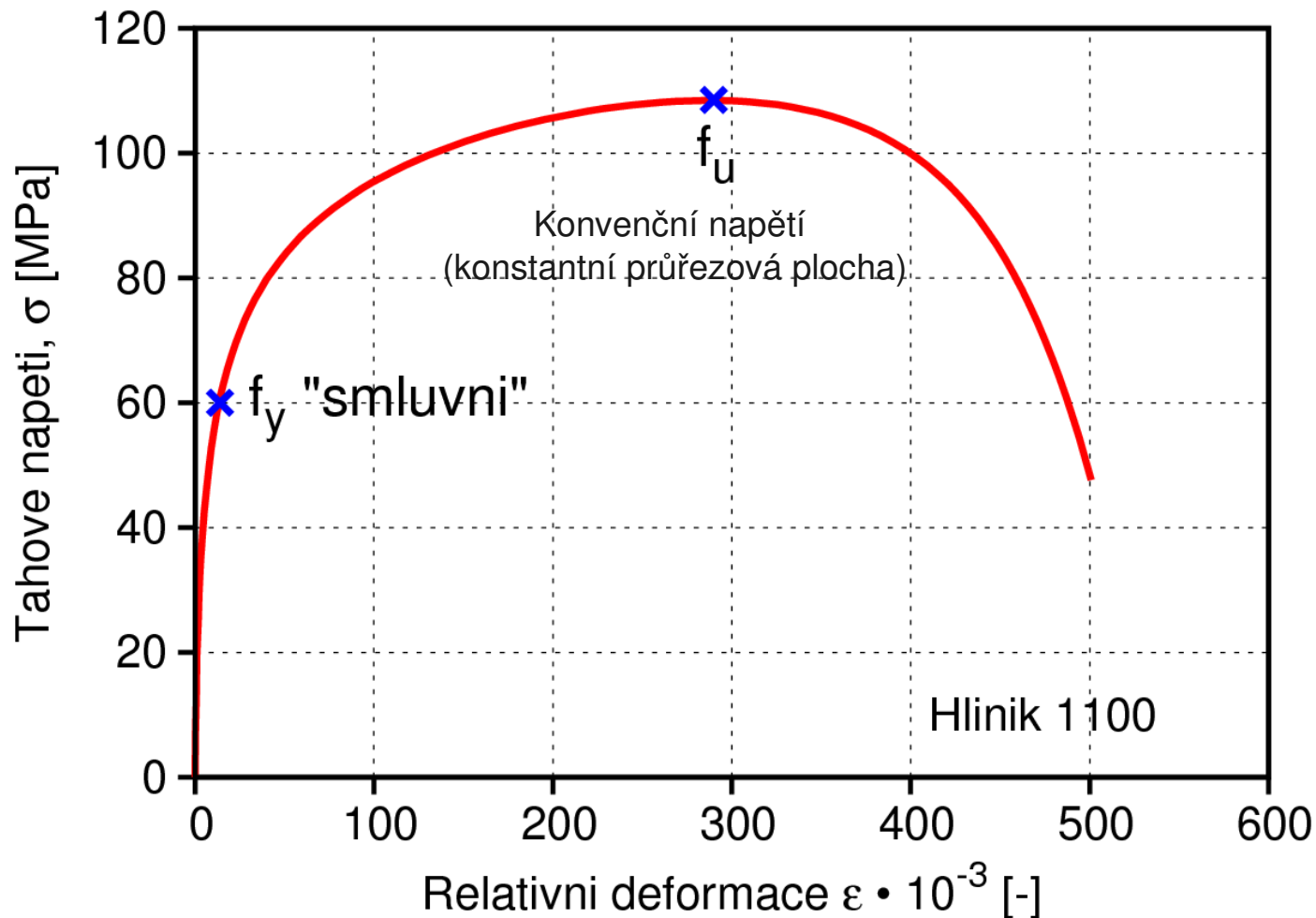


Jednoosé tahové zkoušky konstrukčních ocelí



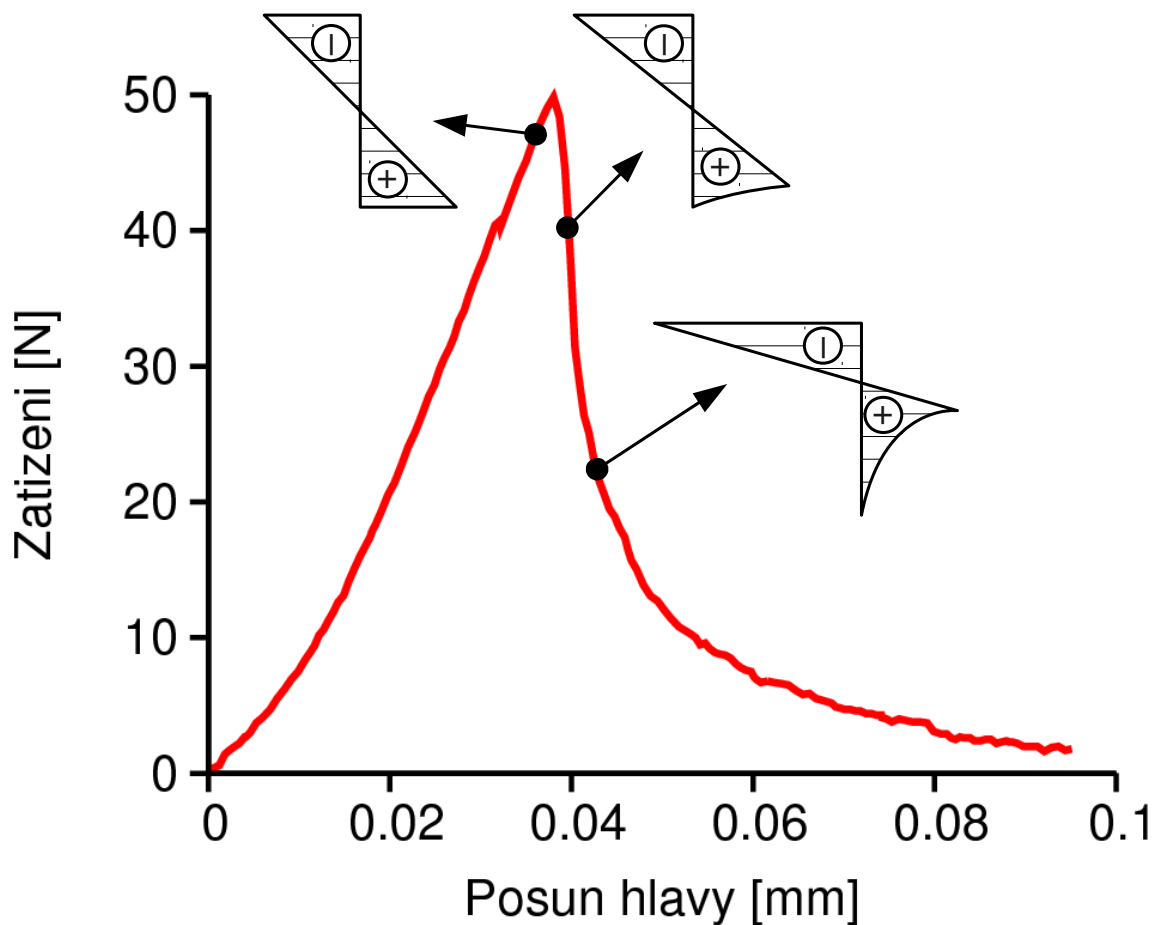
Jednoosá tahová zkouška hliníku

- U materiálů s nevýraznou mezí kluzu se určí „smluvní“ mez kluzu
 - pro vysokopevnostní oceli odpovídá deformaci $2 \cdot 10^{-3}$



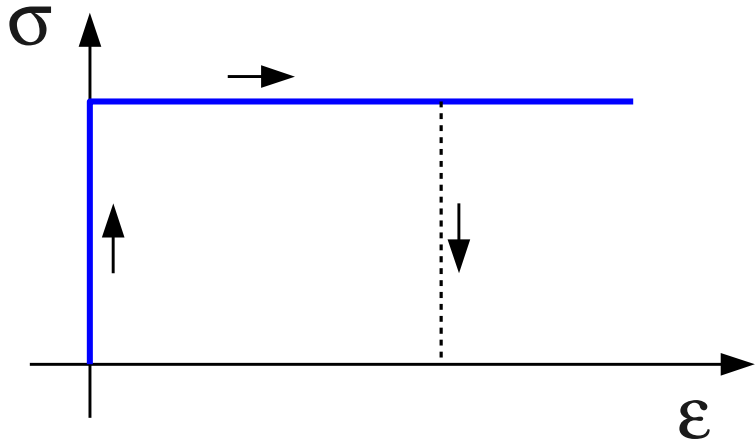
Trojbodový ohyb – cementová pasta

- Těleso 12x12x80 mm, zářez 40% výšky
- Zatížení řízeno posunem, pevnost v tlaku 10-15x vyšší než pevnost v tahu

