Přednáška 08

Obecná trojosá napjatost

Napětí $\rightarrow$ statické rovnice

Deformace $\rightarrow$ geometrické rovnice

Zobecněný Hookeův zákon

Objemový modul pružnosti

Oedometrický modul pružnosti

Hlavní napětí, hlavní deformace

Střední hydrostatické napětí

Objemová deformace

Rozklad napětí a deformace

Příklady

Napětí

- V každém bodě kontinua existuje napětí. Jeho 9 složek v maticovém tvaru se nazývá **tensor napětí**:

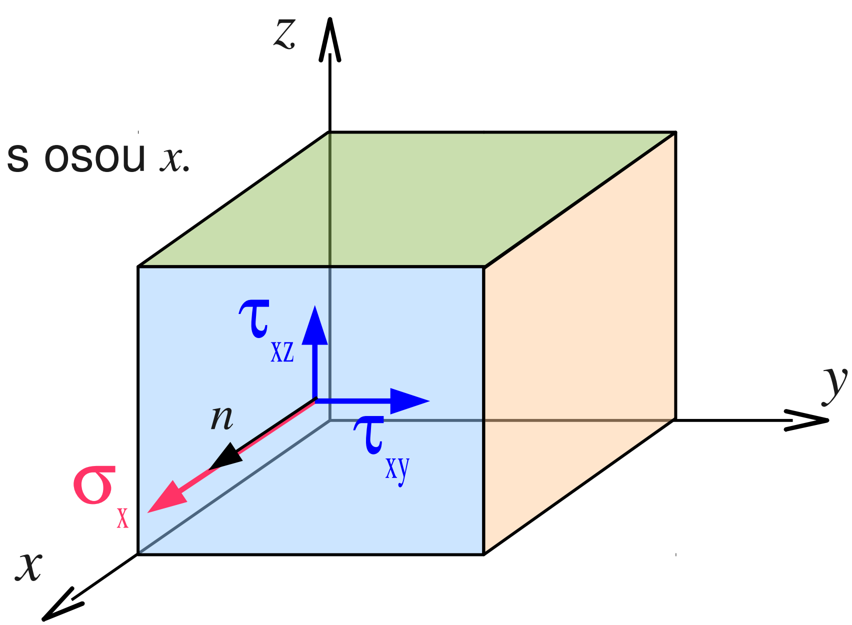
$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Tensor napětí je tensor 2. řádu, každá jeho složka může nabývat libovolné hodnoty. Při rotaci tensoru napětí platí transformační vztah, v maticovém zápisu $\sigma' = A\sigma A^T$. Matice A je ortogonální, neboť $A^T = A^{-1}$.

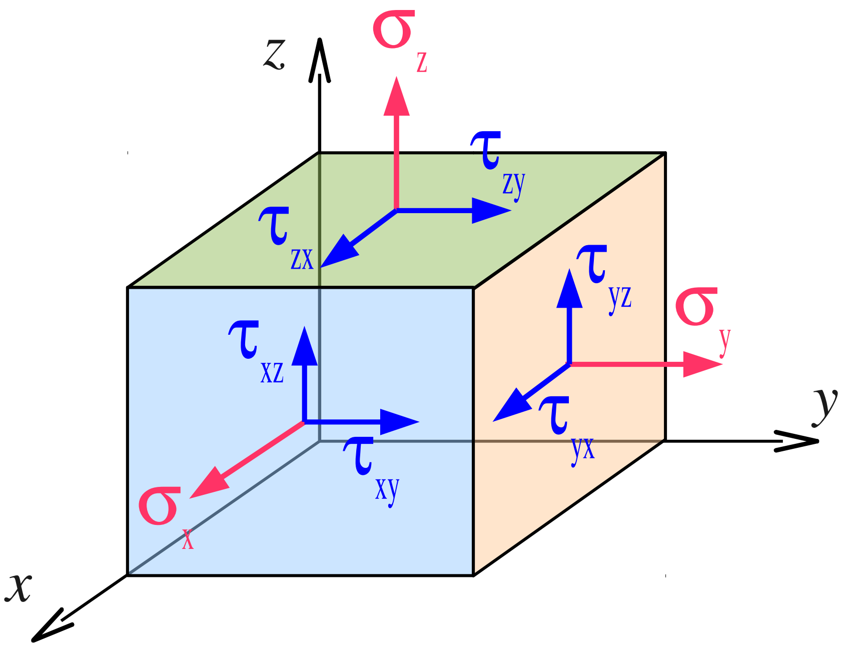
- Pro znázornění napětí definujeme normálu k libovolné ploše. Na každé normále existují 3 složky napětí, tzv. **vektor napětí**:

