

# Přednáška 07

Rovinná napjatost - nosné stěny

Rovinná deformace

Hlavní napětí

Mohrova kružnice

Metoda konečných prvků pro rovinnou napjatost

Laméovy rovnice

Příklady

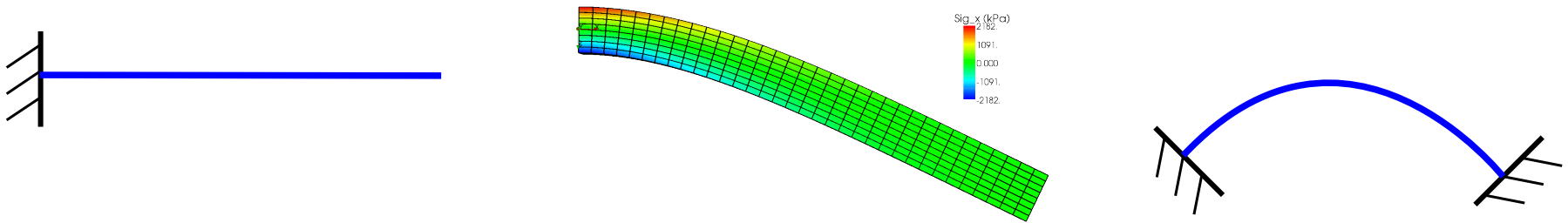
Copyright (c) 2011 Vít Šmilauer

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Mechanics, Czech Republic

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License" found at <http://www.gnu.org/licenses/>

# Vícerozměrné úlohy pružnosti

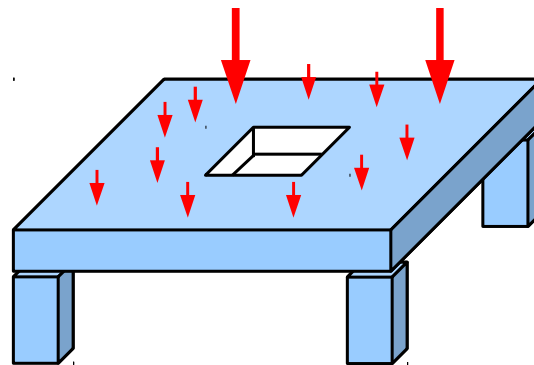
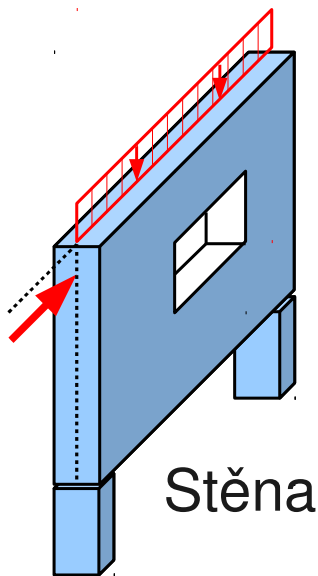
- Jednorozměrná úloha (1D) - prut. Přímá či zakřivená střednice spojuje těžiště průřezů. Vnitřní síly a deformační parametry závisí na pouze souřadnici  $x$ . Souřadnice  $y, z$  vystupují nezávisle na průřezech.



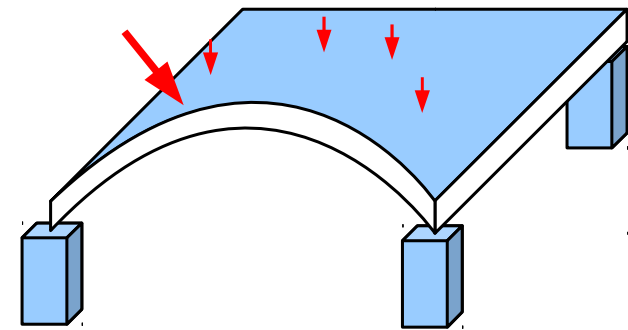
- Trojrozměrná úloha (3D) - napětí a deformace závisejí na souřadnicích  $x, y, z$ . Obecně 15 neznámých
  - 3 neznámé posuny  $u, v, w$
  - 6 složek deformací  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$
  - 6 složek napětí  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ 
    - K dispozici 15 rovnic: 3 statické rovnice, 6 geometrických rovnic, 6 fyzikálních rovnic

# Vícerozměrné úlohy pružnosti

- Dvojměrná úloha (2D) - rovinná nebo zakřivená střednicová plocha. Rozměr kolmý na střednicovou plochu je výrazně menší než její rozměry.
  - **Stěna** - rovinný 2D prvek zatížený pouze ve střednicové rovině.
  - **Deska** - rovinný 2D prvek zatížený pouze kolmo na střednicovou rovinu.
  - **Skořepina** - zakřivená střednicová plocha.



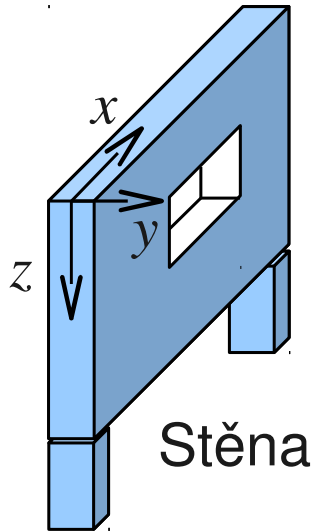
Deska



Skořepina

# Zvláštní případy 2D úlohy

- Rovinná napjatost – stěna



$$\sigma_y = 0$$

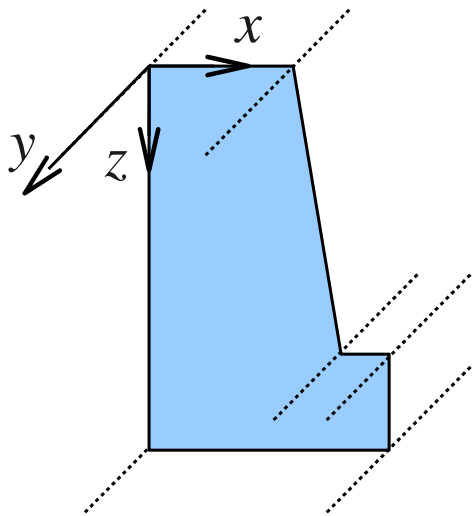
$$\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz} \neq 0$$

$$\sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xz} \neq 0$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$$

- Rovinná deformace – přehrada, dlouhá opěrná zed', zemní kolektor, dlouhé potrubí



$$\varepsilon_y = 0$$

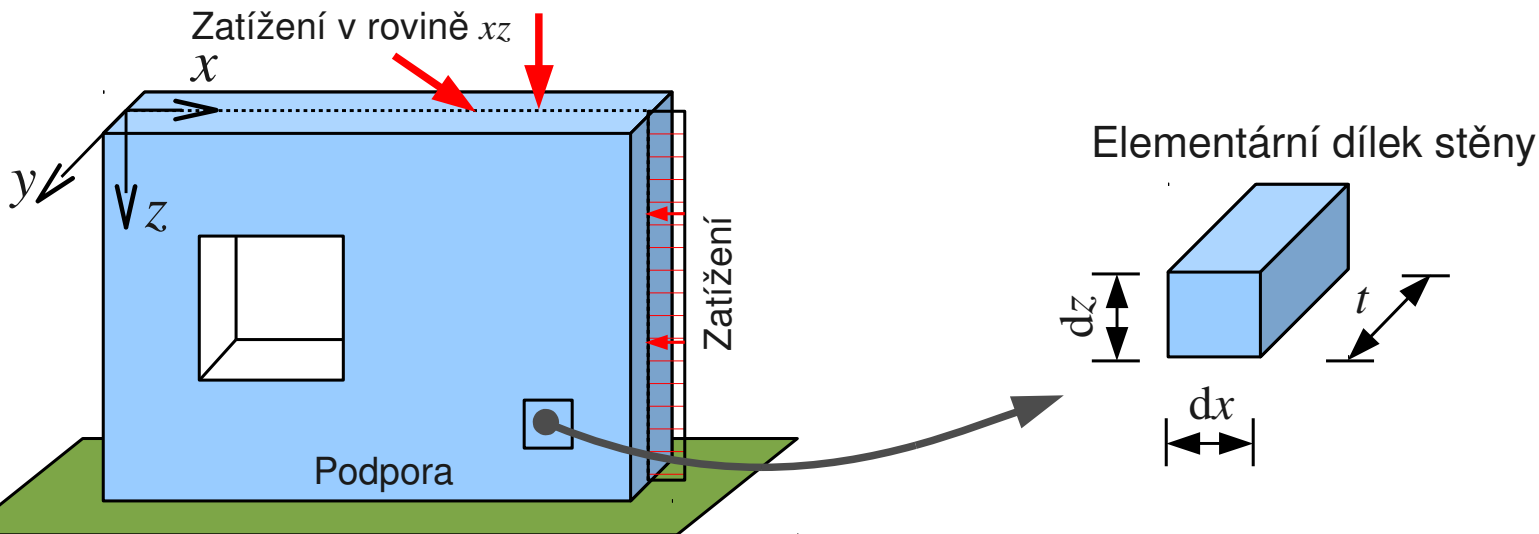
$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz} \neq 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$$

$$\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz} \neq 0$$

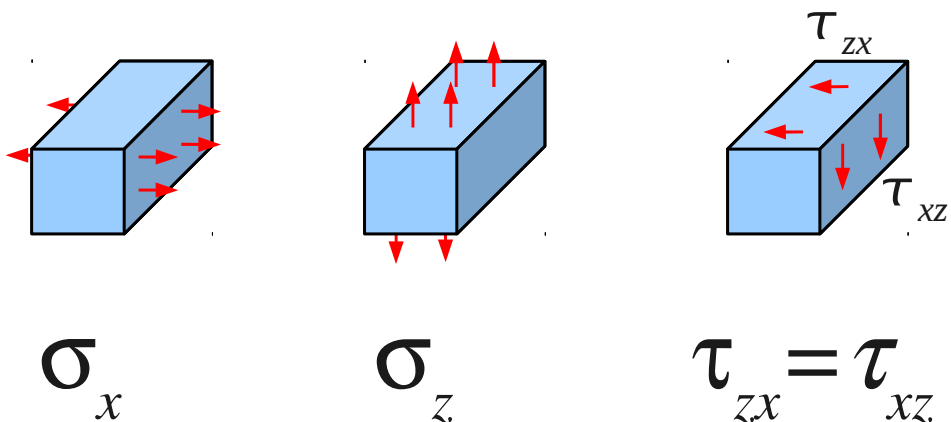
$$\varepsilon_y = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$$

# Napětí ve stěně



## Nenulové složky napětí

(síly na jednotku plochy,  $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$ )