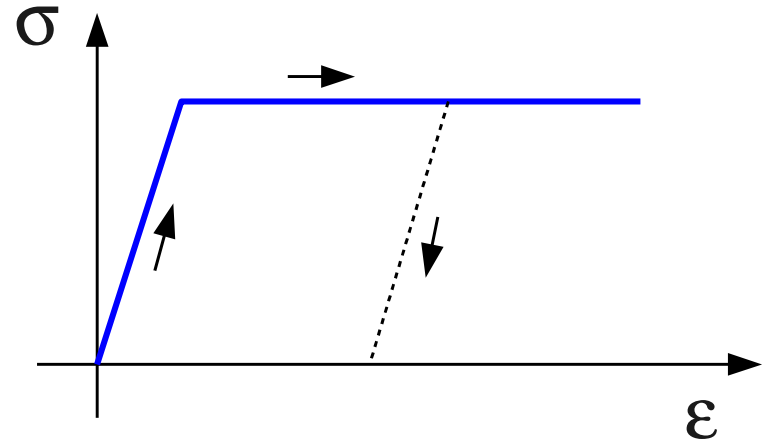


Modely nepružného chování materiálu

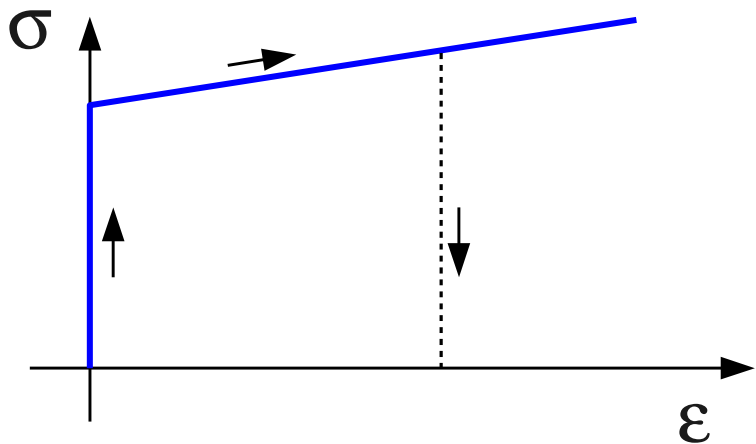
Ideálně tuhoplastický model



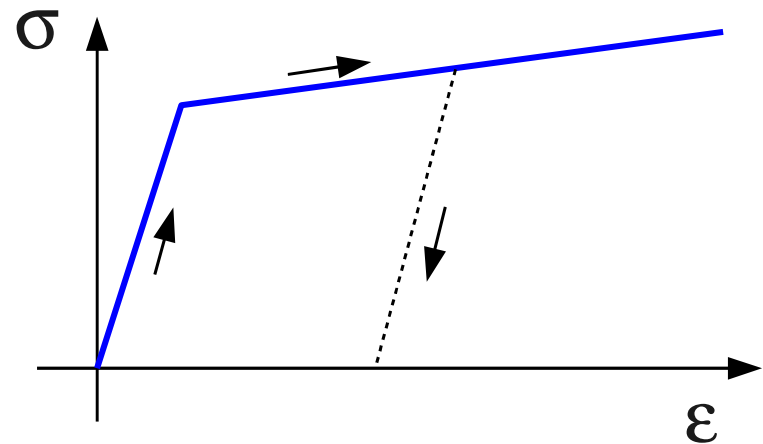
Ideálně pružnoplastický model



Tuhoplastický model s lineárním zpevněním

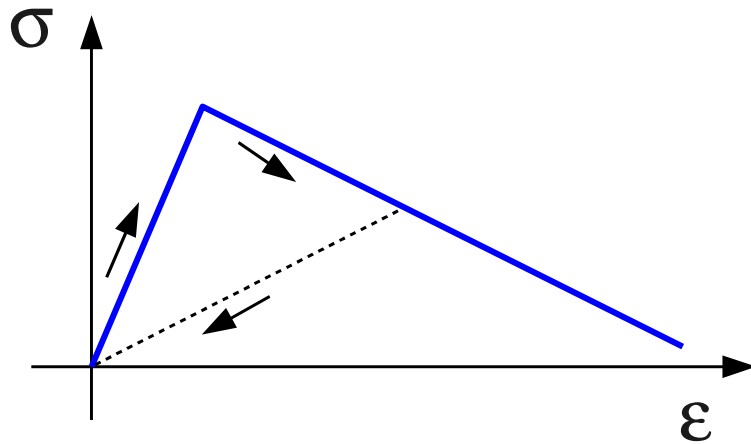


Pružnoplastický model s lineárním zpevněním

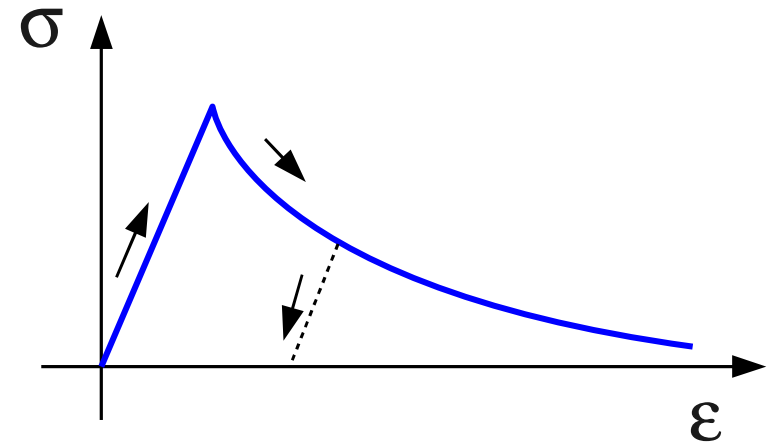


Modely nepružného chování materiálu

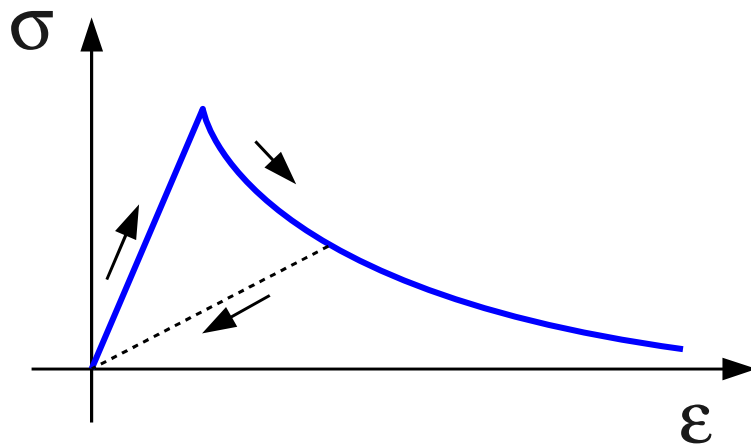
**Model poškození
s lineárním změkčením**



**Pružnoplastický model
se změkčením**

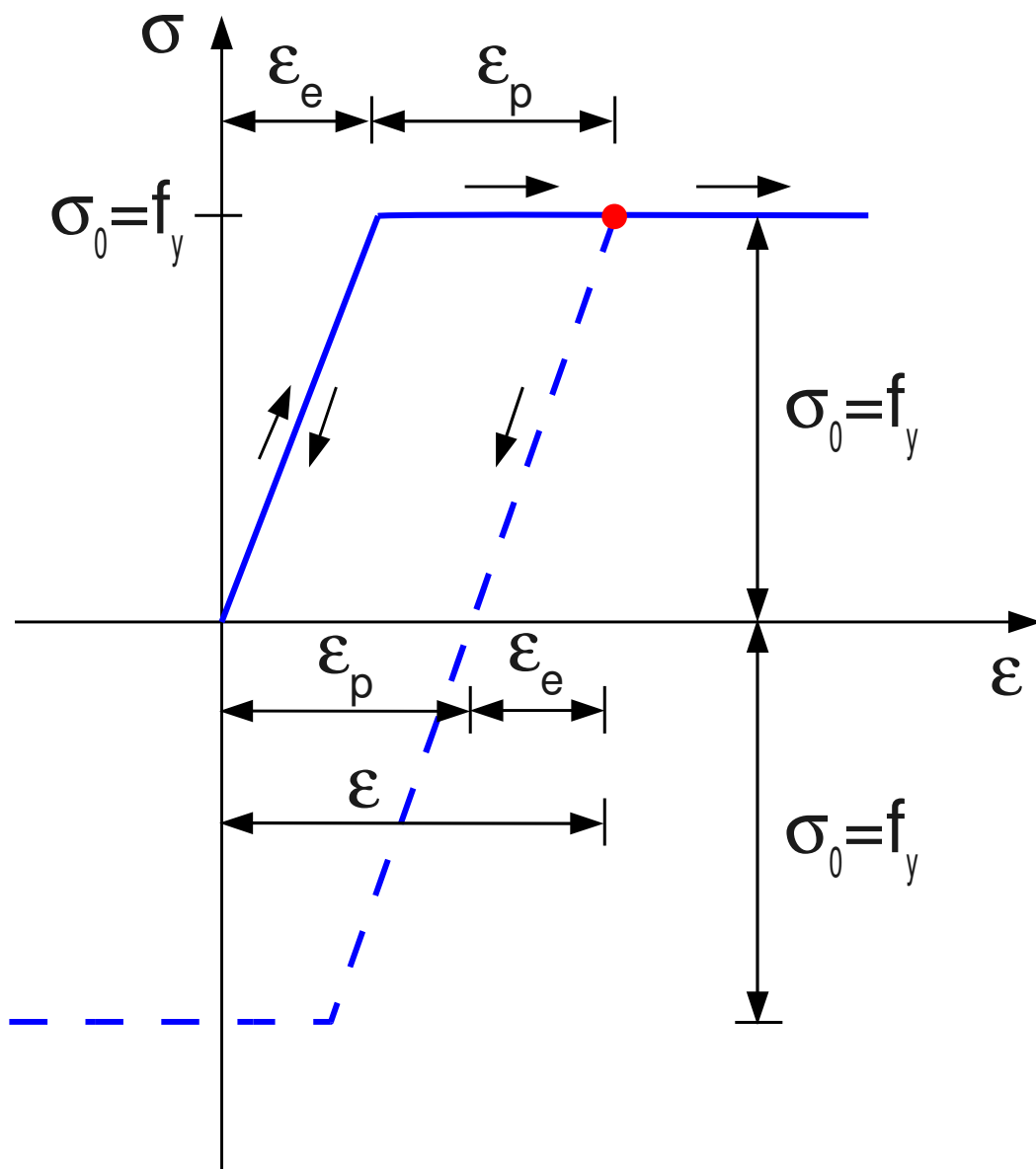


**Model poškození
s exponenciálním změkčením**



Ideálně pružnoplastický model

- Prandtlův diagram



Rozklad deformace $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$

Upravený Hookeův zákon

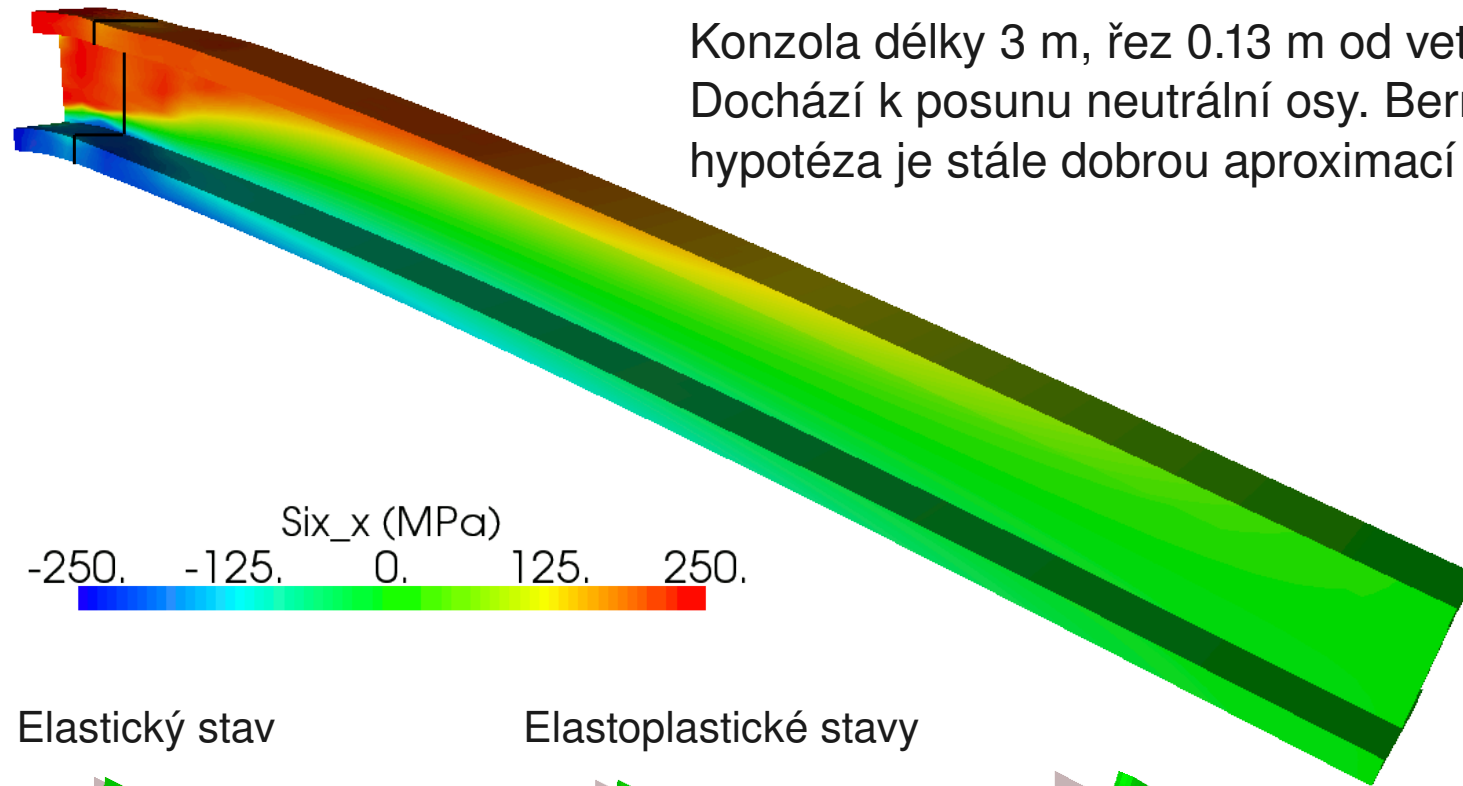
$$\sigma = E \varepsilon_e = E (\varepsilon - \varepsilon_p)$$

Vývoj plastické deformace

- $-\sigma_0 < \sigma < \sigma_0$ ε_p se nemění
- $\sigma = \sigma_0$ ε_p roste
- $\sigma = -\sigma_0$ ε_p klesá
- $\sigma < -\sigma_0 \vee \sigma > \sigma_0$ nelze

Simulace ohybu s pružnoplastickým materiálem

Konzola délky 3 m, řez 0.13 m od vetknutí.
Dochází k posunu neutrální osy. Bernoulli-Navierova hypotéza je stále dobrou aproximací pro posuny.

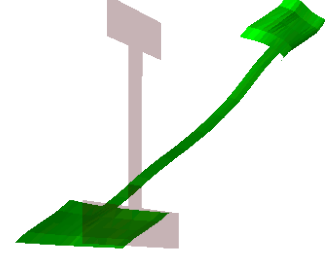
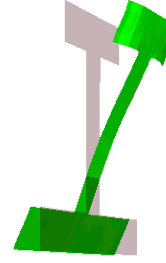
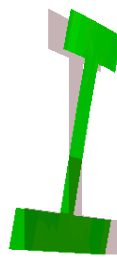


Průřez je blízký
meznímu
plastickému stavu

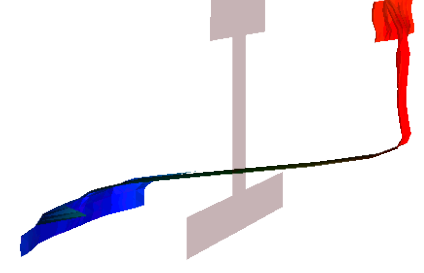
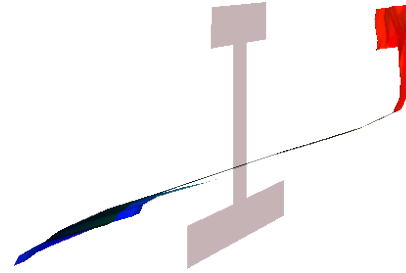
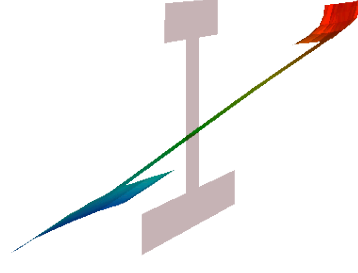
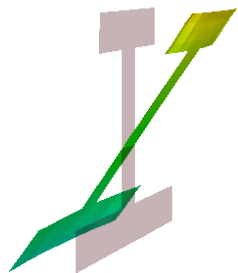
Elastický stav