Vektor napětí pro normálu n, která je souhlasná s osou x.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}$$



Složky napětí na elementárním kvádru



Někdy se pracuje s polem napětí ve tvaru, složky mohou být proházené

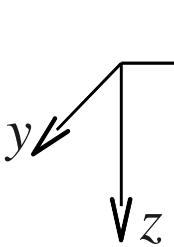
$\sigma_x \qquad \tau_{xz}$

Směr normály k ploše

Směr osy, se kterou je napětí rovnoběžné

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

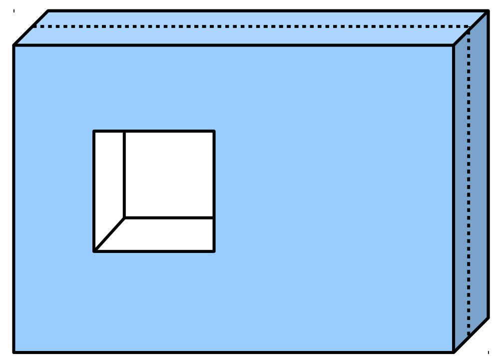
Tensor napětí při zvláštních případech napjatosti



Prut tah/tlak

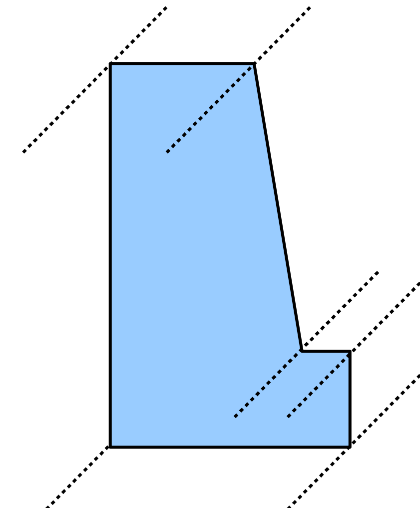
$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rovinná napjatost



$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Rovinná deformace



$$\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Obecný tvar $\underline{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$

Příklad – transformace napětí v rovinné napjatosti

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{A}^T$$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_x & 0 & \tau'_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau'_{zx} & 0 & \sigma'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