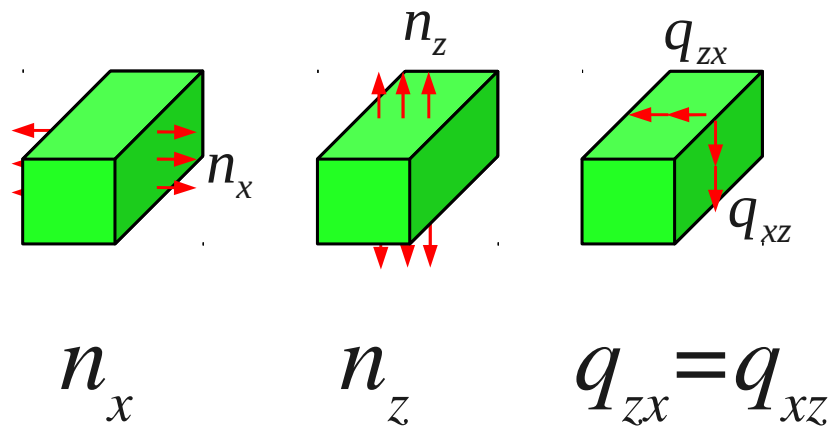


Normálová napětí

Smyková napětí

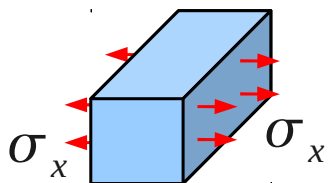
## Měrné vnitřní síly

(síly na jednotku délky  $\text{N/m} = \text{Pa} \cdot \text{m}$ )

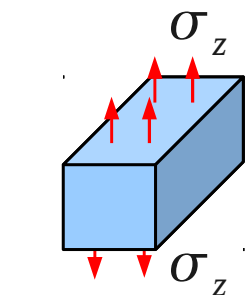


# Napětí a vnitřní síly ve stěně

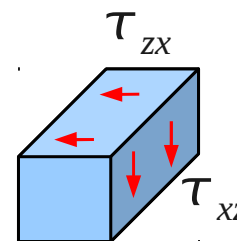
- Uvažujme stěnu o konstantní tloušťce. Napětí je rozloženo rovnoměrně po tloušťce stěny.



$$\sigma_x = \frac{n_x}{t}$$



$$\sigma_z = \frac{n_z}{t}$$



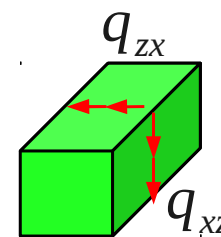
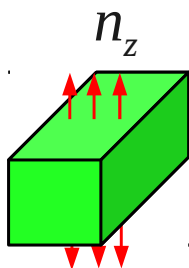
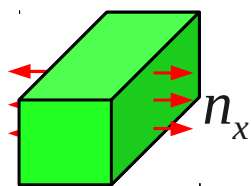
$$\tau_{zx} = \frac{q_{zx}}{t} = \tau_{xz} = \frac{q_{xz}}{t}$$

$$n_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dy = t \sigma_x$$

$$n_z = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_z dy = t \sigma_z$$

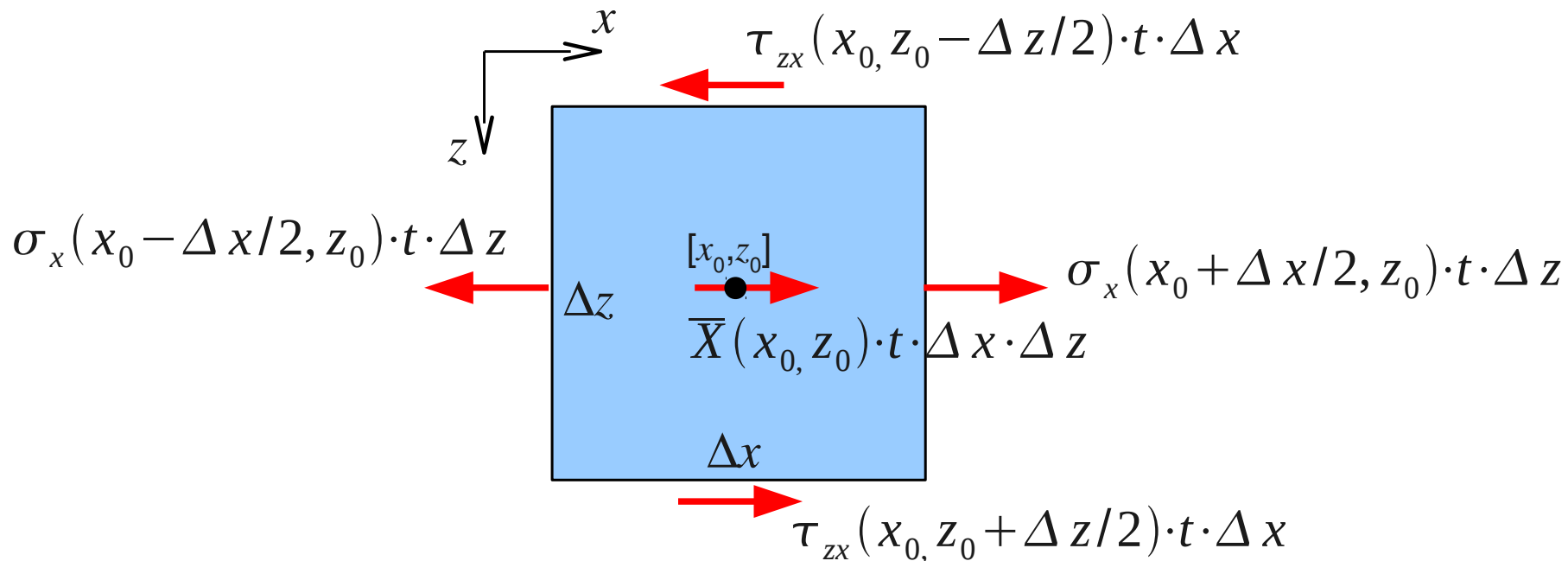
$$q_{zx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{zx} dy = t \tau_{zx}$$

$$q_{xz} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dy = t \tau_{xz}$$



$$q_{zx} = q_{xz}$$

# Rovnováha elementárního dílku – směr $x$



Podmínka rovnováhy:

$$\rightarrow: \sigma_x(x_0 + \Delta x/2, z_0) \cdot t \cdot \Delta z - \sigma_x(x_0 - \Delta x/2, z_0) \cdot t \cdot \Delta z + \tau_{zx}(x_0, z_0 + \Delta z/2) \cdot t \cdot \Delta x - \tau_{zx}(x_0, z_0 - \Delta z/2) \cdot t \cdot \Delta x + \bar{X}(x_0, z_0) \cdot t \cdot \Delta x \cdot \Delta z = 0$$

$$/:(t \cdot \Delta x \cdot \Delta z)$$

# Rovnováha elementárního dílku – směr $x$

$$\frac{\sigma_x(x_0 + \Delta x/2, z_0) - \sigma_x(x_0 - \Delta x/2, z_0)}{\Delta x} + \frac{\tau_{zx}(x_0, z_0 + \Delta z/2) - \tau_{zx}(x_0, z_0 - \Delta z/2)}{\Delta z} + \bar{X}(x_0, z_0) = 0$$

$$\sigma_x(x_0 + \Delta x/2, z_0) \approx \sigma_x(x_0, z_0) + \frac{\partial \sigma_x(x_0, z_0)}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{2} + \frac{\partial^2 \sigma_x(x_0, z_0)}{2! \partial x^2} \cdot \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 + \dots$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{X} = 0$$

Cauchyho (statická) rovnice  
rovnováhy pro rovinnou napjatost

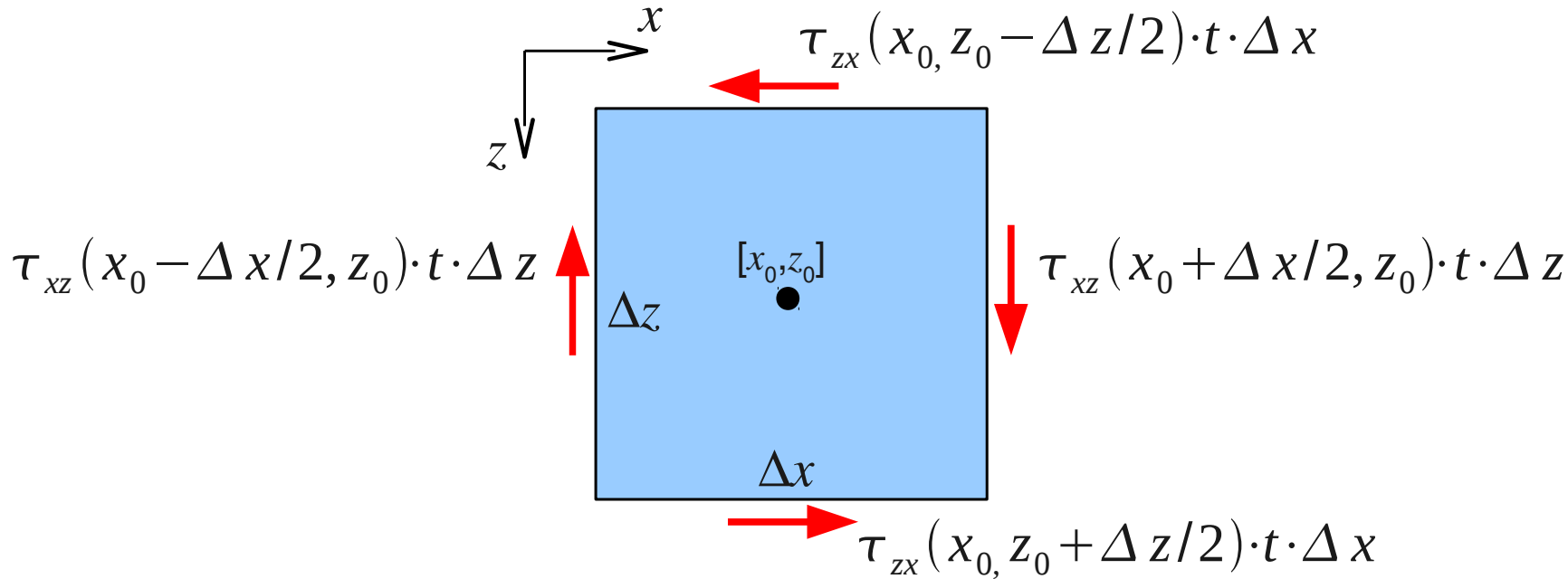
Analogické odvození ze součtové podmínky ve směru  $z$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \bar{Z} = 0$$



# Rovnováha elementárního dílku

- Momentová podmínka rovnováhy ke středu dílku



$$\circlearrowleft: \tau_{zx}(x_0, z_0 - \Delta z/2) \cdot t \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta z}{2} + \tau_{zx}(x_0, z_0 + \Delta z/2) \cdot t \cdot \Delta x \cdot \frac{\Delta z}{2} - \tau_{xz}(x_0 - \Delta x/2, z_0) \cdot t \cdot \Delta z \cdot \frac{\Delta x}{2} - \tau_{xz}(x_0 + \Delta x/2, z_0) \cdot t \cdot \Delta z \cdot \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\quad \quad \quad /: \frac{t \cdot \Delta x \cdot \Delta z}{2}$$