Elastoplastické stavy

ε

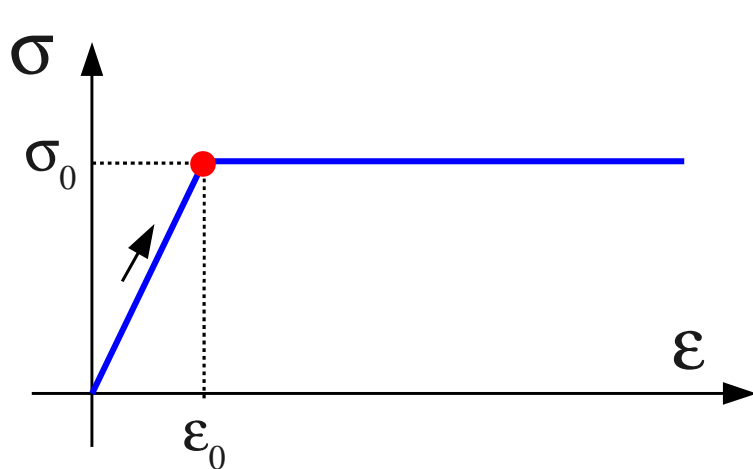
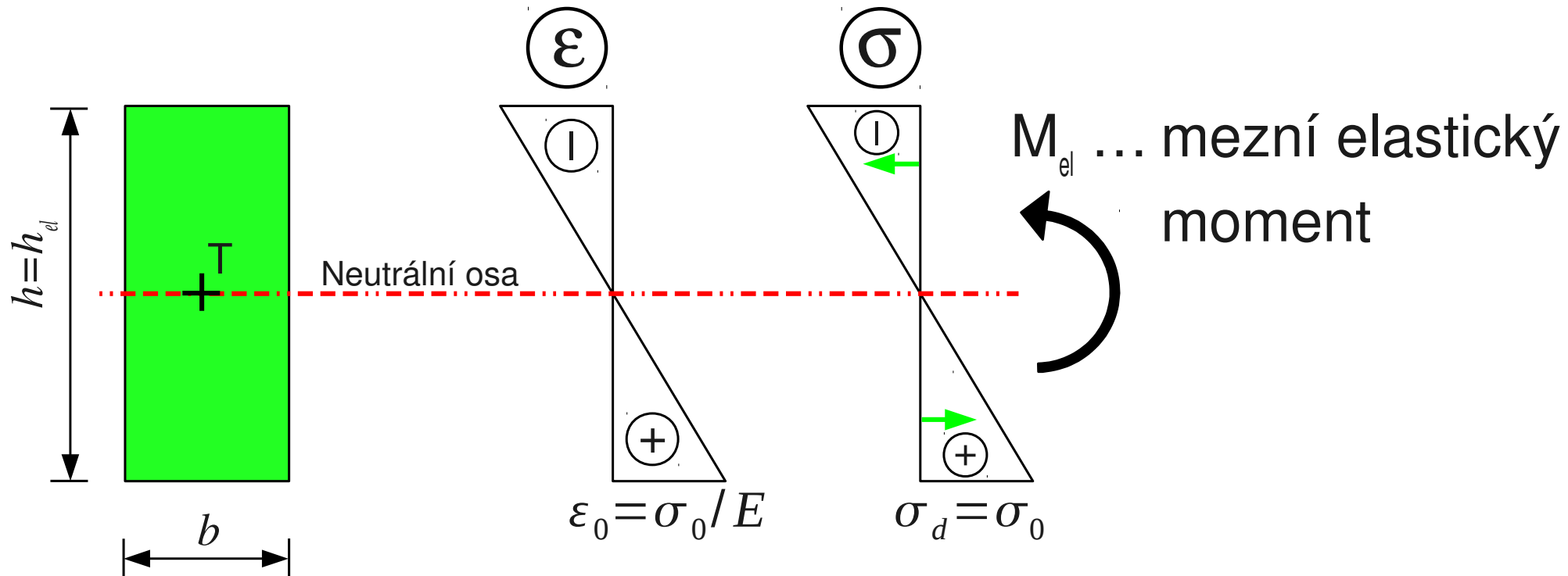


σ



Pružnoplastický ohyb – analýza průřezu

- Mezní elastický stav obdélníkového průřezu

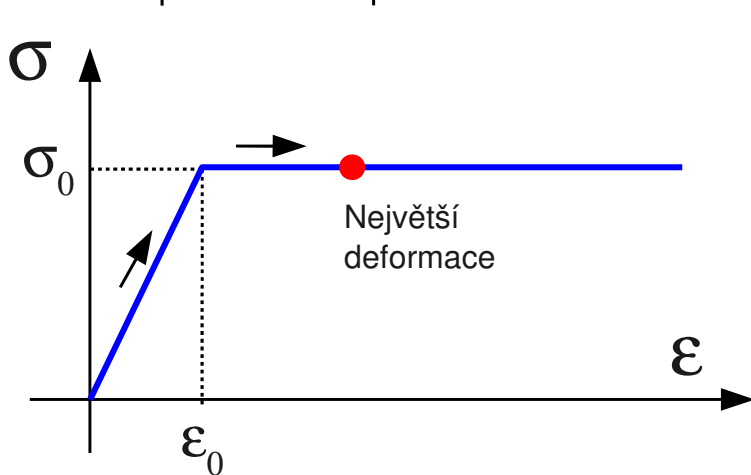
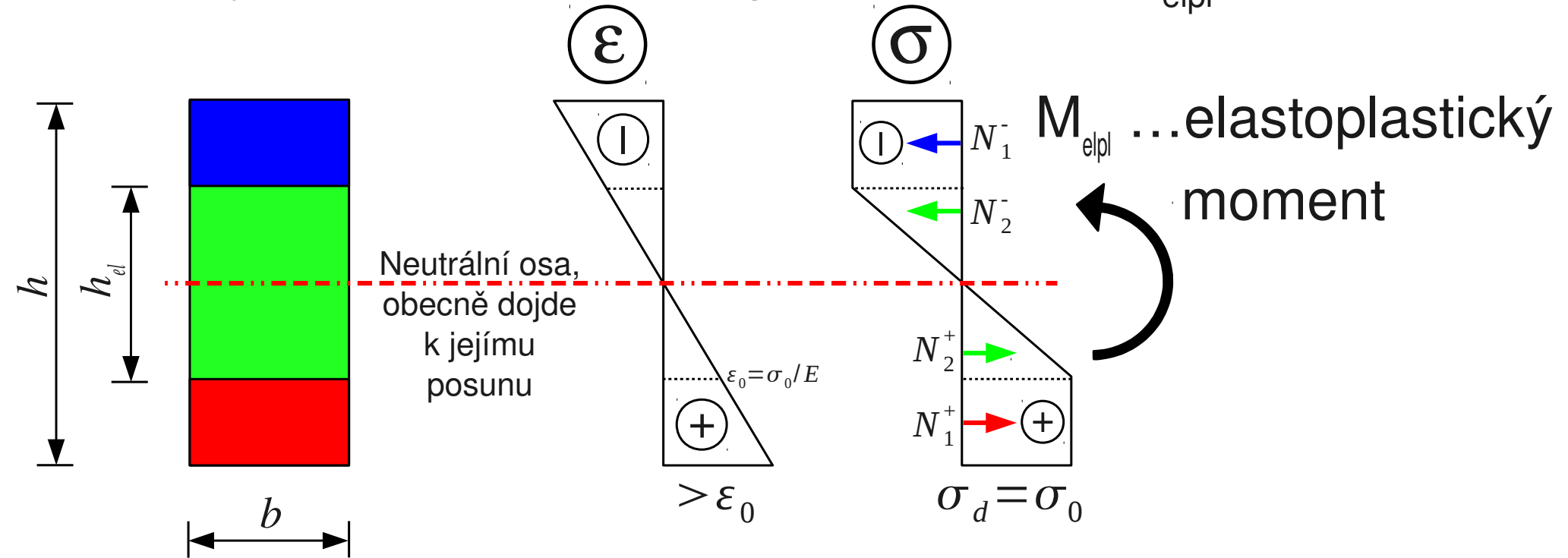


$$M_{el} = \sigma_0 \cdot W_{el}^d = \sigma_0 \cdot \frac{bh^2}{6}, \quad \kappa = \frac{2\epsilon_0}{h}$$

Pro mezní elastický moment rozhoduje menší z W_{el}^d či W_{el}^h , tzn. průřezový modul ke vzdálenějším vláknům.

Pružnoplastický ohyb – analýza průřezu

- Elastoplastický stav – část průřezu plastizuje
- Obvykle dvě neznámé – poloha N.O. a M_{elpl}



$$M_{elpl} = W_{elpl} \cdot \sigma_0 = \sigma_0 \cdot \left(\frac{bh^2}{4} - \frac{bh_{el}^2}{12} \right), \quad \kappa = \frac{2\epsilon_0}{h_{el}}$$

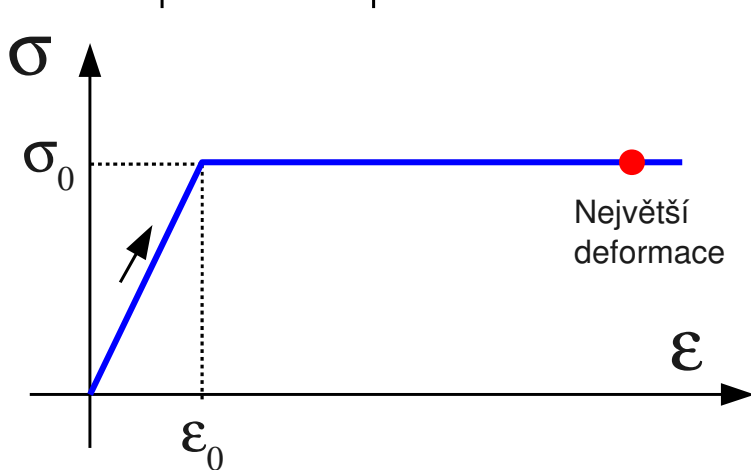
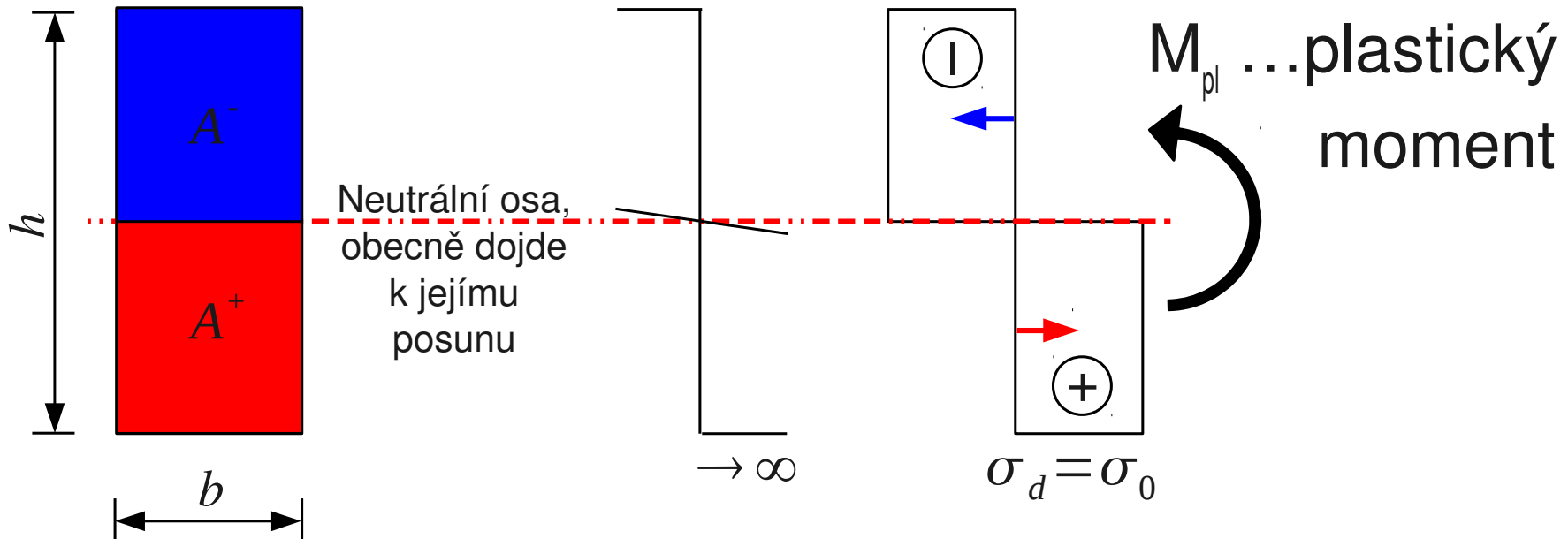
$$N_x = 0 \rightarrow \iint_A \sigma_x dA = 0 \rightarrow \sum N^+ = \sum |N^-|$$

$$M_{elpl} = \iint_A \sigma_x z dA$$

Pružnoplastický ohyb – analýza průřezu

- Mezní plastický stav – celý průřez plastizuje
- Obvykle dvě neznámé – poloha N.O. a M_{pl}

(ε) (σ)