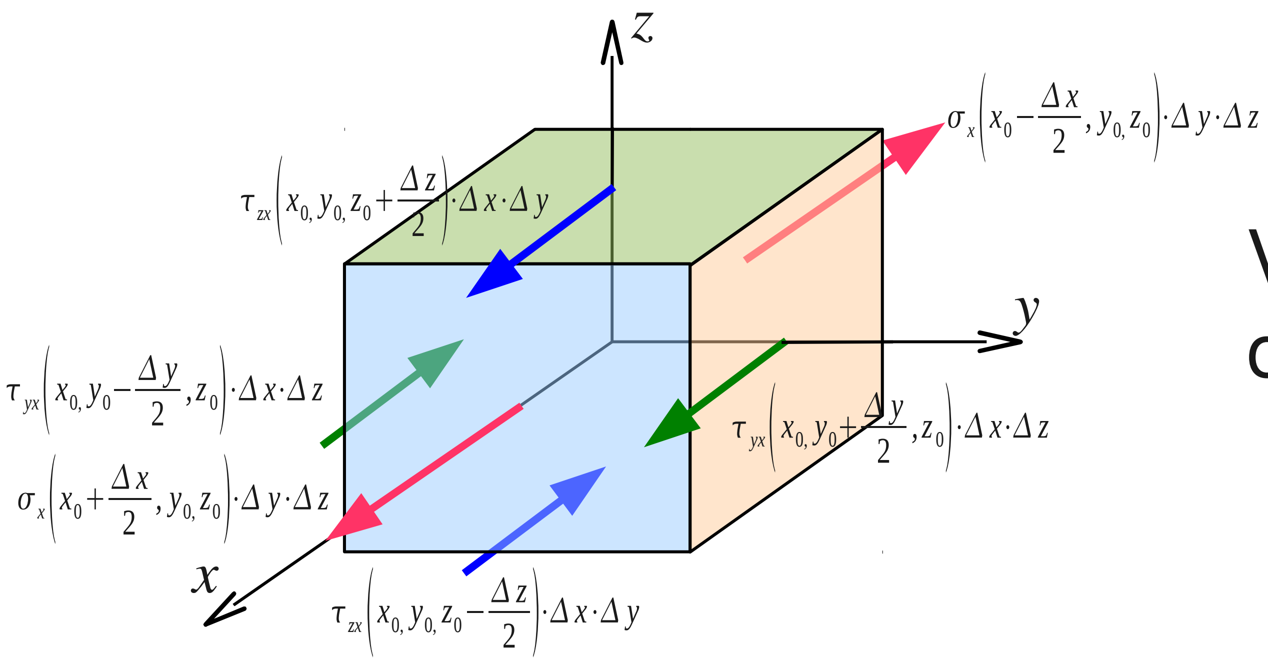
$$s = \sin\alpha, c = \cos\alpha$$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_x & 0 & \tau'_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau'_{zx} & 0 & \sigma'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_x c + \tau_{xz} s & 0 & -\sigma_x s + \tau_{xz} c \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{zx} c + \sigma_z s & 0 & -\tau_{zx} s + \sigma_z c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_x & 0 & \tau'_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau'_{zx} & 0 & \sigma'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\sigma_x c + \tau_{xz} s) + s(\tau_{zx} c + \sigma_z s) & 0 & c(-\sigma_x s + \tau_{xz} c) + s(-\tau_{zx} s + \sigma_z c) \\ 0 & 0 & 0 \\ -s(\sigma_x c + \tau_{xz} s) + c(\tau_{zx} c + \sigma_z s) & 0 & -s(-\sigma_x s + \tau_{xz} c) + c(-\tau_{zx} s + \sigma_z c) \end{bmatrix}$$

Další úprava vede na vztahy odvozené v přednášce o rovinné napjatosti.

Rovnováha na elementárním kvádru – směr x



V těžišti působí dále objemová síla

$$\overline{X}\left(x_{0,} y_{0,} z_0\right)\cdot\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z$$

Podmínka rovnováhy $\swarrow$:

$$\sigma_x\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}, y_{0,} z_0\right)\cdot\Delta y\cdot\Delta z-\sigma_x\left(x_0-\frac{\Delta x}{2}, y_{0,} z_0\right)\cdot\Delta y\cdot\Delta z+$$

$$\tau_{yx}\left(x_{0,} y_0+\frac{\Delta y}{2}, z_0\right)\cdot\Delta x\cdot\Delta z-\tau_{yx}\left(x_{0,} y_0-\frac{\Delta y}{2}, z_0\right)\cdot\Delta x\cdot\Delta z+ \qquad \Big/ :(\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z)$$

$$\tau_{zx}\left(x_{0,} y_{0,} z_0+\frac{\Delta z}{2}\right)\cdot\Delta x\cdot\Delta y-\tau_{zx}\left(x_{0,} y_{0,} z_0-\frac{\Delta z}{2}\right)\cdot\Delta x\cdot\Delta y+\overline{X}\left(x_{0,} y_{0,} z_0\right)\cdot\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z=0$$