# Věta o vzájemnosti smykových napětí

$$\tau_{zx}(x_0, z_0 - \Delta z/2) + \tau_{zx}(x_0, z_0 + \Delta z/2) - \tau_{xz}(x_0 - \Delta x/2, z_0) - \tau_{xz}(x_0 + \Delta x/2, z_0) = 0$$

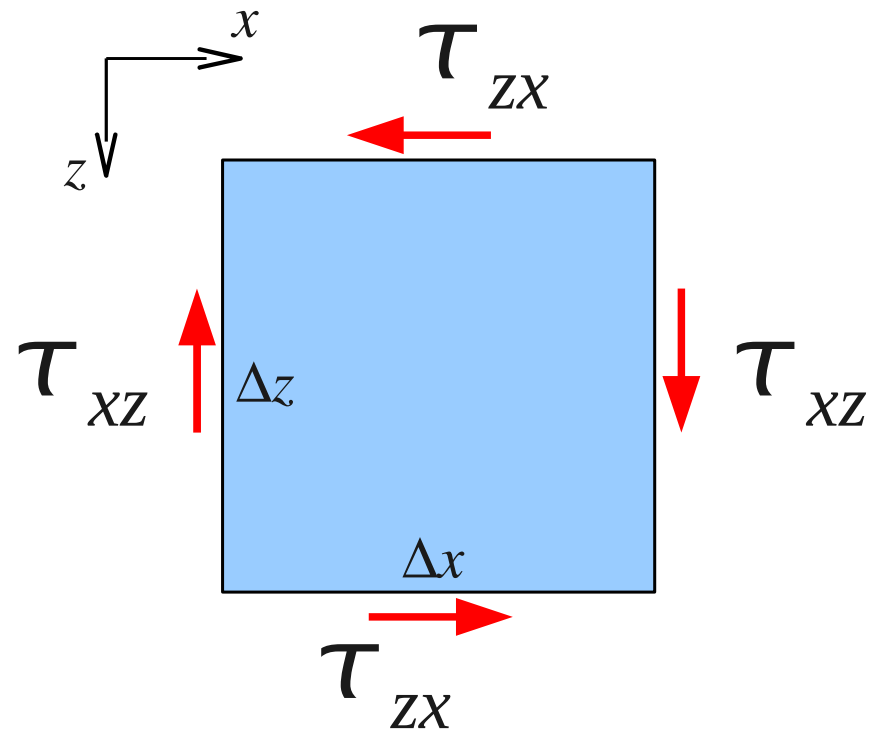
$$\tau_{zx}(x_0, z_0 - \Delta z/2) \approx \tau_{zx}(x_0, z_0) + \frac{\partial \tau_{zx}(x_0, z_0)}{\partial z} \cdot \frac{-\Delta z}{2} + \frac{\partial^2 \tau_{zx}(x_0, z_0)}{2! \partial z^2} \cdot \left(\frac{-\Delta z}{2}\right)^2 + \dots$$

$$\tau_{zx}(x_0, z_0) = \tau_{xz}(x_0, z_0)$$

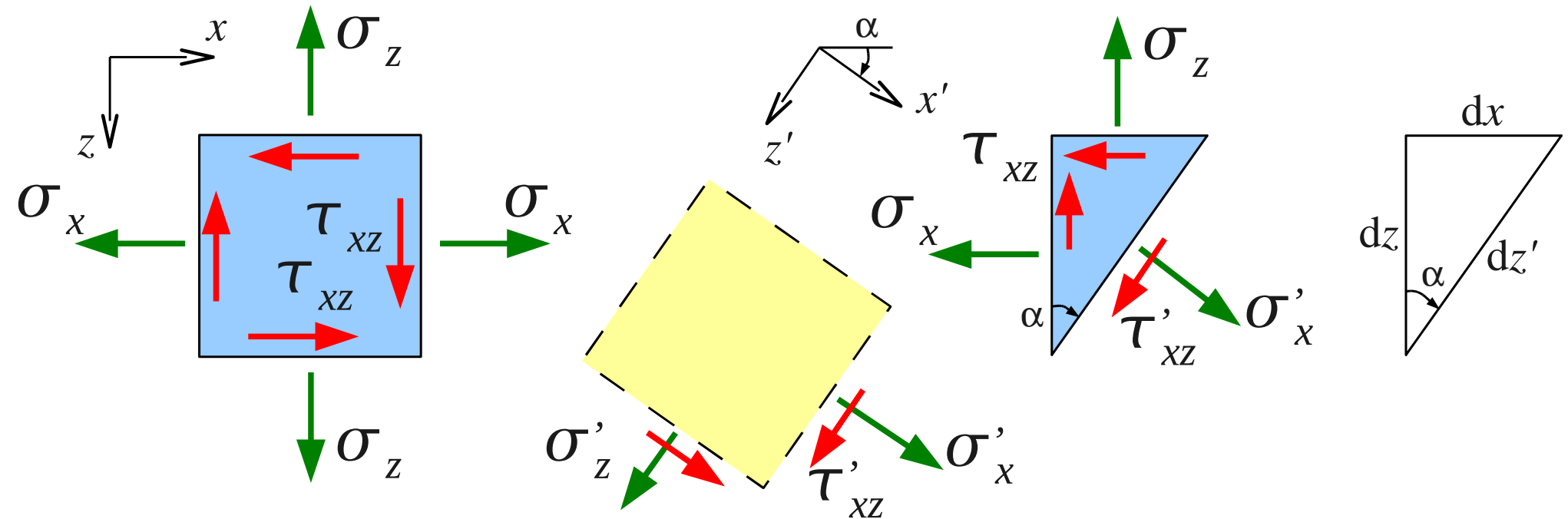
Věta o vzájemnosti smykových napětí

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

Analogickým odvozením platí věta o vzájemnosti smykových napětí i pro další komponenty ve víceosé napjatosti:  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ .



# Transformace složek napětí



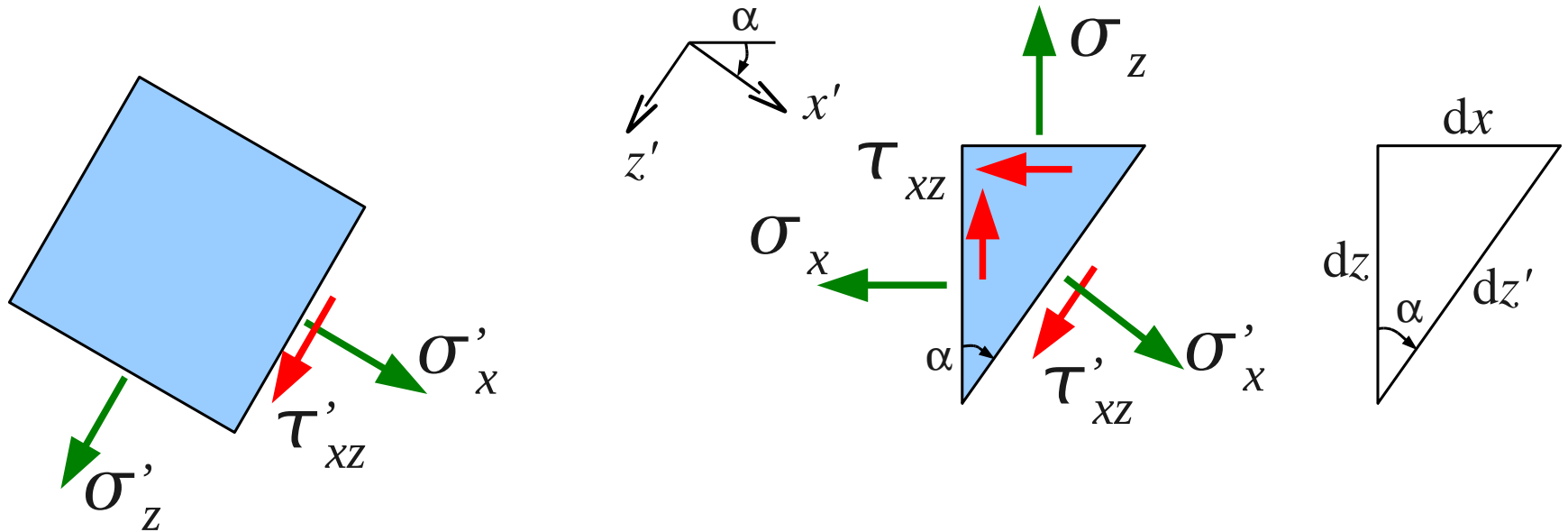
$$\rightarrow x': \sigma'_x dz' - (\sigma_x dz + \tau_{xz} dx) \cos \alpha - (\sigma_z dx + \tau_{xz} dz) \sin \alpha = 0$$

$$dz = dz' \cos \alpha, \quad dx = dz' \sin \alpha$$

$$\sigma'_x = \sigma_x \cos^2 \alpha + \tau_{xz} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha + \tau_{xz} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\sigma'_x = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha + \tau_{xz} \sin 2\alpha$$

# Transformace složek napětí



$$\swarrow z': \tau'_{xz} dz' + (\sigma_x dz + \tau_{xz} dx) \sin \alpha - (\sigma_z dx + \tau_{xz} dz) \cos \alpha = 0$$

$$dz = dz' \cos \alpha, \quad dx = dz' \sin \alpha$$

$$\tau'_{xz} = -\sigma_x \cos \alpha \sin \alpha - \tau_{xz} \sin^2 \alpha + \sigma_z \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xz} \cos^2 \alpha$$

$$\tau'_{xz} = -\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xz} \cos 2\alpha$$

Na rovnoběžném řezu s osou  $x'$  lze analogicky odvodit

$$\sigma'_z = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_z \cos^2 \alpha - \tau_{xz} \sin 2\alpha$$

# Transformace složek napětí - Mohrova kružnice

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sigma'_x = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha + \tau_{xz} \sin 2\alpha$$

$$\sigma'_x = \sigma_x \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) + \sigma_z \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha) + \tau_{xz} \sin 2\alpha$$

$$\sigma'_x = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_z) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_z) \cos 2\alpha + \tau_{xz} \sin 2\alpha$$

Extrémní hodnoty napětí  $\sigma'_x$  se nazývají hlavní napětí  $\sigma_{1,2}$  a odpovídají úhlům  $\alpha_{1,2}$ .

$$\frac{d\sigma'_x}{d\alpha} = 0 = -(\sigma_x - \sigma_z) \sin 2\alpha + 2\tau_{xz} \cos 2\alpha$$