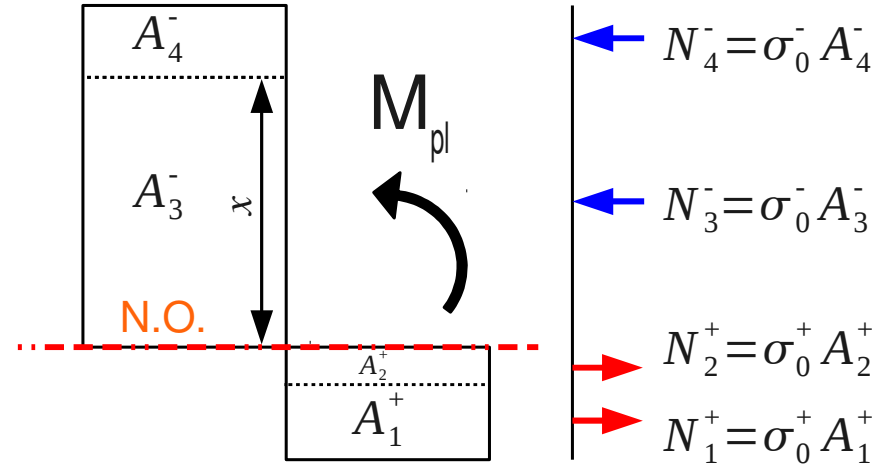
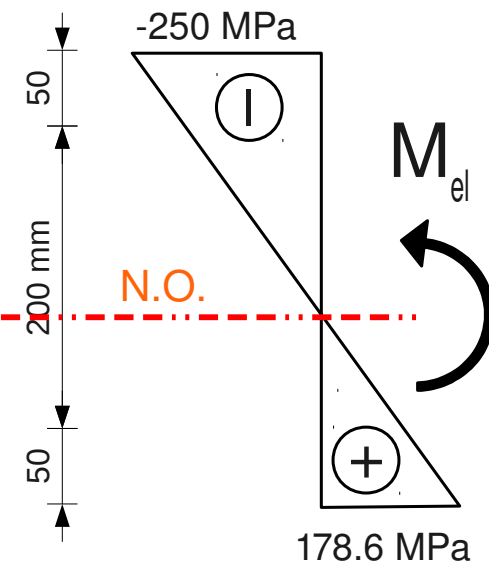
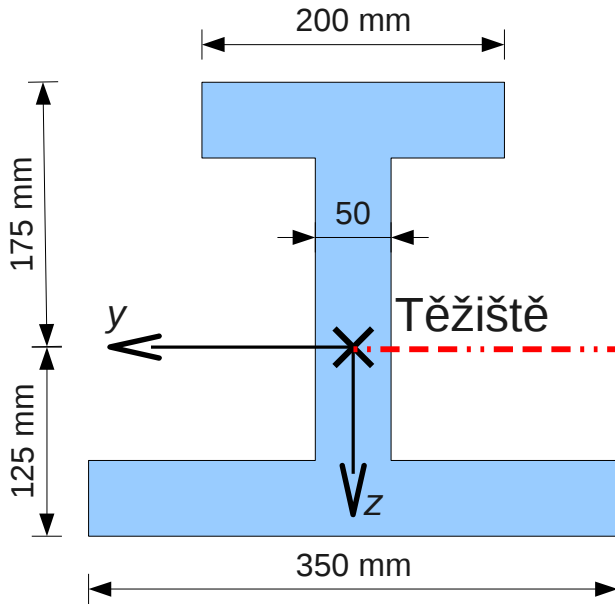
$$M_{pl} = W_{pl} \cdot \sigma_0 = \sigma_0 \cdot \frac{bh^2}{4}, \quad \kappa \rightarrow \infty$$

$$N_x = 0 \rightarrow \iint_A \sigma_x dA = 0, \quad \sigma_0^+ = \sigma_0^- \rightarrow A^+ = A^-$$

$$M_{pl} = \iint_A \sigma_x z dA$$

$$M_{el} < M_{elpl} < M_{pl}$$

Příklad – určete M_{el} a M_{pl} pro $\sigma_0 = \pm 250$ MPa



$$A = 0,0375 \text{ m}^2$$

$$I_y = 4,453125 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$M_{el} = \sigma_0 \frac{I_y}{z_h}$$

$$M_{el} = 636,1 \text{ kNm}$$

$$\sigma_0^+ = |\sigma_0^-|$$

$$A^+ = A^- = 0,01875 \text{ m}^2$$

$$x = 0,175 \text{ m}$$

$$N_4^- = 2,5 \text{ MN}$$

$$N_3^- = 2,1875 \text{ MN}$$

$$N_2^+ = 0,3125 \text{ MN}$$

$$N_1^+ = 4,375 \text{ MN}$$

$$M_{pl} = -2,5 \cdot 0,025$$

$$-2,1875 \cdot 0,1375$$

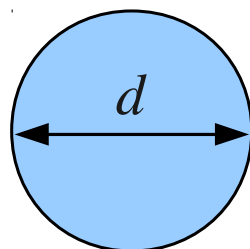
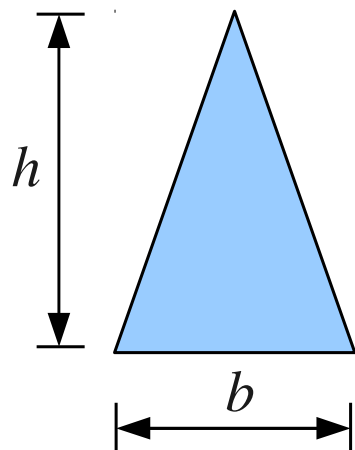
$$+ 0,3125 \cdot 0,2375$$

$$+ 4,375 \cdot 0,275$$

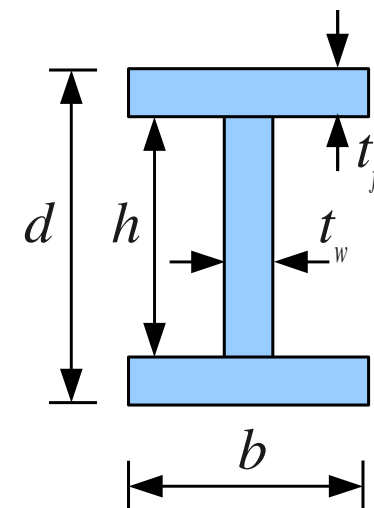
$$= 914,1 \text{ kNm}$$

Plastická rezerva průřezu

$$\frac{M_{pl}}{M_{el}} = \frac{\sigma_0 \cdot W_{pl}}{\sigma_0 \cdot W_{el}} = \frac{W_{pl}}{W_{el}}$$



Válcované profily IPN, IPE



$$W_{el}^{min} = \frac{bh^2}{24}$$

$$\frac{\pi d^3}{32}$$

$$\frac{bh^2}{6}$$

$$\frac{bd^3 - (b - t_w)h^3}{6d}$$

$$W_{pl} = \frac{bh^2}{6} (2 - \sqrt{2})$$

$$\frac{d^3}{6}$$

$$\frac{bh^2}{4}$$

$$bt_f(d - t_f) + \frac{t_w h^2}{4}$$

$$\frac{W_{pl}}{W_{el}} = 2,343$$

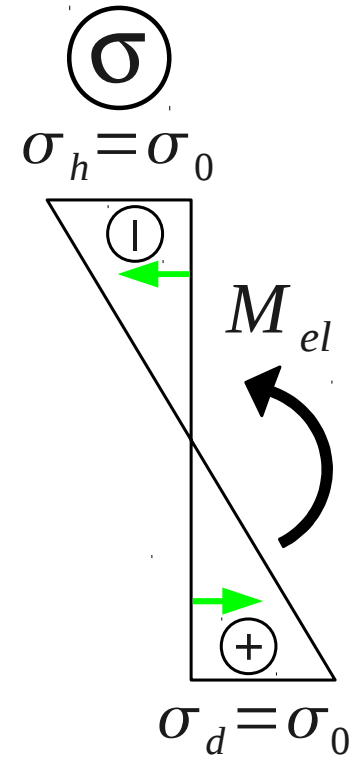
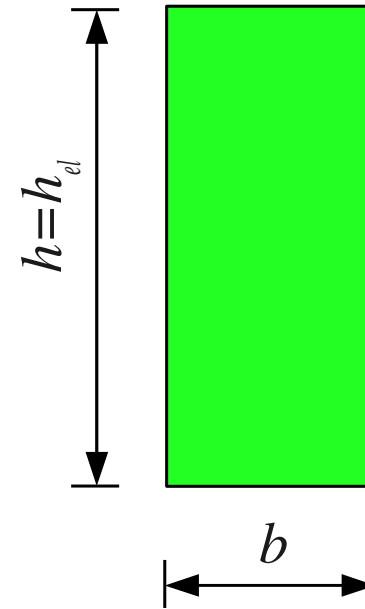
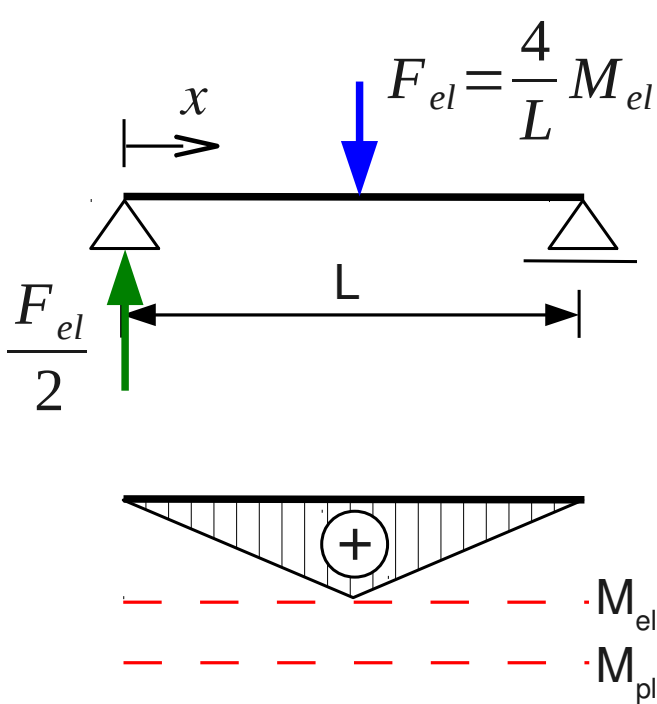
$$1,698$$

$$1,5$$

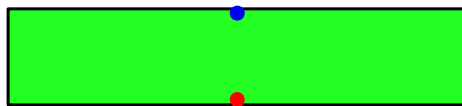
$$\approx 1,15$$

Pružnoplastický ohyb – analýza nosníku

- Mezní elastický stav

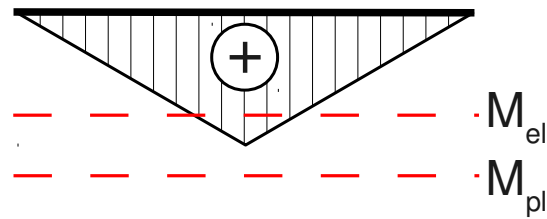
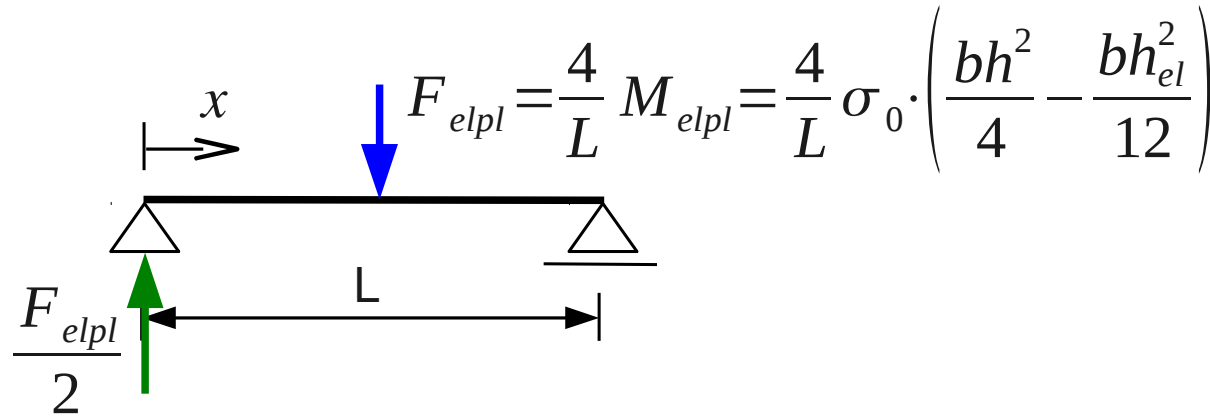