Tři statické (Cauchyho) rovnice rovnováhy pro 3D

$$\frac{\sigma_x\left(x_0+\dfrac{\Delta x}{2}, y_{0,} z_0\right)-\sigma_x\left(x_0-\dfrac{\Delta x}{2}, y_{0,} z_0\right)}{\Delta x}+\frac{\tau_{yx}\left(x_{0,} y_0+\dfrac{\Delta y}{2}, z_0\right)-\tau_{yx}\left(x_{0,} y_0-\dfrac{\Delta y}{2}, z_0\right)}{\Delta y}+$$

$$\frac{\tau_{zx}\left(x_{0,} y_{0,} z_0+\dfrac{\Delta z}{2}\right)-\tau_{zx}\left(x_{0,} y_{0,} z_0-\dfrac{\Delta z}{2}\right)}{\Delta z}+\overline{X}\left(x_{0,} y_{0,} z_0\right)=0$$

$$\sigma_x\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}, y_{0,} z_0\right)\approx\sigma_x\left(x_{0,} y_{0,} z_0\right)+\frac{\partial\sigma_x\left(x_{0,} y_{0,} z_0\right)}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{2}+\cancel{\frac{\partial^2\sigma_x\left(x_{0,} y_{0,} z_0\right)}{2!\partial x^2}\cdot\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2}+\ldots$$

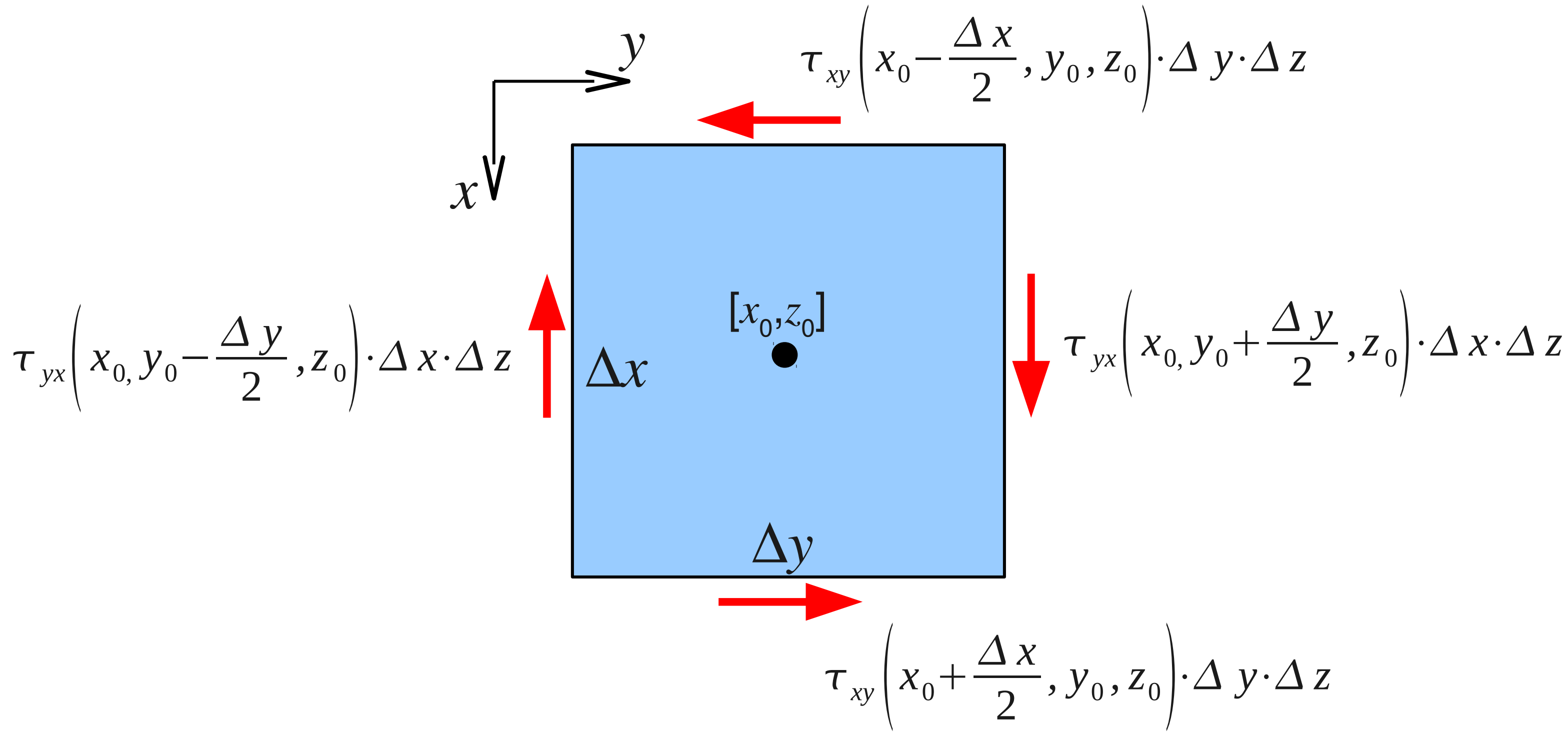
$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+\overline{X}=0$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\overline{Y}=0\\&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\overline{Z}=0\end{aligned}\right\}$$