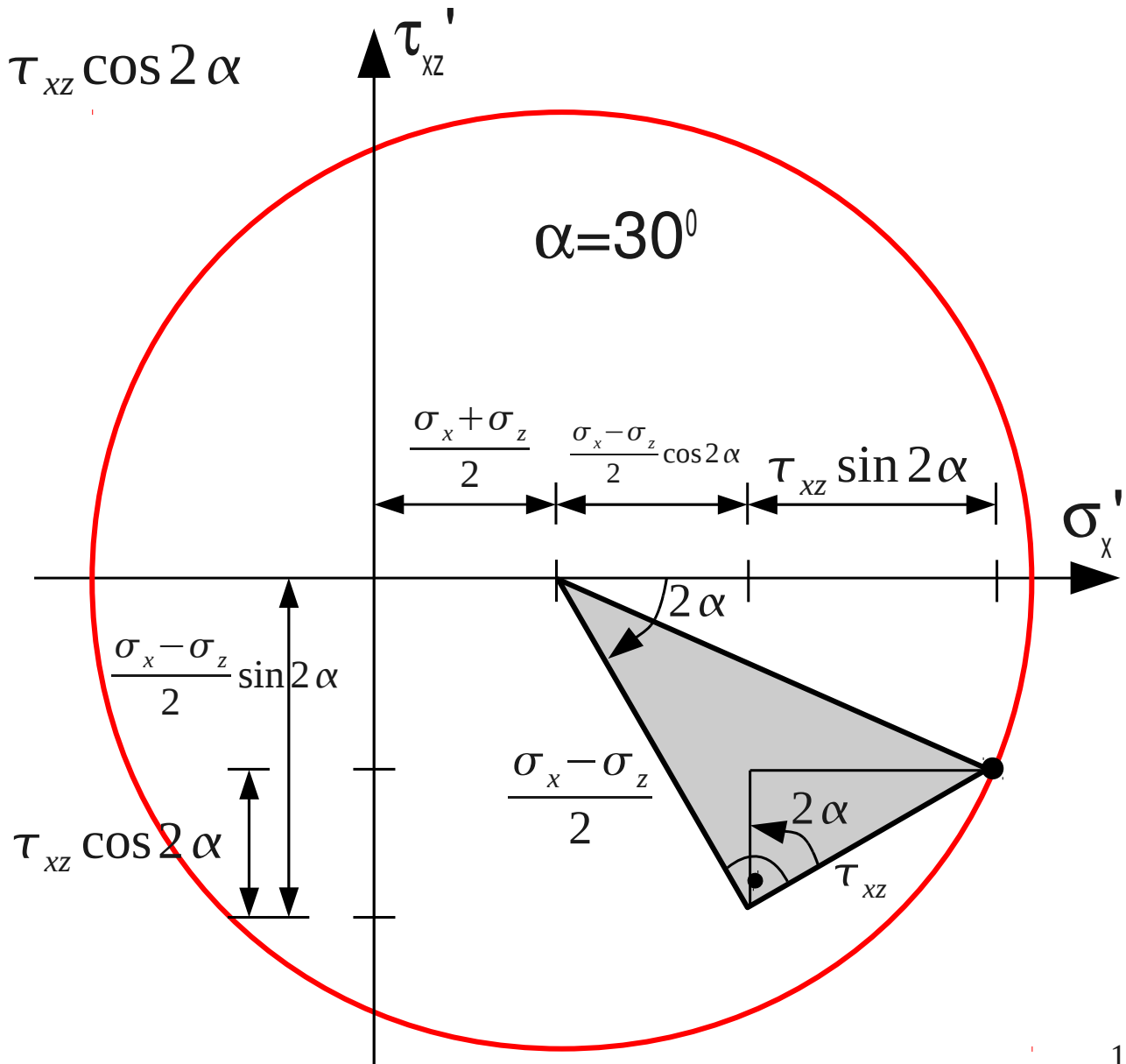
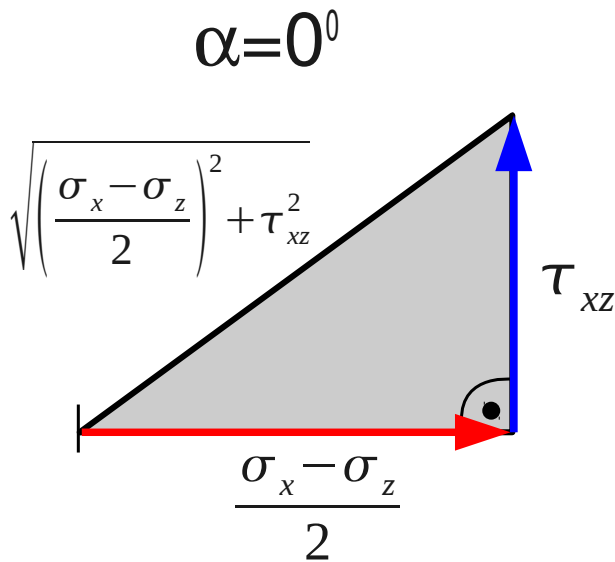
$$(\sigma_x - \sigma_z) \tan 2\alpha = 2\tau_{xz}$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z}, \quad \alpha_1 \perp \alpha_2$$

# Mohrova kružnice – normálová a smyková napětí

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xz} \sin 2\alpha$$

$$\tau'_{xz} = -\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xz} \cos 2\alpha$$



# Mohrova kružnice – extrémní normálová napětí

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

Hlavní napětí se obvykle seřadí dle velikosti

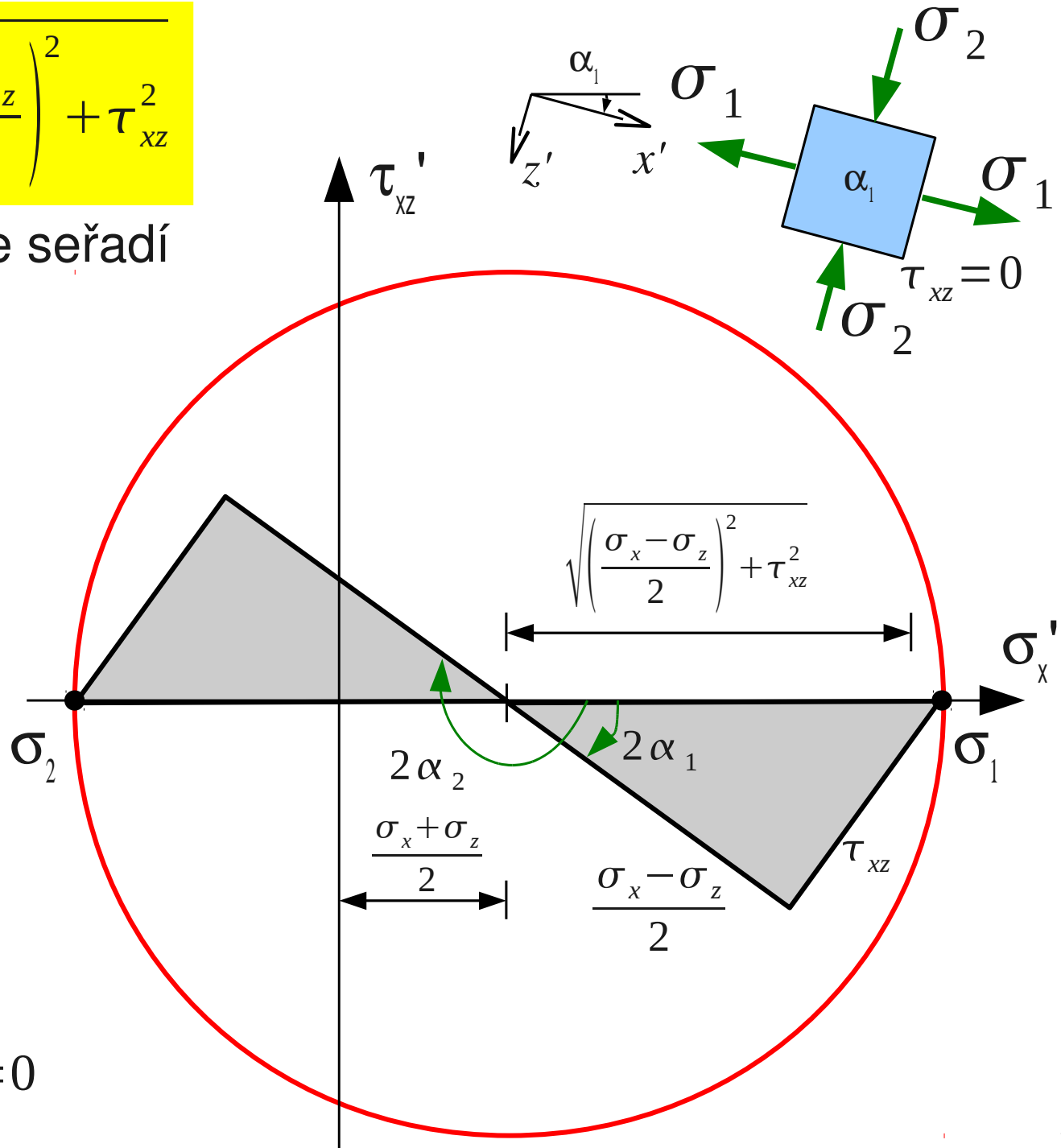
$$\sigma_1 \geq \sigma_2$$

Vektory hlavních napětí jsou na sebe kolmé (ortogonální).

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z}$$

$$\alpha_1 = \arctan \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xz}}$$

$$\alpha_2 = \arctan \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xz}}, \quad \tau'_{xz} = 0$$