Mez kluzu dosažena na nosníku



Pružnoplastický ohyb – analýza nosníku

- Elastoplastický stav

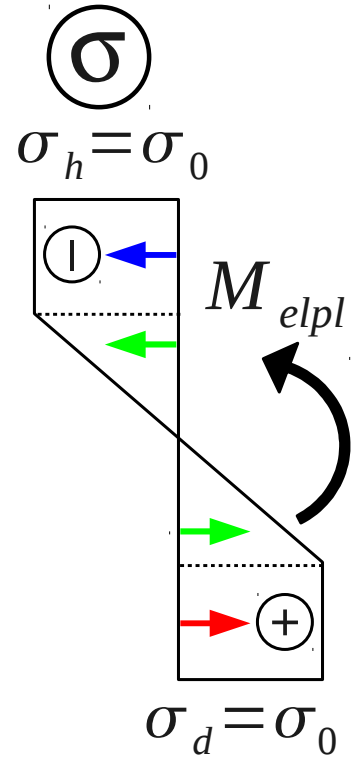
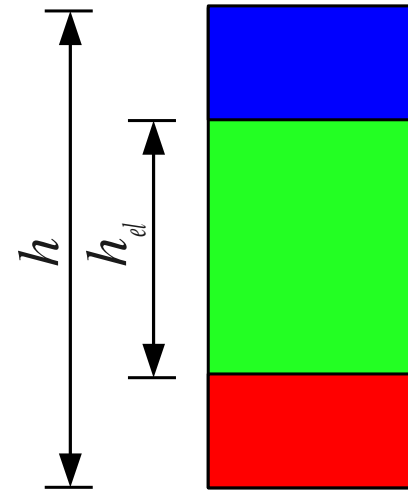
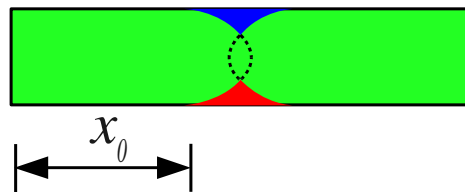


$$M_{el} = \sigma_0 \frac{bh^2}{6}$$

$$M_{elpl} = \sigma_0 \cdot \left(\frac{bh^2}{4} - \frac{bh_{el}^2}{12} \right)$$

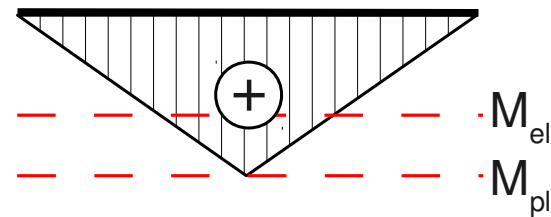
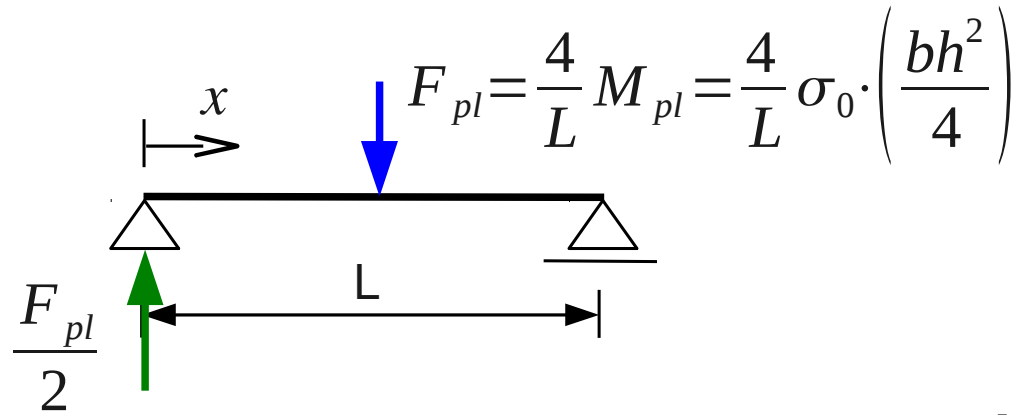
$$M_{el} = \frac{F_{elpl}}{2} x_0, \quad x_0 = \frac{2 M_{el}}{F_{elpl}}$$

Mez kluzu dosažena na nosníku



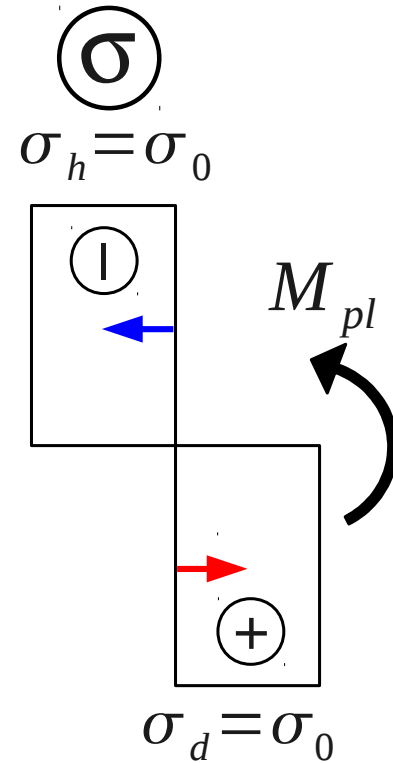
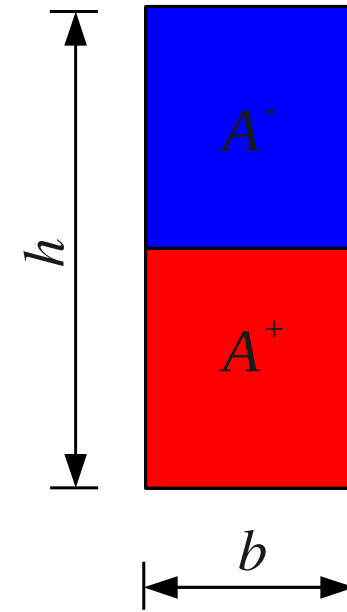
Pružnoplastický ohyb – analýza nosníku

- Mezní plastický stav

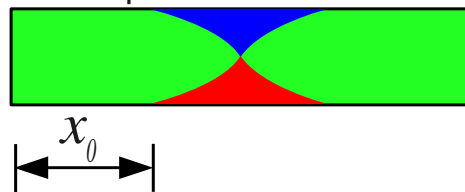


$$M_{el} = \sigma_0 \frac{bh^2}{6}$$

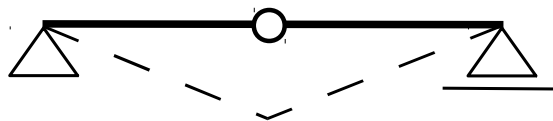
$$M_{pl} = \sigma_0 \cdot \left(\frac{bh^2}{4} \right)$$



Mez kluzu dosažena na nosníku
Tvar plastického kloubu



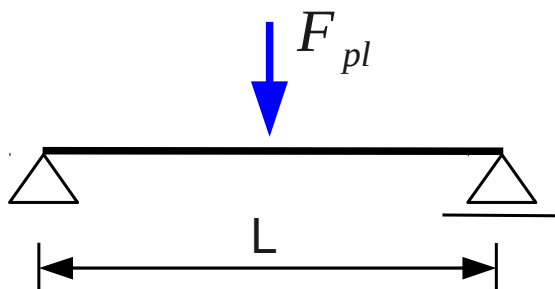
$$M_{el} = \frac{F_{pl}}{2} x_0, \quad x_0 = \frac{2 M_{el}}{F_{pl}} = \frac{2 \sigma_0 \frac{bh^2}{6}}{\frac{4}{L} \sigma_0 \cdot \left(\frac{bh^2}{4} \right)} = \frac{L}{3}$$



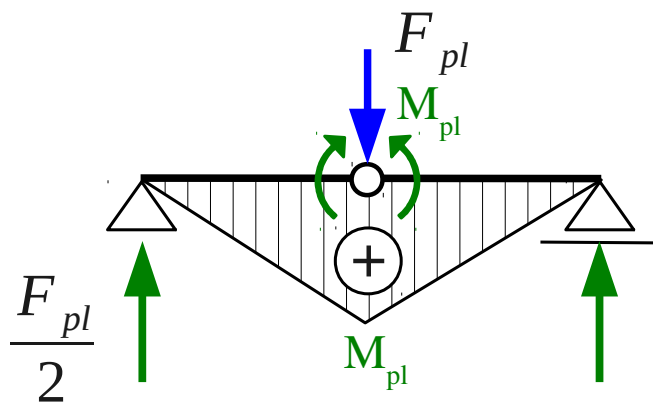
Plastický kloub funguje podobně jako vložený kloub.
Výsledkem je staticky přeurlčitá konstrukce (kinematický mechanismus).

Výpočet mezního zatížení na konstrukci

- Při daném (známém) kinematickém mechanismu kolapsu umíme určit maximální zatížení.
- Použijeme momentové podmínky rovnováhy.

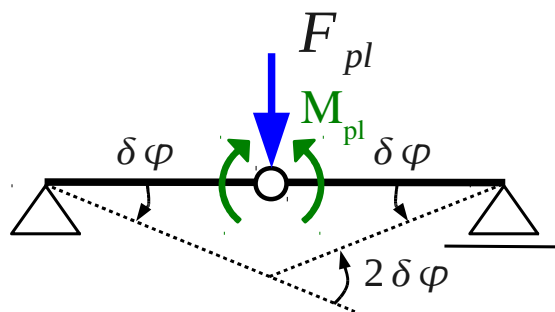
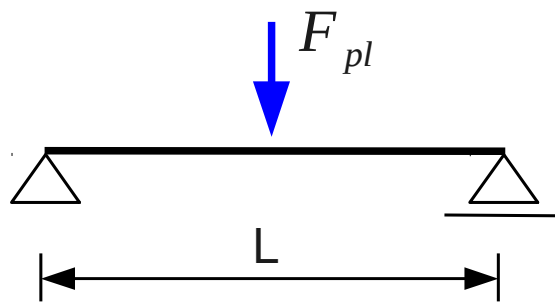


$$\frac{F_{pl}}{2} \cdot \frac{L}{2} = M_{pl}$$
$$F_{pl} = \frac{4 M_{pl}}{L}$$



Výpočet mezního zatížení pomocí virtuálních prací

- Rovnováha na konstrukci se určí pomocí virtuálních prací. Protože se jedná o kinematický mechanismus, je veškerá vnitřní energie soustředěna do plastických kloubů.



$$\delta W_{ext} = F_{pl} \delta\varphi \frac{L}{2}$$

$$\delta W_{int} = M_{pl} 2\delta\varphi$$

$$\delta W_{ext} = \delta W_{int}$$

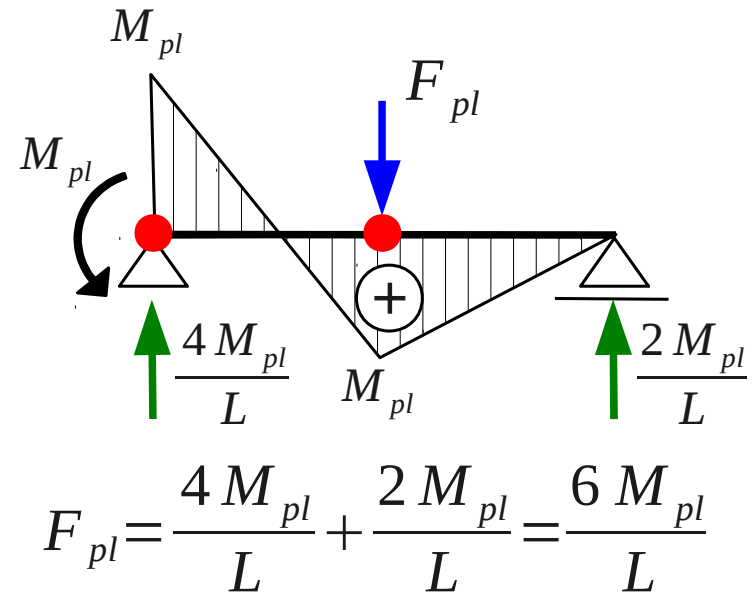
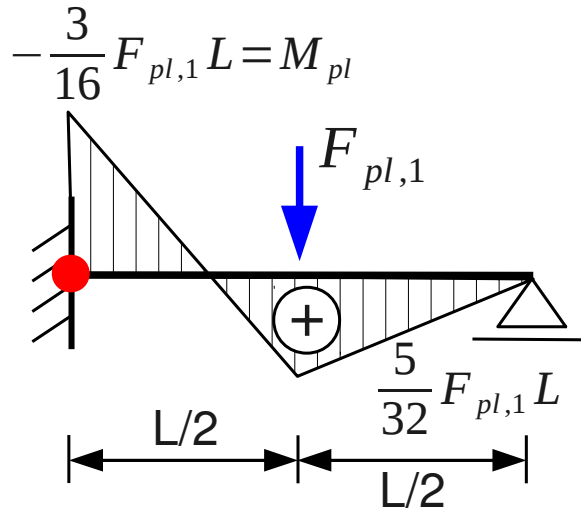
$$F_{pl} \delta\varphi \frac{L}{2} = M_{pl} 2\delta\varphi$$

$$F_{pl} = \frac{4M_{pl}}{L}$$

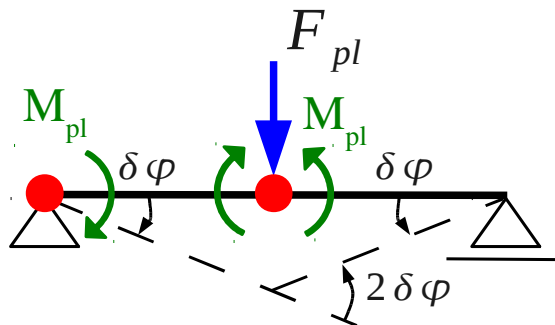
Virtuální práce
nebudou ve zkoušce
z pružnosti.