Rovnice odvozeny z analogických součtových podmínek rovnováhy ve směrech y,z.

Rovnováha na elementárním kvádru – moment

- Momentová podmínka rovnováhy okolo osy z



$$\circlearrowleft:\ \tau_{xy}\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)\cdot\Delta y\cdot\Delta z\cdot\frac{\Delta x}{2}+\tau_{xy}\left(x_0-\frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)\cdot\Delta y\cdot\Delta z\cdot\frac{\Delta x}{2}-$$

$$\tau_{yx}\left(x_{0,} y_0+\frac{\Delta y}{2}, z_0\right)\cdot\Delta x\cdot\Delta z\cdot\frac{\Delta y}{2}-\tau_{yx}\left(x_{0,} y_0-\frac{\Delta y}{2}, z_0\right)\cdot\Delta x\cdot\Delta z\cdot\frac{\Delta y}{2}=0$$

$$\Big/ : \frac{\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z}{2}$$

Věty o vzájemnosti smykových napětí

$$\tau_{xy}\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)+\tau_{xy}\left(x_0-\frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0\right)-$$

$$\tau_{yx}\left(x_{0,} y_0+\frac{\Delta y}{2}, z_0\right)-\tau_{yx}\left(x_{0,} y_0-\frac{\Delta y}{2}, z_0\right)=0$$

$$\tau_{xy}\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}, y_{0,} z_0\right)\approx\tau_{xy}\left(x_{0,} y_{0,} z_0\right)+\frac{\partial \tau_{xy}\left(x_{0,} y_{0,} z_0\right)}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{2}+\cancel{\frac{\partial^2 \tau_{xy}\left(x_{0,} y_{0,} z_0\right)}{2!\partial x^2}\cdot\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2}+\ldots$$