# Mohrova kružnice – extrémní smyková napětí

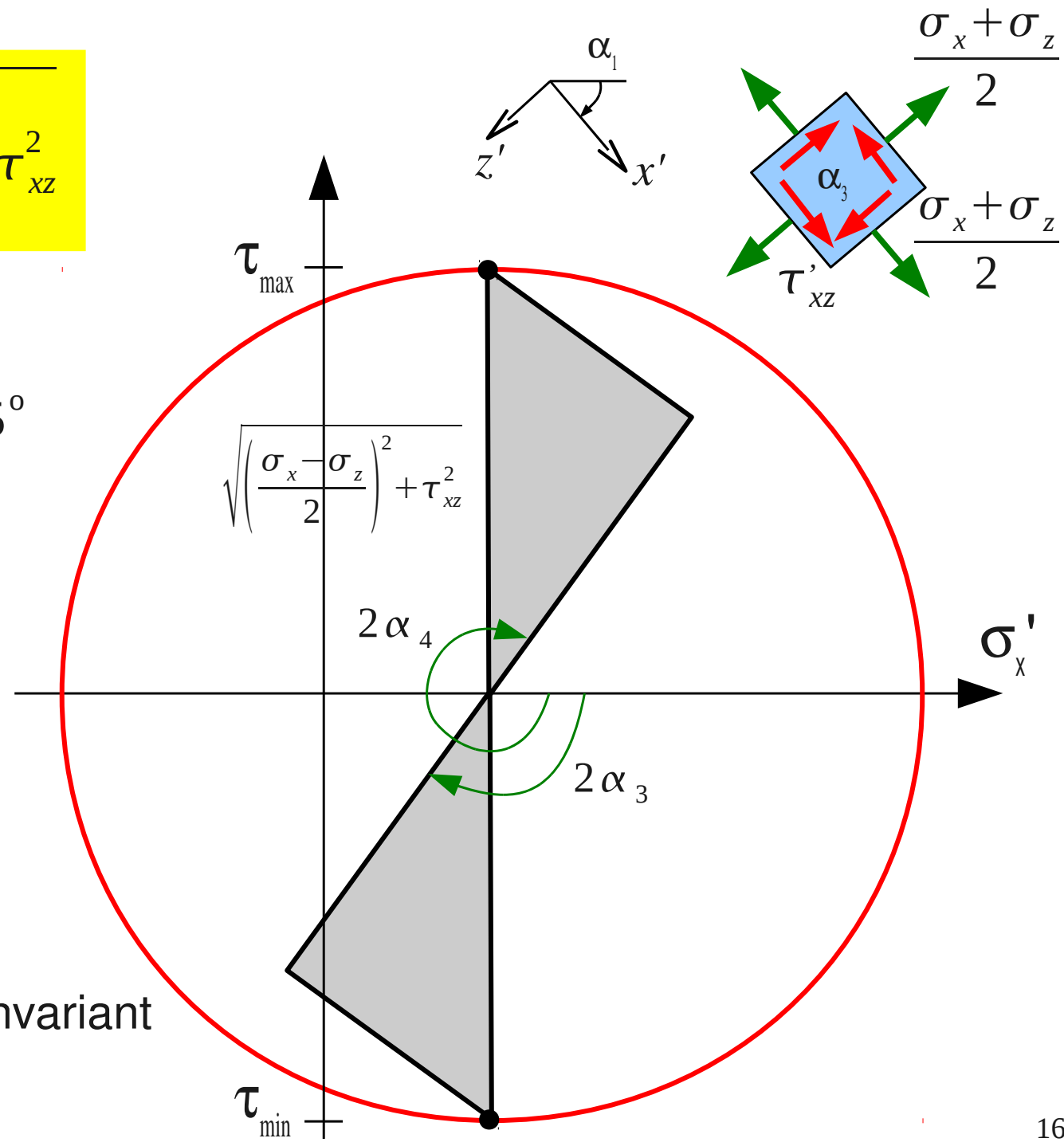
$$\tau_{max, min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

$$\alpha_{3,4} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} + 45^\circ$$

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

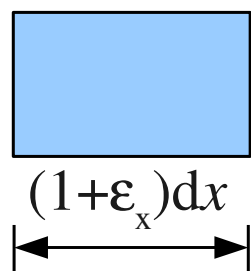
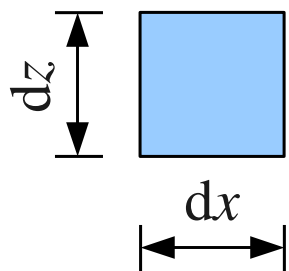
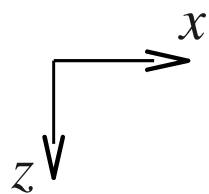
Ve všech případech platí invariant

$$\sigma_x + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2$$

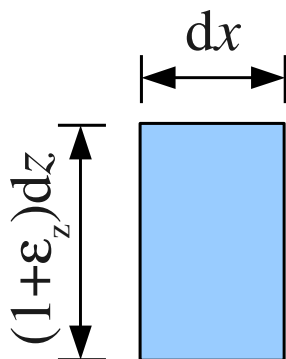
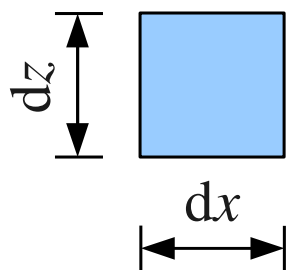




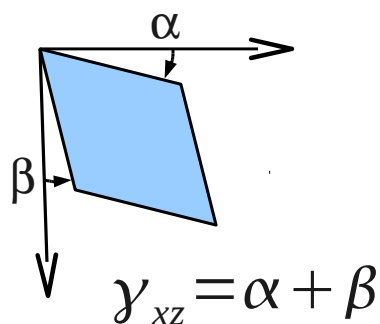
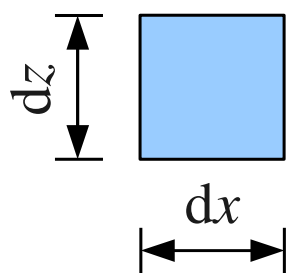
# Složky deformace



$\varepsilon_x$  ... normálová deformace ve směru  $x$  (změna objemu)

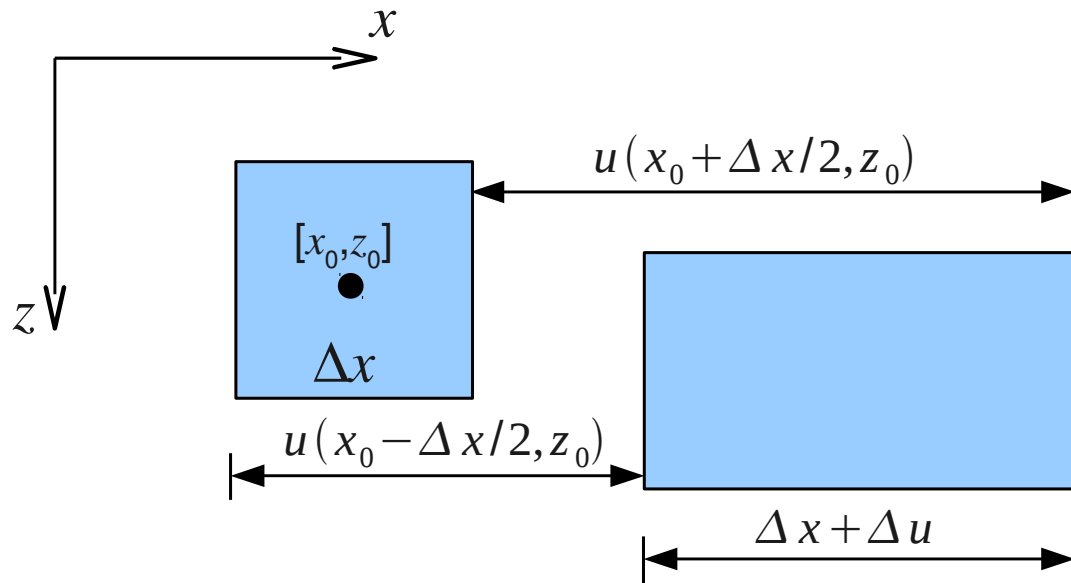


$\varepsilon_z$  ... normálová deformace ve směru  $z$  (změna objemu)



$\gamma_{xz}$  ... zkosení v rovině  $xz$ , smyková deformace, (změna úhlu, stejný objem)

# Geometrické rovnice - protažení



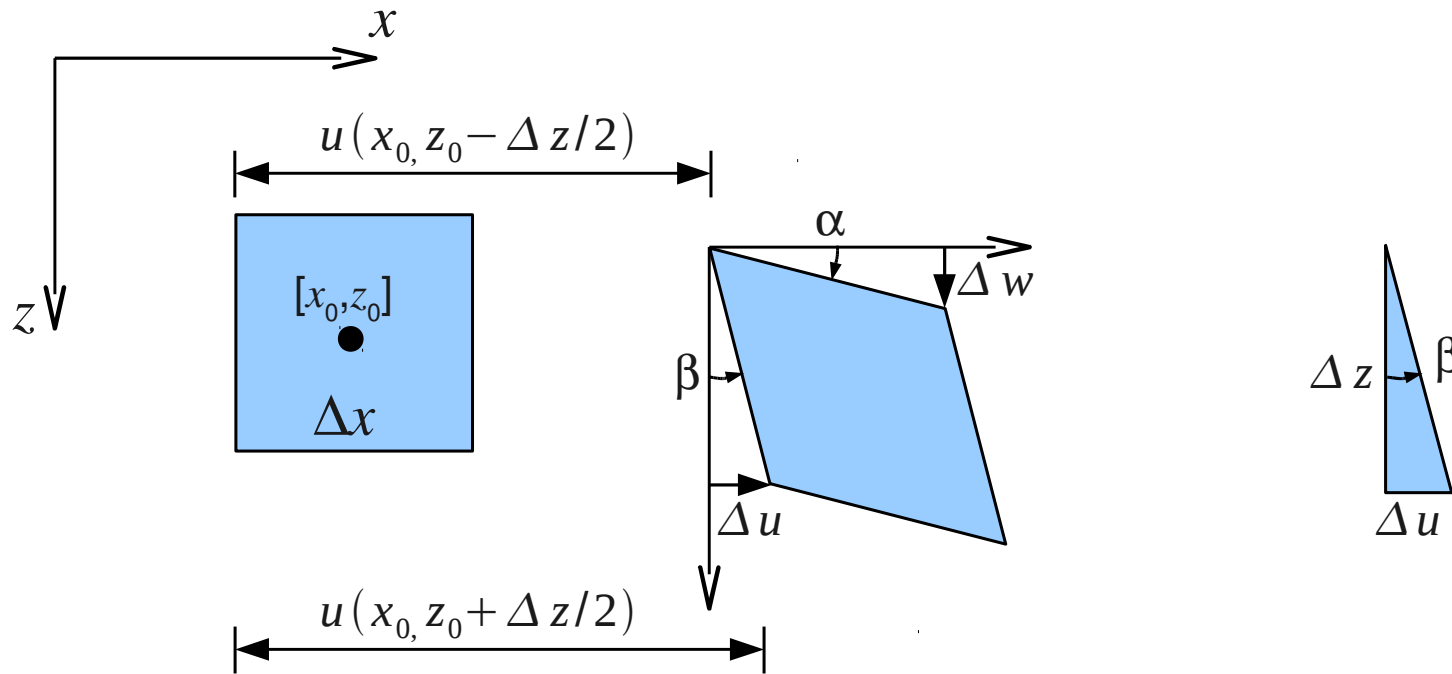
$$\varepsilon_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x/2, z_0) - u(x_0 - \Delta x/2, z_0)}{\Delta x}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Analogicky lze odvodit

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

# Geometrické rovnice - zkosení



$$\tan \beta = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{u(x_0, z_0 + \Delta z/2) - u(x_0, z_0 - \Delta z/2)}{\Delta z}, \beta \ll 1, \tan \beta \approx \beta$$

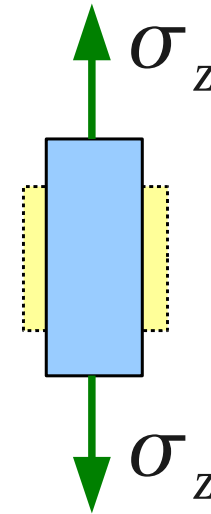
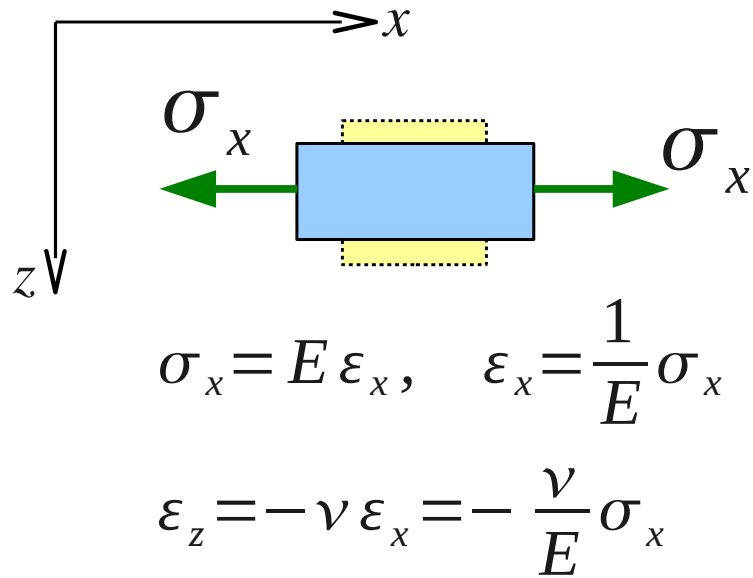
$$\beta = \frac{\partial u(x_0, z_0)}{\partial z}, \text{ analogicky } \alpha = \frac{\partial w(x_0, z_0)}{\partial x}, \gamma_{xz} = \alpha + \beta$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Celkem máme 3 geometrické rovnice pro rovinnou úlohu.