Plastická analýza staticky neurčité konstrukce

- Kolaps s-krát staticky neurčité konstrukce nastane až při vzniku $s+1$ plastických kloubů



- Pomocí PVp



$$\delta W_{ext} = F_{pl} \frac{L}{2} \delta \varphi$$

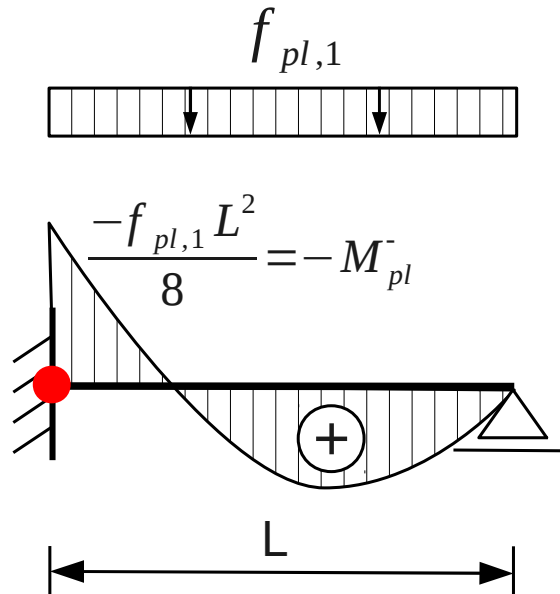
$$\delta W_{int} = M_{pl} \delta \varphi + 2 M_{pl} \delta \varphi = 3 M_{pl} \delta \varphi$$

$$F_{pl} \delta \varphi \frac{L}{2} = 3 M_{pl} \delta \varphi, \quad F_{pl} = \frac{6 M_{pl}}{L}$$

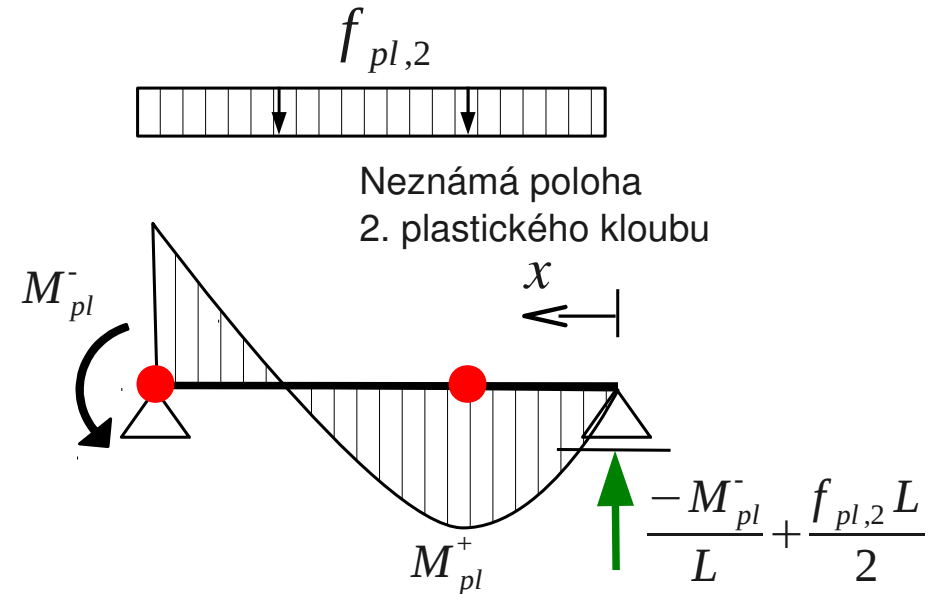
Virtuální práce
nebudou ve zkoušce
z pružnosti.

Plastická analýza staticky neurčité konstrukce

- Určete mezní zatížení $f_{pl,1,2}$, uvažujte $M_{pl}^- = M_{pl}^+ > 0$



$$f_{pl,1} = \frac{8 M_{pl}^-}{L^2}$$



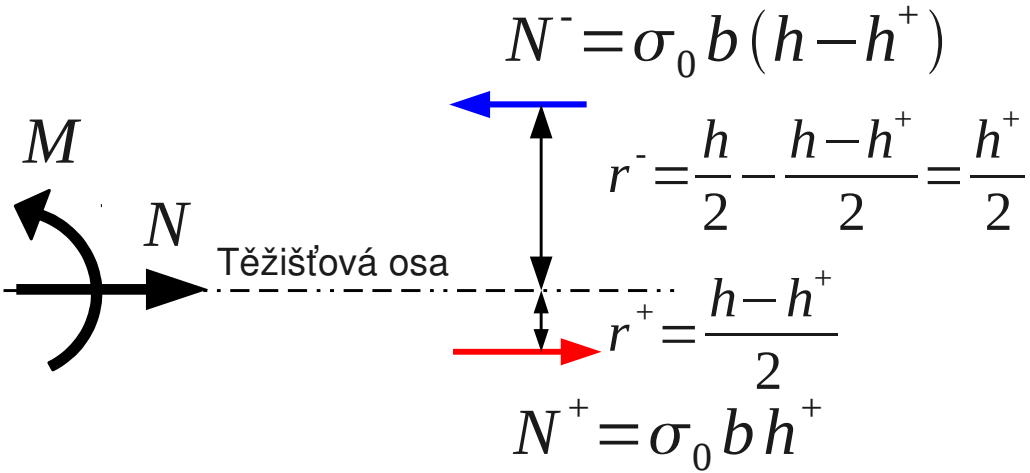
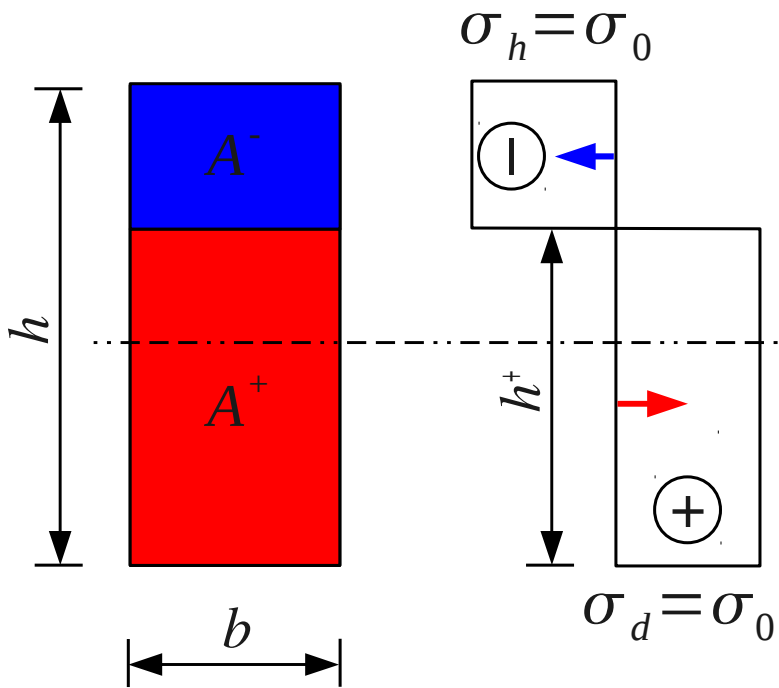
$$M(x) = \left[\frac{-M_{pl}^-}{L} + \frac{f_{pl,2} L}{2} \right] x - \frac{f_{pl,2} x^2}{2}$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x) = 0 = \frac{-M_{pl}^-}{L} + \frac{f_{pl,2} L}{2} - f_{pl,2} x$$

$$x = \frac{L}{2} - \frac{M_{pl}^-}{f_{pl,2} L}$$

$$M(x) = M_{pl}^+ \rightarrow f_{pl,2} = \frac{(2^{2.5} + 6) M_{pl}^+}{L^2} \approx \frac{11.66 M_{pl}^+}{L^2}$$

Mezní plastický stav při kombinaci ohybu s tahem



$$N = N^+ - N^- = \sigma_0 b (2h^+ - h)$$

$$h^+ = \frac{h}{2} + \frac{N}{2\sigma_0 b}$$

$$h - h^+ = \frac{h}{2} - \frac{N}{2\sigma_0 b}$$

$$M = N^+ r^+ + N^- r^- = \sigma_0 b h^+ \left(\frac{h - h^+}{2} + \frac{(h - h^+) h^+}{2h^+} \right)$$

$$M = \sigma_0 b h^+ (h - h^+)$$

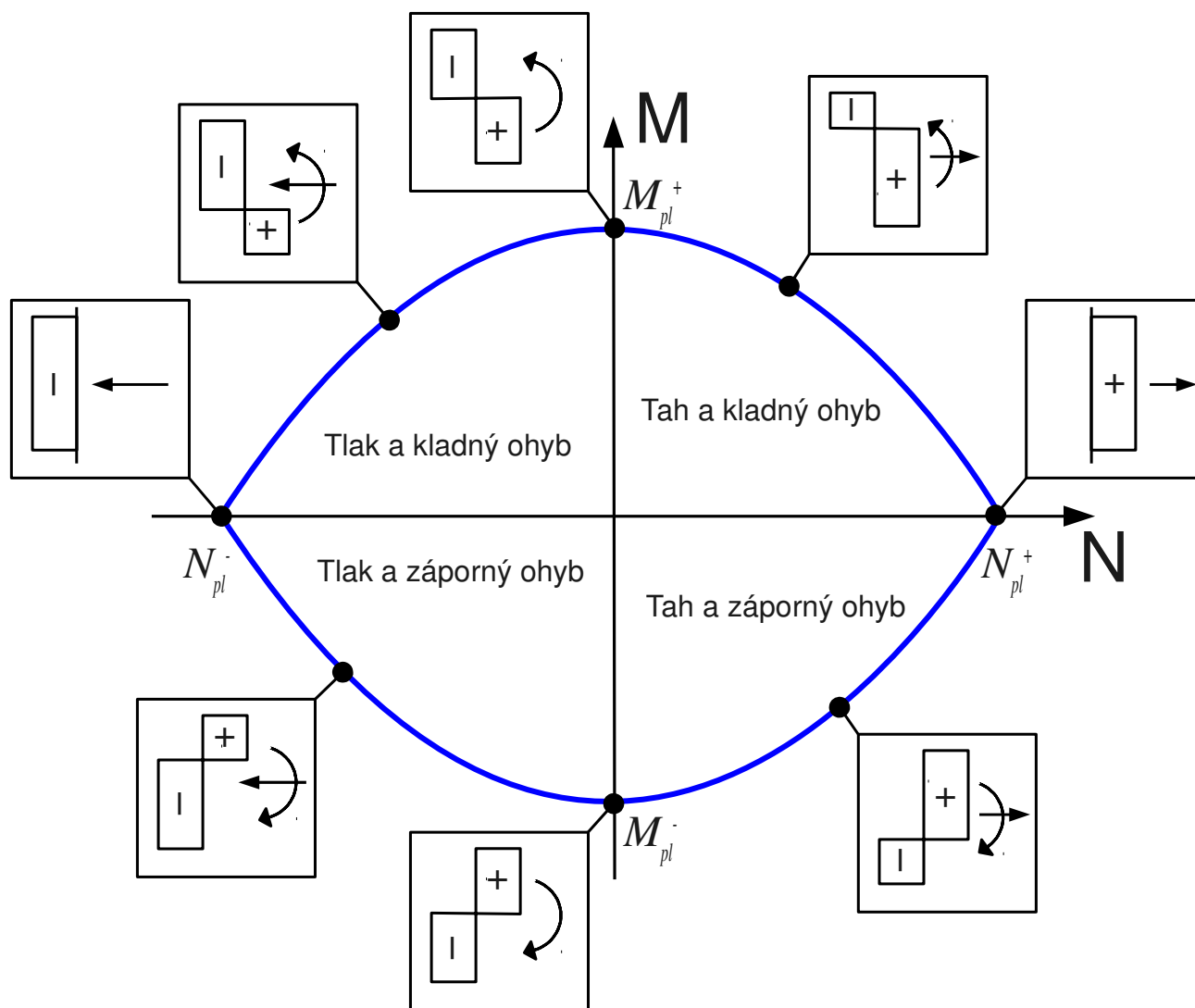
$$M = \sigma_0 b \left[\frac{h}{2} + \frac{N}{2\sigma_0 b} \right] \cdot \left[\frac{h}{2} - \frac{N}{2\sigma_0 b} \right]$$

$$M = \sigma_0 b \left[\frac{h^2}{4} - \left(\frac{N}{2\sigma_0 b} \right)^2 \right] = M_{pl} - \frac{N^2}{4\sigma_0 b}$$

$$\frac{M}{M_{pl}} + \frac{N^2}{4\sigma_0 b M_{pl}} = 1, \quad \frac{M}{M_{pl}} + \left(\frac{N}{N_{pl}} \right)^2 = 1$$