Věty o vzájemnosti smykových napětí

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}$$

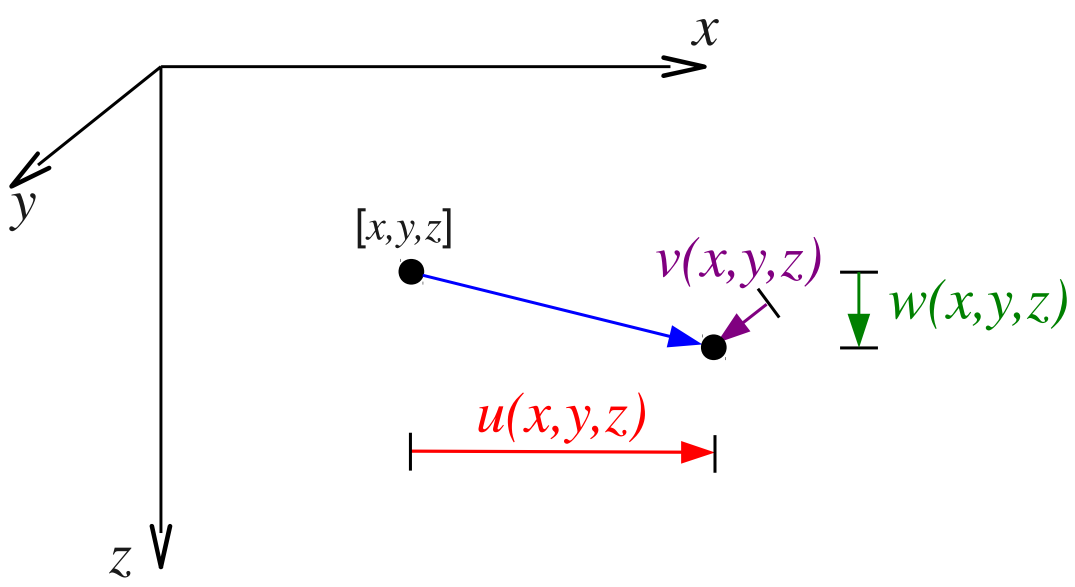
$$\tau_{yz}=\tau_{zy}$$

$$\tau_{xz}=\tau_{zx}$$

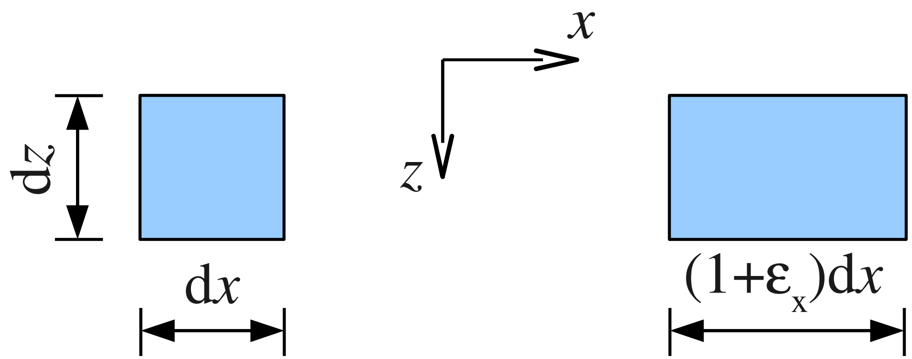
Rovnice odvozeny z analogických momentových podmínek rovnováhy okolo os x,y.
Ze vzájemnosti smykových napětí plyne symetrie tensoru napětí.

Složky posunutí ve 3D

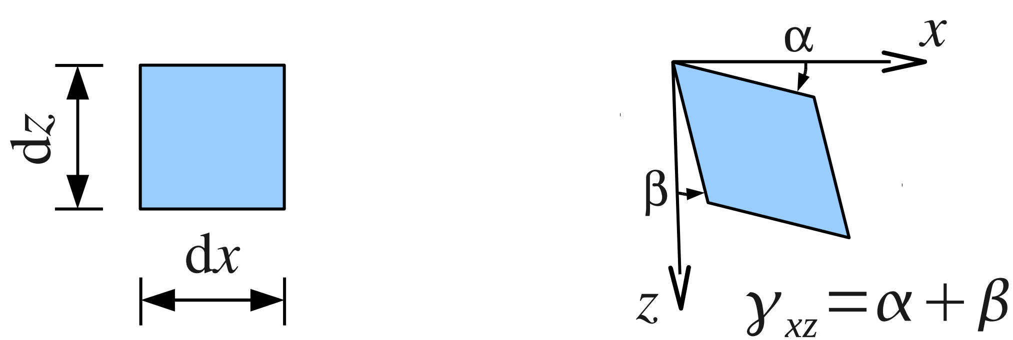
- V prostorové napjatosti definujeme tři složky posunutí
  - $u(x,y,z)$ – posun ve směru osy x
  - $v(x,y,z)$ – posun ve směru osy y
  - $w(x,y,z)$ – posun ve směru osy z