# Materiálové rovnice pro lineární isotropní materiál

- Jednoosé namáhání ve směru  $x$  a  $z$



$$\sigma_z = E \varepsilon_z, \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z$$
$$\varepsilon_x = -\nu \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_z$$

- Dvojosé namáhání v rovině  $xz$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_z = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \sigma_z - \frac{\nu}{E} \sigma_x = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu \sigma_x)$$

# Materiálové rovnice pro lineární isotropní materiál

- Smykové namáhání

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \dots \text{modul pružnosti ve smyku}$$

- Maticové vyjádření pro rovinnou napjatost

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}$$

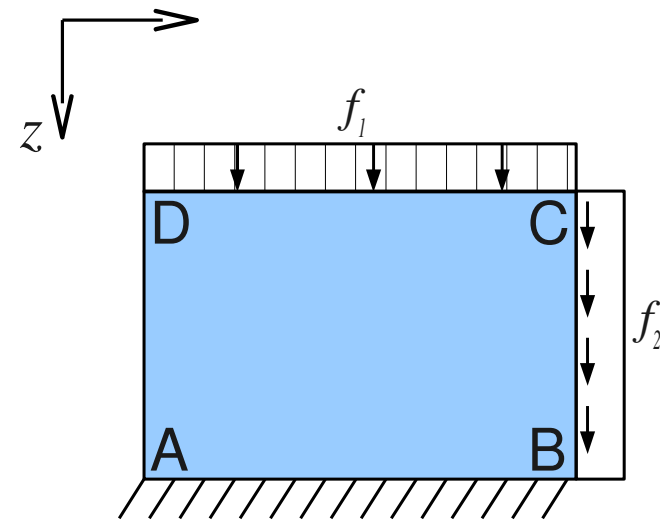
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$$

Zobecněný Hookeův zákon

**C** ... matice poddajnosti elastického materiálu

**D** ... matice tuhosti elastického materiálu

# Příklad - určete posuny a napětí na okrajích stěny



AB:  $u=w=0$ ,  $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$  ... obecné

BC:  $u, w$  ... obecné

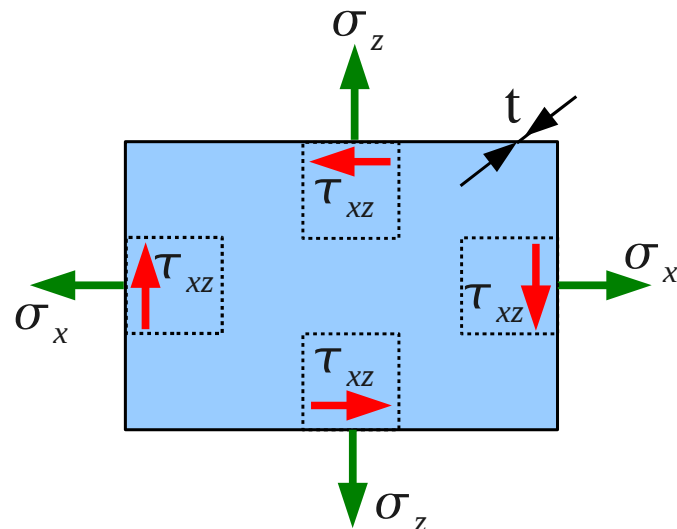
$\vec{x}$ :  $\sigma_x = 0$

$\downarrow z$ :  $\tau_{xz} = f_2$ ,  $\sigma_z$  ... obecné

CD:  $u, w$  ... obecné

$\vec{x}$ :  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\sigma_x$  ... obecné

$\downarrow z$ :  $\sigma_z = -f_1$



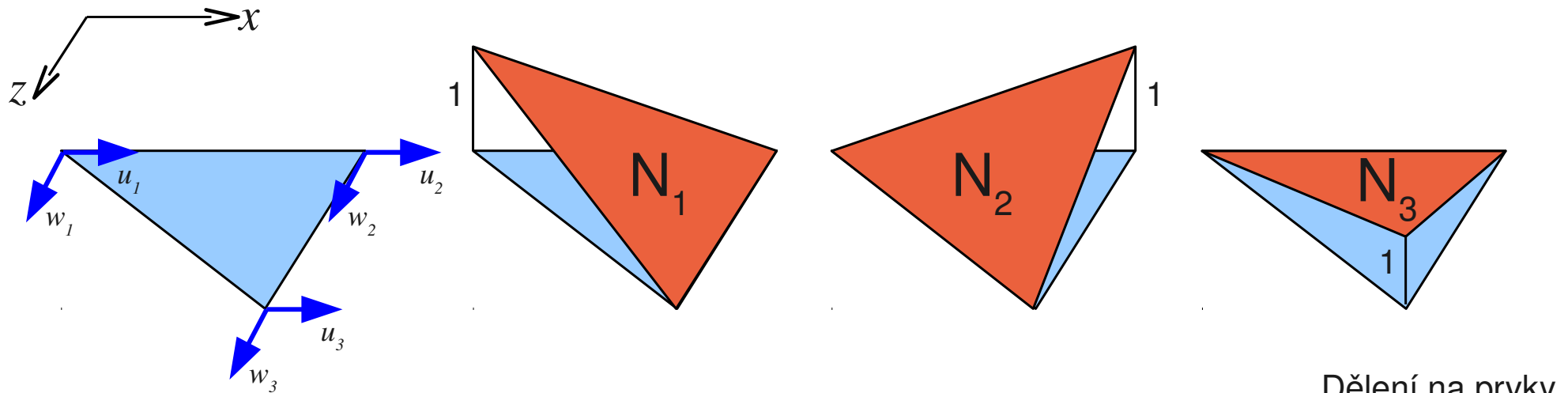
DA:  $u, w$  ... obecné

$\vec{x}$ :  $\sigma_x = 0$

$\downarrow z$ :  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\sigma_z$  ... obecné

# Řešení rovinné napjatosti pomocí metody konečných prvků

- Výpočet stěn pomocí MKP publikován v roce 1960<sup>1</sup>
- Neznámé – pole  $u, w$ , které se aproximují po prvcích
- Nejjednodušší prvek (CST) obsahuje lineární aproximace



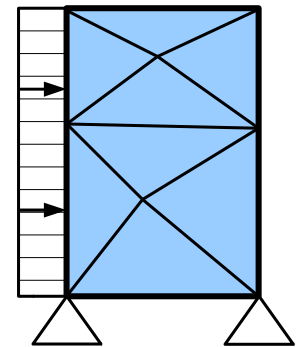
$$u(x, z) \approx N_1(x, z)u_1 + N_2(x, z)u_2 + N_3(x, z)u_3$$

$$w(x, z) \approx N_1(x, z)w_1 + N_2(x, z)w_2 + N_3(x, z)w_3$$

$$\mathbf{r} = \{u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3\}^T$$

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}$$

Dělení na prvky



# Řešení rovinné napjatosti pomocí metody konečných prvků

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} \approx \frac{\partial N_1}{\partial x} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} u_3 \quad \dots \text{Aproximace deformací}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w(x, z)}{\partial z} \approx \frac{\partial N_1}{\partial z} w_1 + \frac{\partial N_2}{\partial z} w_2 + \frac{\partial N_3}{\partial z} w_3$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u(x, z)}{\partial z} + \frac{\partial w(x, z)}{\partial x} \approx \frac{\partial N_1}{\partial z} u_1 + \frac{\partial N_2}{\partial z} u_2 + \frac{\partial N_3}{\partial z} u_3 + \frac{\partial N_1}{\partial x} w_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} w_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} w_3$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \frac{\partial N_3}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{r} \quad \dots \text{Maticově}$$



# Metoda konečných prvků – princip virtuálních posunů

$\delta W_{int} = \delta W_{ext}$  ... Princip virtuálních prací (zde Lagrangeův princip virtuálních posunů), „obecný princip rovnováhy“

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega} \delta \varepsilon_x \sigma_x + \delta \varepsilon_z \sigma_z + \delta \gamma_{xz} \tau_{xz} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega$$
 ... Virtuální práce vnitřních sil

$$\delta W_{ext} = \int_{\Gamma} \delta u f_x + \delta w f_z d\Gamma = \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\Gamma$$
 ... Virtuální práce spojitého zatížení na hranici, další zatížení neuvažováno

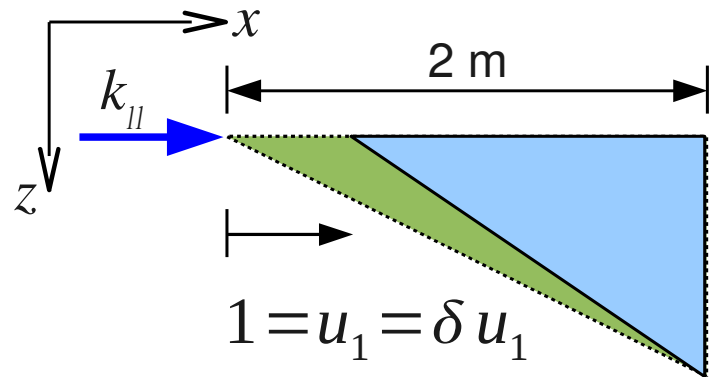
$\mathbf{u} \approx \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}$ ,  $\delta \mathbf{u} \approx \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{r}$  ... Aproximace pole posunů, napětí a deformací  
 $\boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}$ ,  $\delta \boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{B} \delta \mathbf{r}$  pro skutečný a virtuální stav  
 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \approx \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{r}$

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{r}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{r} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta \mathbf{r}^T \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Gamma$$
 Virtuální práce platí pro libovolné virtuální posunutí. Řešení vede na soustavu algebraických rovnic.  