Mezní plastické stavy při ohybu s tahem/tlakem

- Zde uvedené plastické stavy platí pro obdélníkový průřez



$$\frac{M}{M_{pl}} + \left(\frac{N}{N_{pl}} \right)^2 = 1$$

$$\frac{|M|}{M_{pl}} + \left(\frac{N}{N_{pl}} \right)^2 = 1$$

$$\frac{M}{-M_{pl}} + \left(\frac{N}{N_{pl}} \right)^2 = 1$$

Mezní pružné stavy při ohybu a tahu/tlaku

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} z$$

$$\sigma_{max} = \sigma_0 = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} z_{max}$$

$$\sigma_{min} = -\sigma_0 = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} z_{min}$$

Extrémní hodnoty napětí při namáhání kladným ohybovým momentem

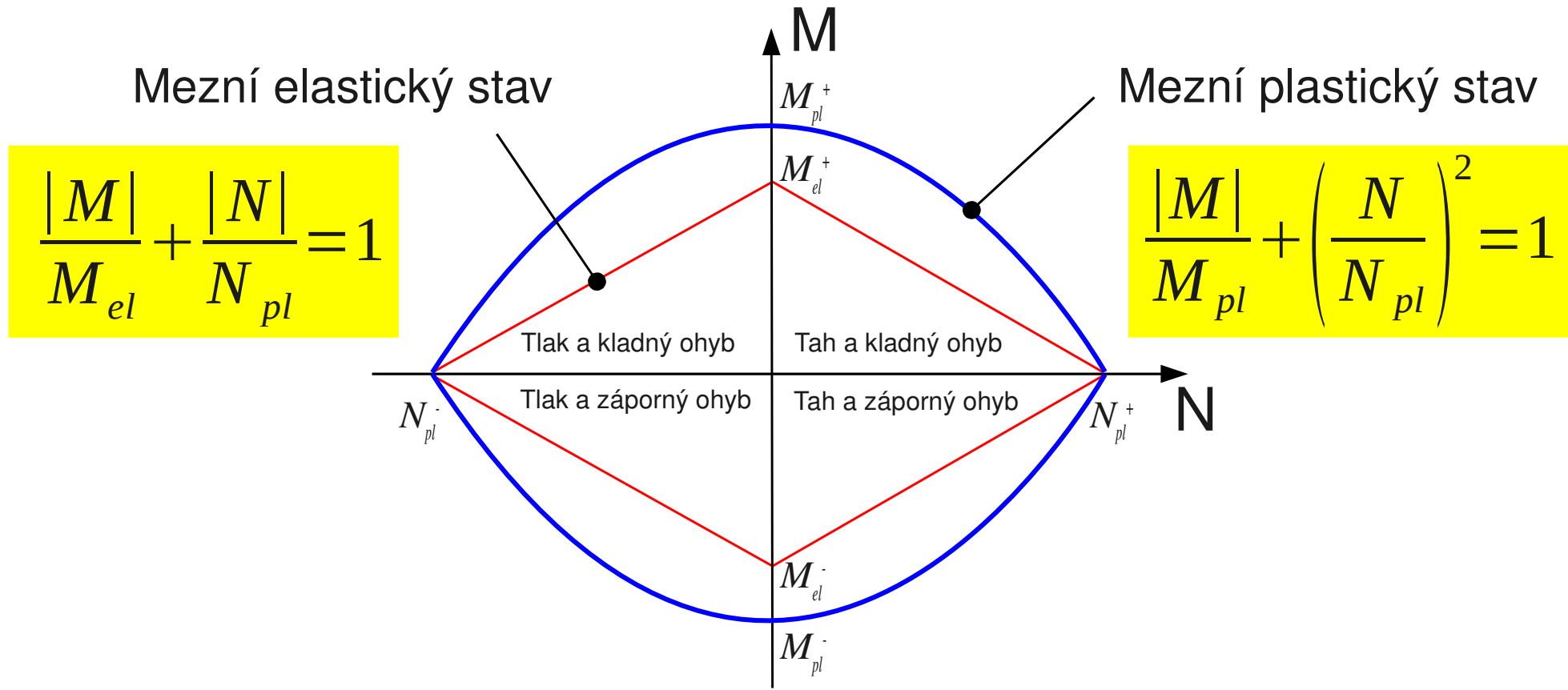
Odvození dále pro obdélníkový průřez:

$$M_{el} = \sigma_0 W_{el} = \sigma_0 \frac{bh^2}{6} = \sigma_0 \frac{2I}{h}$$

$$z_{max} = \frac{h}{2} \rightarrow \frac{N}{A\sigma_0} + \frac{Mh}{2I\sigma_0} = 1 \rightarrow \frac{N}{N_{pl}} + \frac{M}{M_{el}} = 1$$

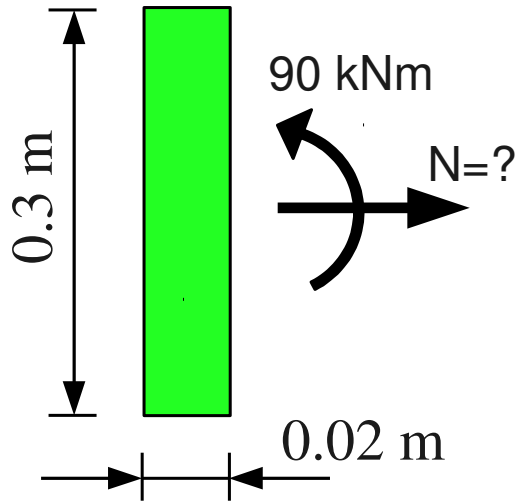
$$z_{min} = \frac{-h}{2} \rightarrow \frac{N}{-A\sigma_0} + \frac{-Mh}{-2I\sigma_0} = 1 \rightarrow \frac{N}{N_{pl}} - \frac{M}{M_{el}} = -1$$

Interakční diagram pro obdélníkový průřez



Příklad – určete velikost N v mezním plastickém stavu

- Průřez je současně namáhán $M_y=90$ kNm, $f_y=230$ MPa

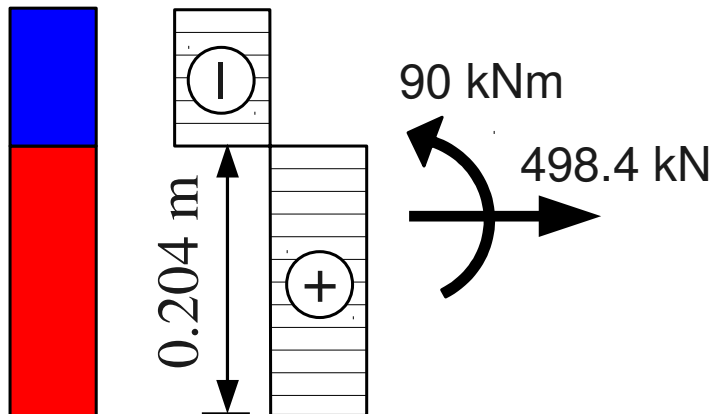


$$M_{pl} = \sigma_0 \frac{bh^2}{4} = 230\,000 \frac{0.02 \cdot 0.3^2}{4} = 103.5 \text{ kNm}$$

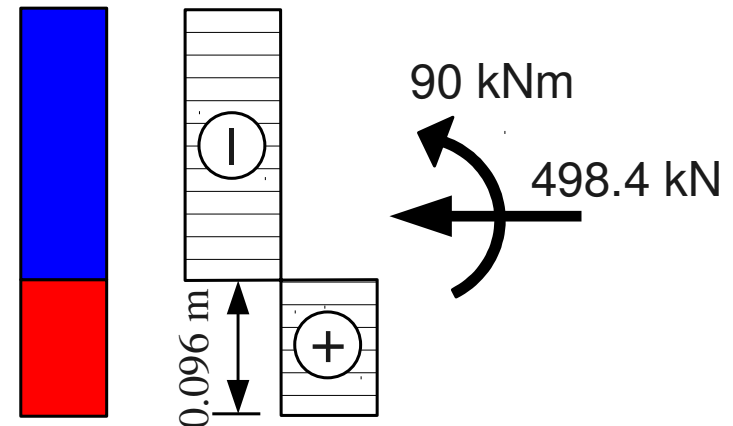
$$N_{pl} = \sigma_0 bh = 230\,000 \cdot 0.02 \cdot 0.3 = 1380 \text{ kN}$$

$$\frac{M}{M_{pl}} + \left(\frac{N}{N_{pl}} \right)^2 = 1$$

$$N = N_{pl} \sqrt{1 - \frac{M}{M_{pl}}} = 1380 \sqrt{1 - \frac{90}{103.5}} = \pm 498.4 \text{ kN}$$

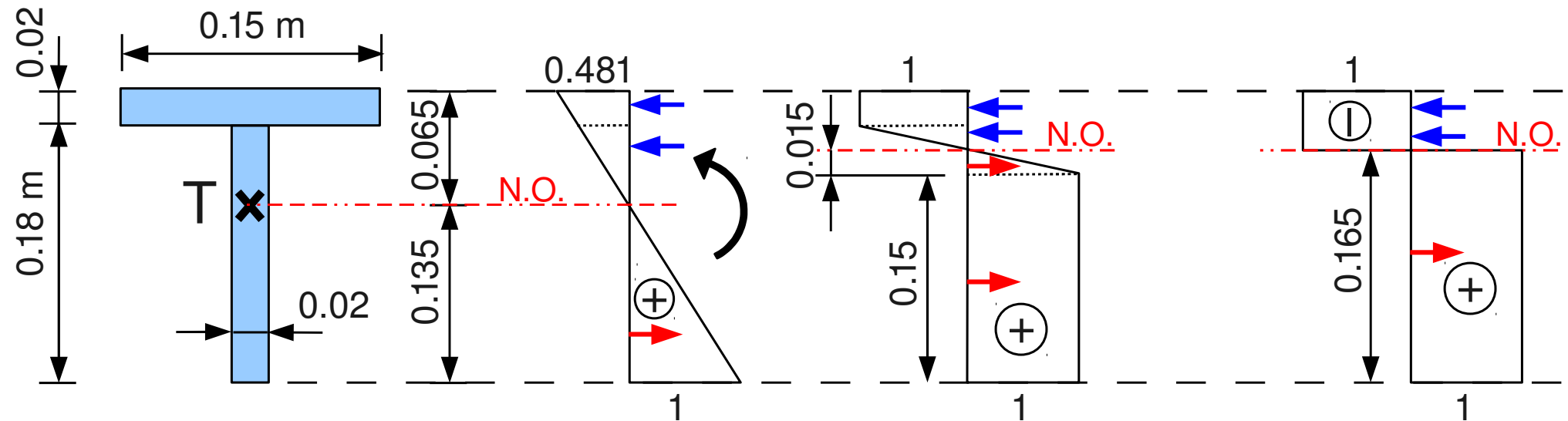


$$h^+ = \frac{h}{2} + \frac{N}{2\sigma_0 b} = 0.15 + \frac{498.4}{2 \cdot 230\,000 \cdot 0.02} = 0.204 \text{ m}$$



$$h^+ = \frac{h}{2} + \frac{N}{2\sigma_0 b} = 0.15 + \frac{-498.4}{2 \cdot 230\,000 \cdot 0.02} = 0.096 \text{ m}$$

Příklad – určete W_{el} , W_{elpl} se zplastizovanou pásnicí, W_{pl}



$$I_y = \frac{1}{12} (0.02 \cdot 0.18^3 + 0.15 \cdot 0.02^3) + 0.02 \cdot 0.18 \cdot 0.045^2 + 0.15 \cdot 0.02 \cdot 0.055^2 = 2.6185 \text{e-}5 \text{ m}^4$$