Složky deformace v rovnině xz



ε_x … normálová deformace ve směru x (změna objemu)



γ_{xz} … zkosení v rovině xz, smyková deformace, (změna úhlu, stejný objem)

V prostoru je deformace elementárního kvádru popsána

<u>Normálovými složkami</u>

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$$

<u>Smykovými složkami</u>

$$\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$$

Objemová deformace

- Počáteční objem elementárního kvádru

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

- Objem elementárního kvádru po deformaci

$$dV' = (1+\varepsilon_x)\cdot(1+\varepsilon_y)\cdot(1+\varepsilon_z)\cdot \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z$$

- Relativní změna objemu pro malé deformace

$$\varepsilon_V = \frac{dV' - dV}{dV} = (1+\varepsilon_x)\cdot(1+\varepsilon_y)\cdot(1+\varepsilon_z) - 1$$

$$\varepsilon_V \approx \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Šest geometrických rovnic

- Vztah mezi polem posunů a polem deformace
  - Odvození – viz přednáška o rovinné napjatosti

<u>Normálové složky</u>
(protažení)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

<u>Smykové složky</u>
(zkosení)

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Zobecněný Hookeův zákon

- Jednoosé namáhání

Ve směru osy x

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x}$$

$$\varepsilon_y = -\nu\,\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_x$$

$$\varepsilon_z = -\nu\,\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_x$$

Ve směru osy y

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y$$

$$\boxed{\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_y}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_y$$

Ve směru osy z

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z$$

$$\boxed{\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}\sigma_z}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_z$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\,\sigma_y - \nu\,\sigma_z\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\,\sigma_z - \nu\,\sigma_x\right)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu\,\sigma_x - \nu\,\sigma_y\right)$$

Modul poddajnosti ve smyku [1/Pa]

$$\gamma_{yz} = \boxed{\frac{2(1+\nu)}{E}}\tau_{yz}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$

Závislost deformace na napětí – matice poddajnosti

- Lineárně pružný izotropní materiá ve 3D

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\sigma}$$

matice **poddajnosti** elastického materiálu

Závislost napětí na deformaci – matice tuhosti

- Lineárně pružný izotropní materiál ve 3D

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{\varepsilon}$$

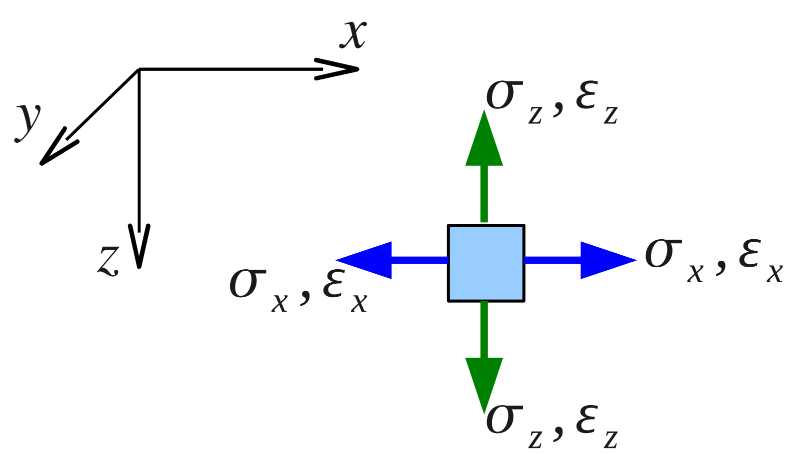
$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ … modul pružnosti ve smyku [Pa]

→ matice **tuhosti** elastického materiálu

Pozn. Eliminací příslušných složek napětí a deformací obdržíme Hookeův zákon pro jednoosou či rovinnou napjatost.