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \mathbf{r} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Gamma$$
  $\mathbf{K}$  ... matice tuhosti konstrukce  
 $\mathbf{K} \mathbf{r} = \mathbf{f}$   $\mathbf{f}$  ... vektor zatížení

# Metoda konečných prvků – příklad

- Určete velikost prvku matice tuhosti  $k_{11}$



$E=9.1 \text{ GPa}$ ,  $\nu=0.3$ , tloušťka  $0.1 \text{ m}$



$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{k}_{11}$$

$$N_1 = 1 - 0.5x$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = -0.5, \quad \frac{\partial N_1}{\partial z} = 0$$

$$\varepsilon_x = \delta \varepsilon_x = -0.5, \quad \varepsilon_z = \gamma_{xz} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \frac{9100}{1 - 0.3^2} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

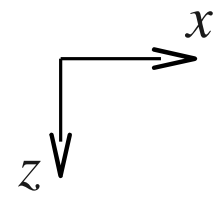
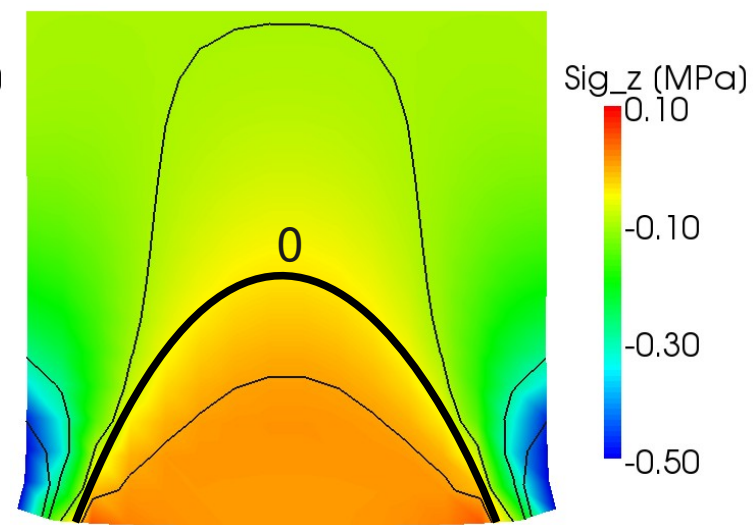
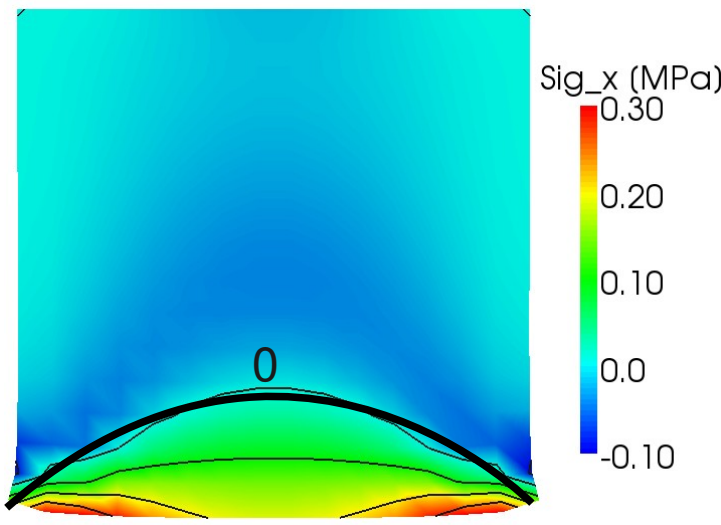
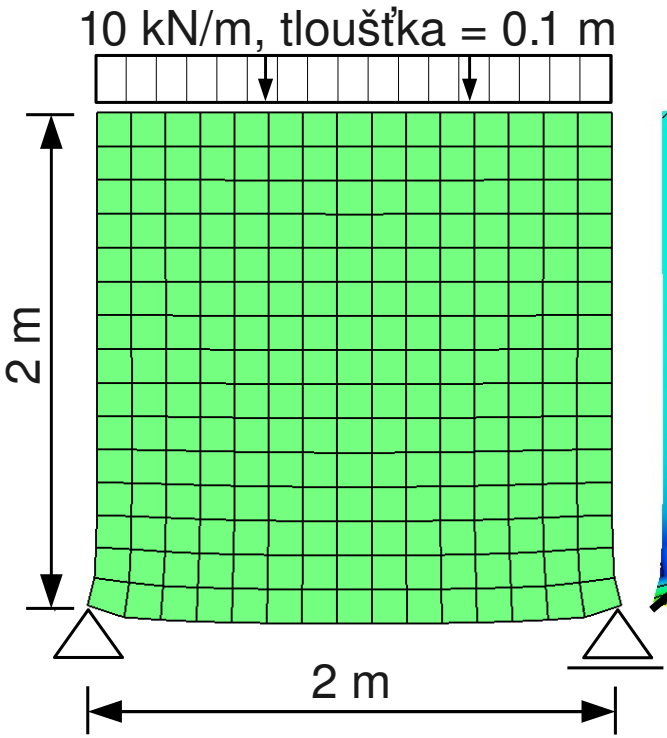
$$\sigma_x = -5000 \text{ MPa}, \quad \sigma_z = -1500 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = 0$$

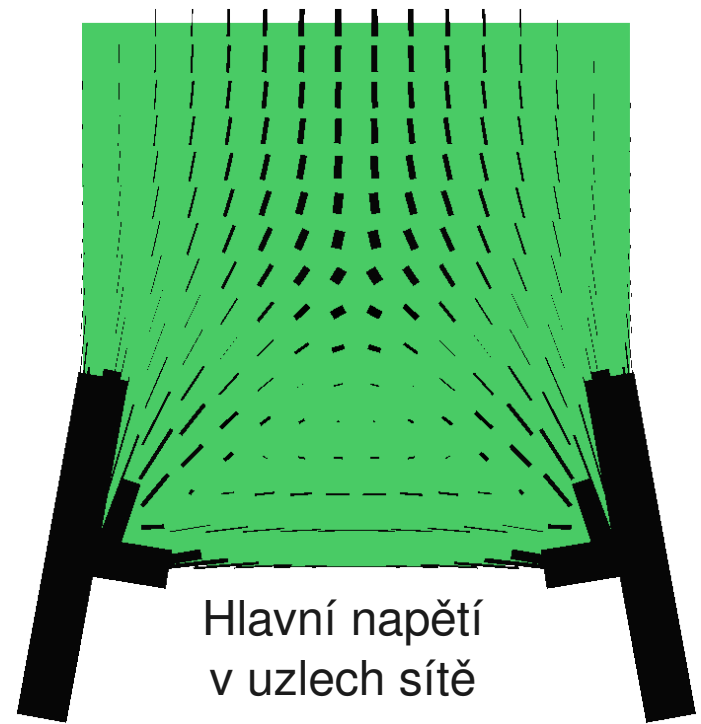
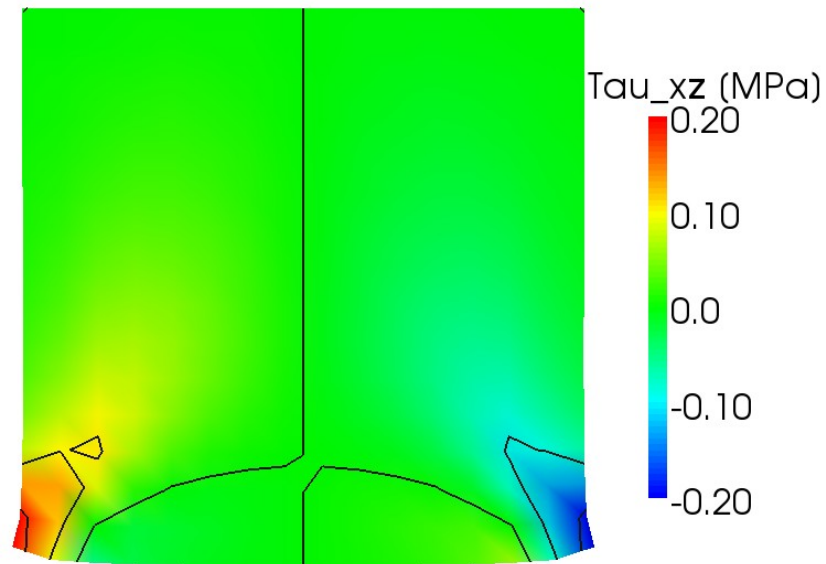
Konstantní  $\varepsilon_x$  a  $\sigma_x$  po prvku.

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_x \sigma_x d\Omega = 1 \cdot k_{11}$$

$$k_{11} = 0.1 \int_A -0.5 \cdot (-5000) dA = 250 \text{ MN/m}$$



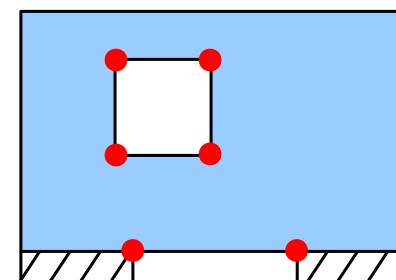
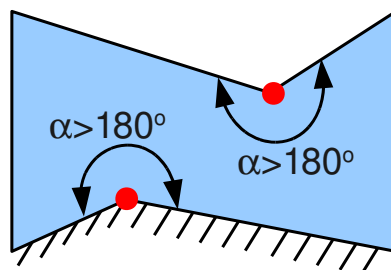
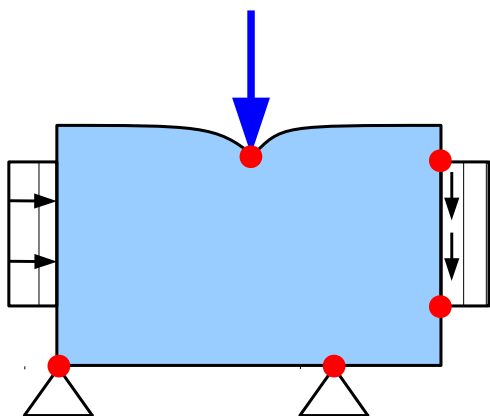
**OOFCM.ORG**

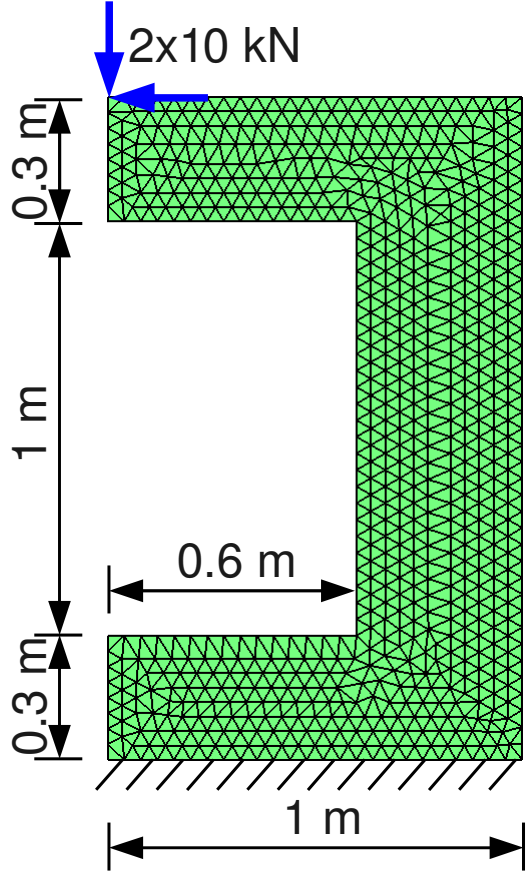


Deformace zvětšeny 3000x, E=30 GPa, ν=0.3.