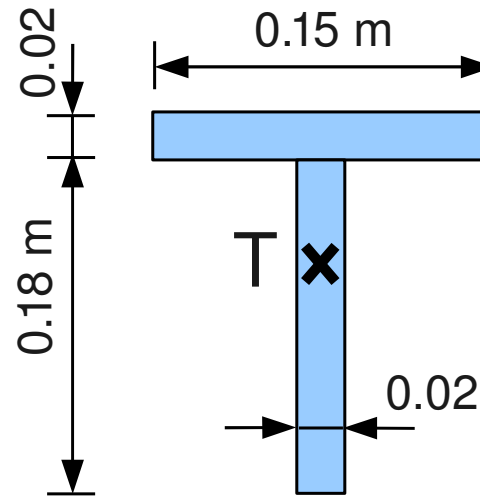
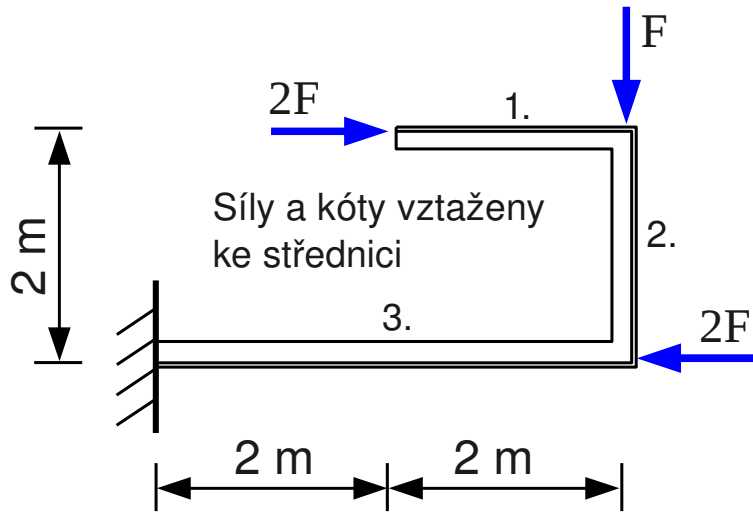
$$W_{el}^d = I_y / z_d = 1.9396 \text{e-}4 \text{ m}^3$$

$$W_{elpl} = 0.02 \cdot 0.15 \cdot 0.09 + 2 \cdot 0.015 \cdot 0.02 \cdot \frac{2 \cdot 0.015}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0.15 \cdot 0.02 \cdot 0.025 = 3.48 \text{e-}4 \text{ m}^3$$

$$W_{pl} = 0.02 \cdot \frac{0.165^2}{2} + 0.020 \cdot \frac{0.015^2}{2} + 0.15 \cdot 0.02 \cdot 0.025 = 3.495 \text{e-}4 \text{ m}^3$$

$$\frac{W_{pl}}{W_{el}} = 1.802$$

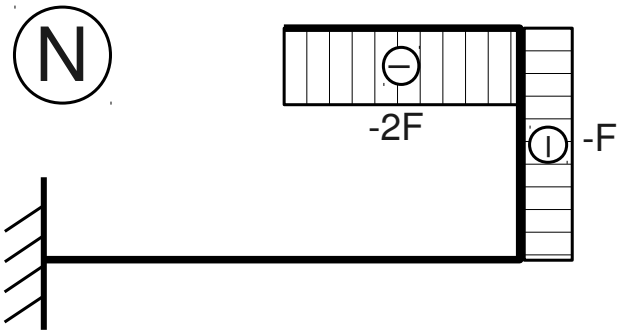
Určete mezní velikost F při kolapsecch prutů 1-3



$$\sigma_0 = 300 \text{ MPa}$$

$$A = 0.0066 \text{ m}^2$$

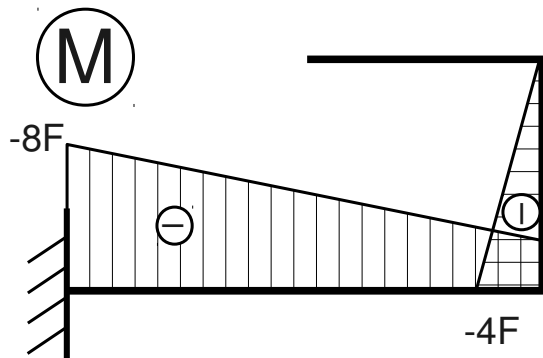
$$W_{pl} = 3.495 \text{ e-4 m}^3$$



Kolaps prutu 1 - tlak

$$-2F = -\sigma_0 \cdot A = 300 \cdot 0.0066 = -1.98 \text{ MN}$$

$$F = 990 \text{ kN}$$



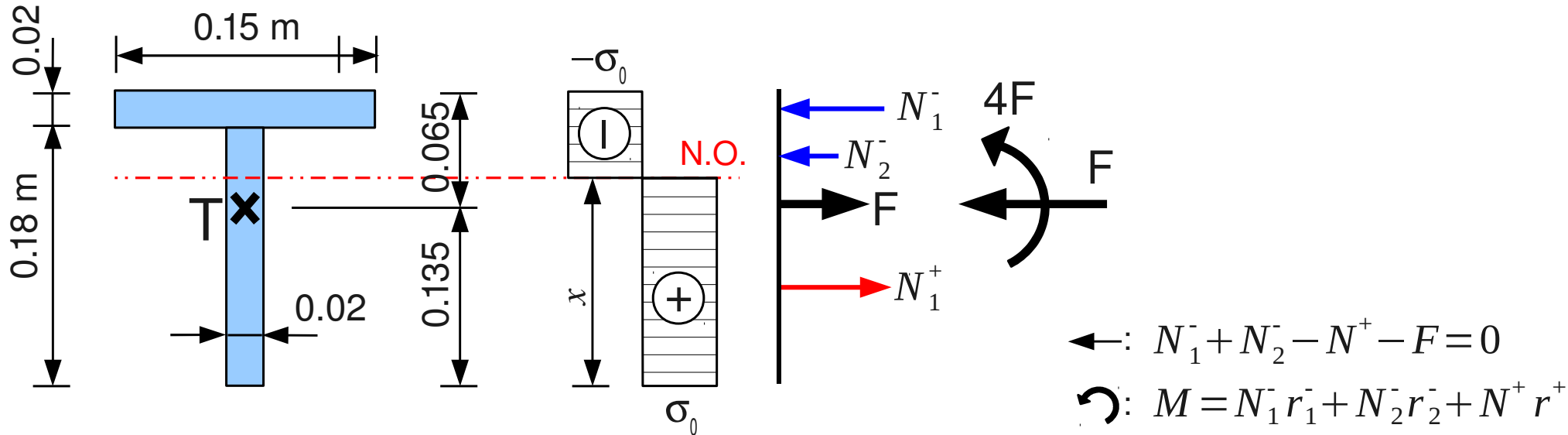
Kolaps prutu 3 – ohyb – tato síla rozhoduje

$$-8F = -\sigma_0 W_{pl} = 300 \cdot 3.495 \text{ e-4}$$

$$-8F = -0.10485 \text{ MNm}$$

$$F = 13.1 \text{ kN}$$

Určete mezní velikost F při kolapsech prutů 1-3



Kolaps prutu 2 – tlak a ohyb

$$F = 300 [0.15 \cdot 0.02 + 0.02 (0.18 - x) - 0.02x] = 1.98 - 12x, \quad x = \frac{1.98 - F}{12}$$

$$\curvearrowright: M = 4F = 300 \left[0.15 \cdot 0.02 (0.18 - x + 0.01) + \frac{0.02}{2} (0.18 - x)^2 + \frac{0.02x^2}{2} \right] + (x - 0.135) F$$

$$M = 0.171 - 0.9x + 0.0972 - 1.08x + 3x^2 + 3x^2 + (x - 0.135)(1.98 - 12x) = -6x^2 + 1.62x + 0$$

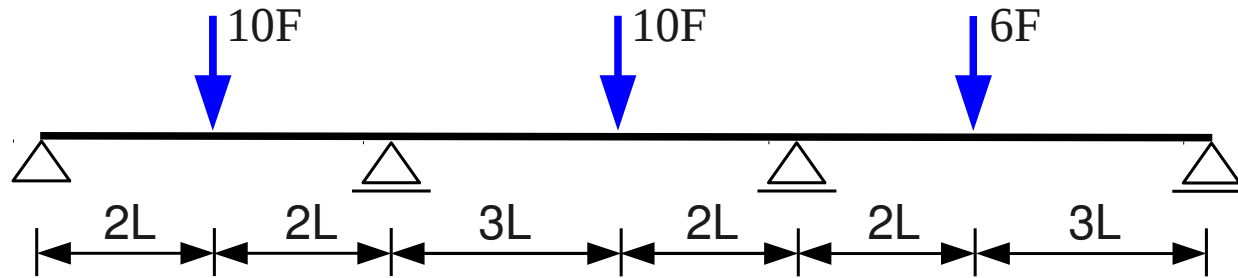
$$M = 4F = 4(1.98 - 12x) = -6x^2 + 1.62x$$

$$-6x^2 + 49.62x - 7.92 = 0, \quad \rightarrow x_1 = \mathbf{0.1628} \text{ m}, \quad x_2 = 8.107 \text{ m}$$

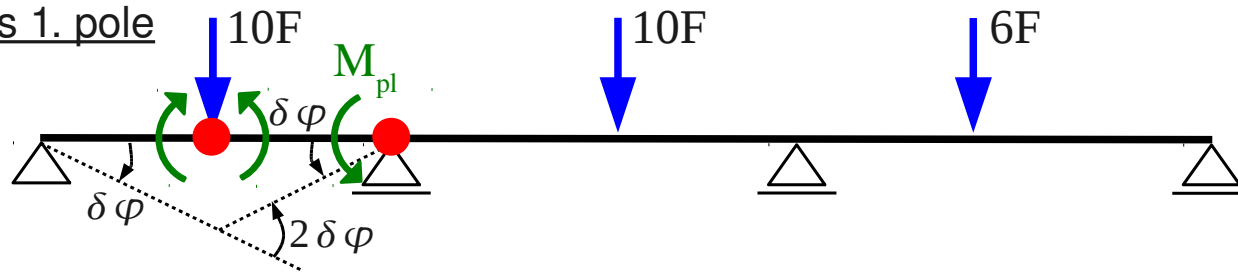
$$F = \mathbf{0.0262} \text{ MN}, \quad N_1^- = 900 \text{ kN}, \quad N_2^- = 103.1 \text{ kN}, \quad N_1^+ = 976.9 \text{ kN}, \quad M = 104.7 \text{ kNm}$$

Určete mezní zatížení konstrukce při zadaném M_{pl} průřezu

Virtuální práce
nebudou ve zkoušce
z pružnosti.



Kolaps 1. pole

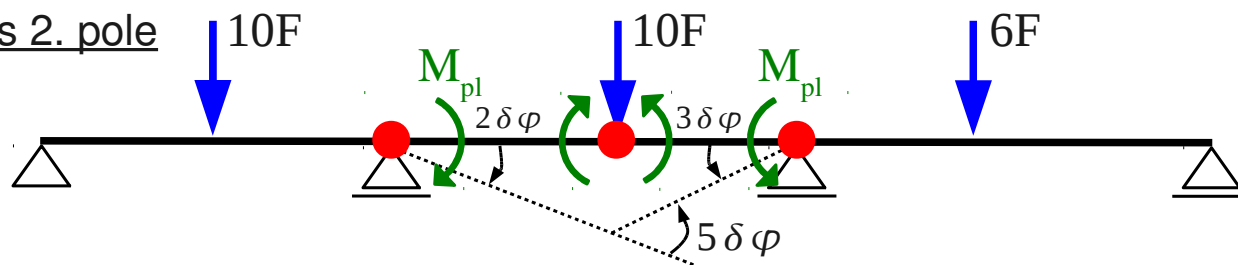


$$\delta W_{int} = \delta W_{ext}$$

$$\delta \varphi M_{pl}(2+1) = \delta \varphi 10F \cdot 2L$$

$$F = \frac{3}{20} \cdot \frac{M_{pl}}{L} = 0.15 \frac{M_{pl}}{L}$$

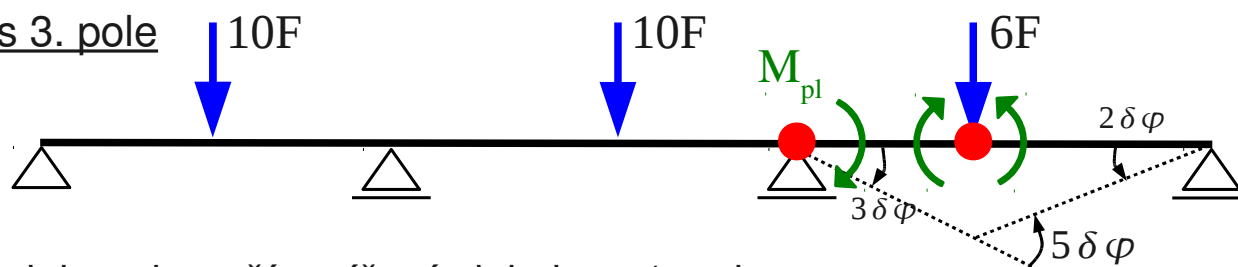
Kolaps 2. pole



$$\delta \varphi M_{pl}(2+5+3) = \delta \varphi 10F \cdot 3 \cdot 2L$$

$$F = \frac{10}{60} \cdot \frac{M_{pl}}{L} \approx 0.1667 \frac{M_{pl}}{L}$$

Kolaps 3. pole



$$\delta \varphi M_{pl}(3+5) = \delta \varphi 6F \cdot 2 \cdot 3L$$

$$F = \frac{8}{36} \cdot \frac{M_{pl}}{L} \approx 0.2222 \frac{M_{pl}}{L}$$

Rozhoduje nejmenší zatížení, tj. kolaps 1. pole

Otázky

1. Nakreslete pracovní diagramy materiálu se zpevněním a se změkčením.
2. Vyjádřete křivost prutu při elastoplastickém stavu. Jaká je křivost prutu při mezním plastickém stavu?
3. Jak lze snadno nalézt polohu neutrální osy při mezním plastickém momentu, pokud jsou meze kluzu v tahu i tlaku stejné?
4. Načrtněte tvar plastického kloubu pro I profil při tříbodovém a čtyřbodovém ohybu.
5. Kolik plastických kloubů musí vzniknout u dvakrát staticky neurčité konstrukce, aby došlo k jejímu celému kolapsu? Může na některé části dojít ke kolapsu dříve?
6. Jak zjistit mezní zatížení u konstrukce, kde neznáme počet a polohu plastických kloubů?
7. Může libovolná normálová síla přispívat ke zvětšení M_{pl} ?
8. Jaký je rozdíl v mezní únosnosti čistě taženého prutu, pokud použijete teorii pevnosti a pružnoplastický materiál?