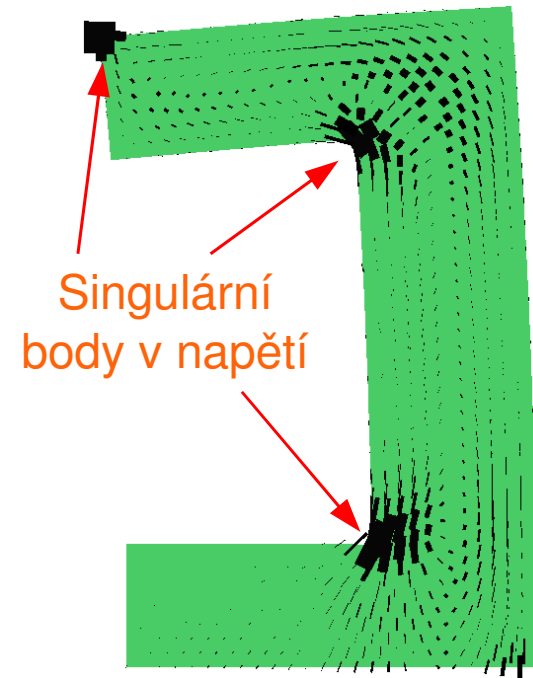
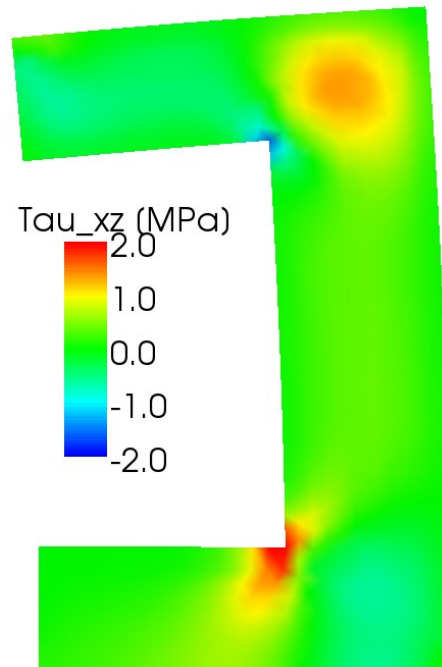
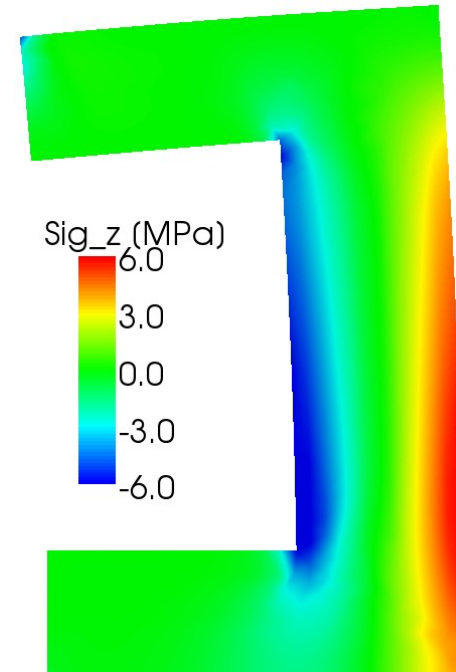
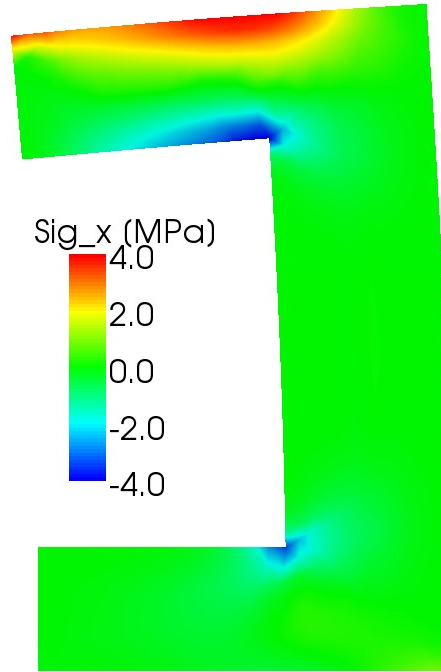
# Singulární body v napětí – rovinná napjatost

- V singulárních bodech je nekonečně velké napětí podle teorie elasticity.
- Při výpočtu metodou konečných prvků a při použití elastického materiálového modelu dochází k nárůstu napětí při zjemňování sítě – napětí diverguje.
- Napětí v singulárním bodě nelze přímo použít pro dimenzování. V reálném materiálu se díky plasticitě napětí „otupí“ a redistribuuje se po okolí. Např. v železobetonu se okolí singulárních bodů více vyztuží.





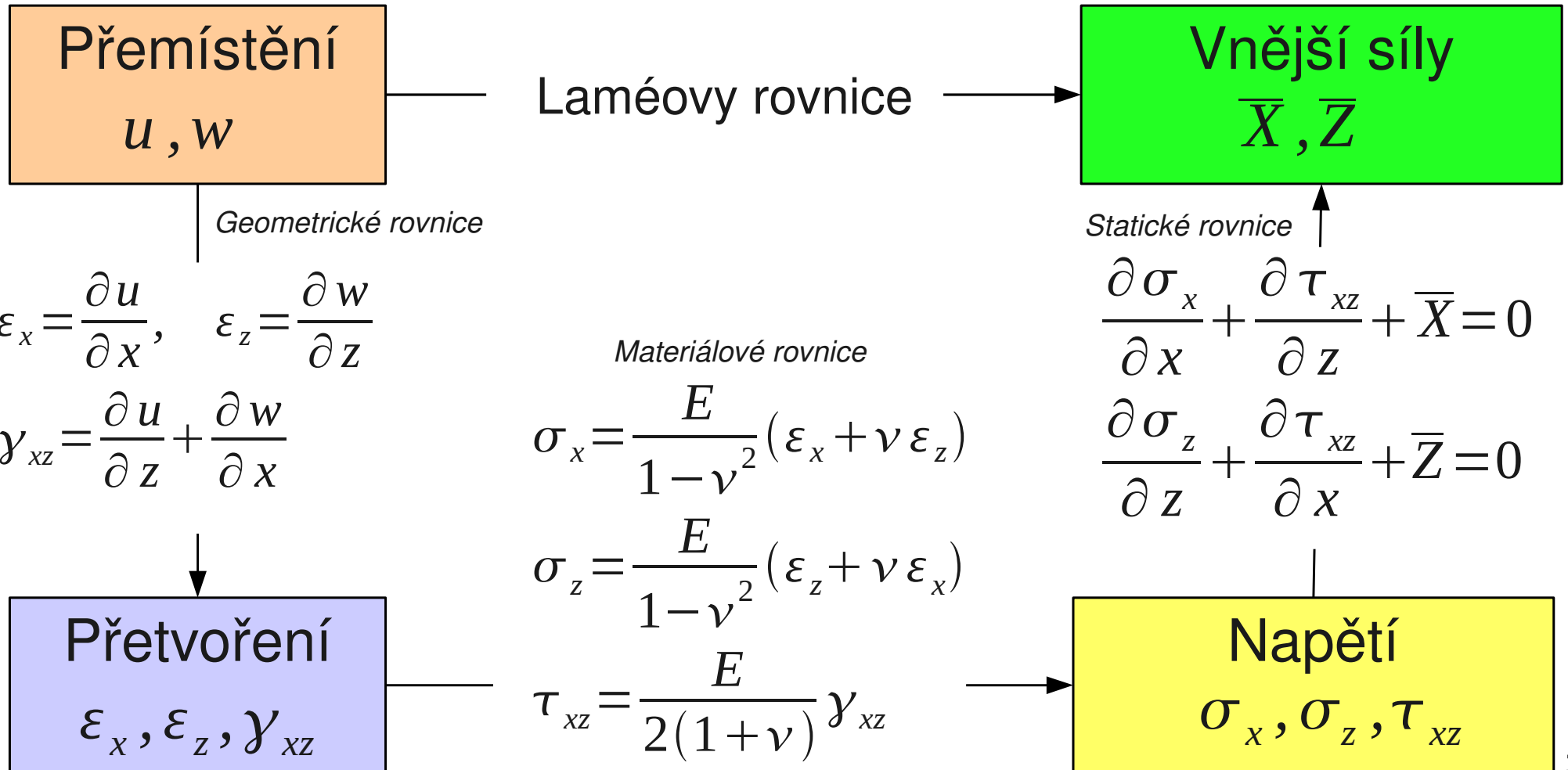
Tloušťka 0.1 m,  
 $E=30 \text{ GPa}$ ,  $\nu=0.3$



# Základní rovnice pro rovinnou napjatost

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \bar{X} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{E}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \bar{Z} = 0$$



# Otázky

1. Popište rozdíl mezi rovinnou napjatostí a rovinnou deformací. Jaké složky napětí a deformace jsou nulové?
2. Nakreslete Mohrovu kružnici pro případ tzv. ryzího smyku, kdy  $\sigma_x = \sigma_z = 0$  a  $\tau_{xz} \neq 0$ . Najděte extrémní hodnoty normálových a smykových napětí a úhly při těchto napětích.
3. Na taženém prutu, který je modelován jako stěna, ukažte vliv Poissonova čísla na velikosti příčných posunů.
4. Z jakých principů vychází metoda konečných prvků? Které podmínky musí splňovat virtuální pole posunutí? Které neznámé hledáme? Jak se sestaví matice tuhosti prvku? Co znamenají její jednotlivé členy?
5. Co jsou singulární body při řešení rovinné napjatosti? Uveďte příklady pro reálné nosné stěny.
6. Nakreslete statické a kinematické okrajové podmínky na stěně. Které napětí a deformace jsou nulové na volném okraji stěny?
7. Definujte následující konstanty/proměnné, popište jejich význam, fyzikální smysl a v kterých rovnicích vystupují:  $u$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\gamma_{xz}$ ,  $v$ ,  $E$ ,  $G$ ,  $\bar{X}$ .