Příklad – odvoďte součinitel zemního tlaku v klidu

- Vztah mezi $\sigma_x = \sigma_y$ a σ_z
- Předpokládáme



$$\tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$$
$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0$$
$$\varepsilon_y = 0$$
$$\sigma_x = \sigma_y$$

$$\varepsilon_y = 0 = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\,\sigma_z - \nu\,\sigma_x\right)$$
$$\sigma_x (1-\nu) = \nu\,\sigma_z$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \boxed{\frac{\nu}{1-\nu}}\,\sigma_z$$

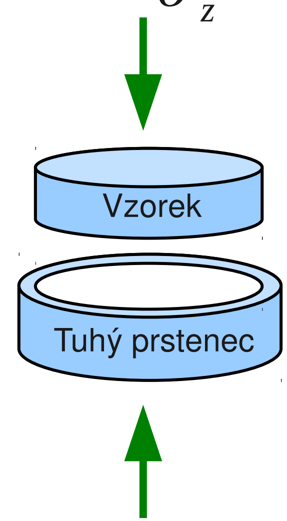
Součinitel zemního tlaku v klidu

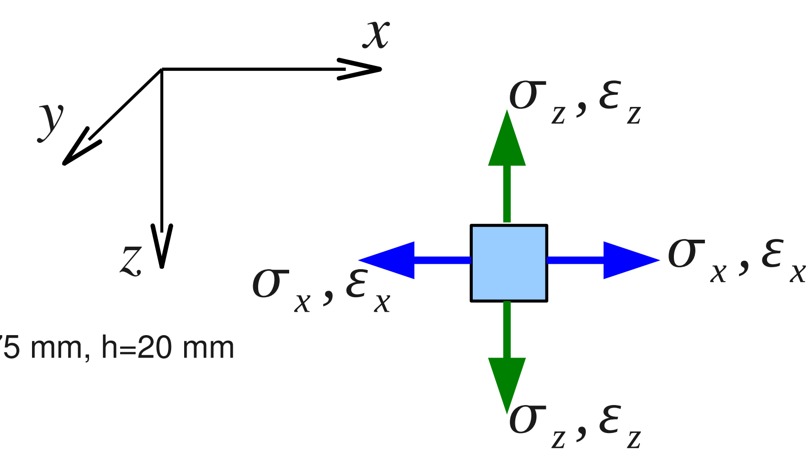
Poissonovo číslo	Součinitel zemního tlaku v klidu
0	0.000
0.2	0.250
0.25	0.333
0.3	0.429
0.5	1.000

Příklad – odvoďte vztah pro oedometrický modul

- Vztah mezi σ_z a ε_z
- Předpokládáme

$$\tau_{yz}=\tau_{zx}=\tau_{xy}=0$$
$$\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=\gamma_{xy}=0$$
$$\varepsilon_x=\varepsilon_y=0$$
$$\sigma_x=\sigma_y$$





$$\varepsilon_y=0=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\nu\sigma_z-\nu\sigma_x\right)$$

Zemní tlak v klidu

$$\sigma_x(1-\nu)=\nu\sigma_z, \sigma_x=\sigma_y=\boxed{\frac{\nu}{1-\nu}}\sigma_z$$

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left(\sigma_z-2\nu\sigma_x\right)=\frac{\sigma_z}{E}\left(\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu}\right)$$

$$\sigma_z=\boxed{\frac{E(1-\nu)}{1-\nu-2\nu^2}}\varepsilon_z$$

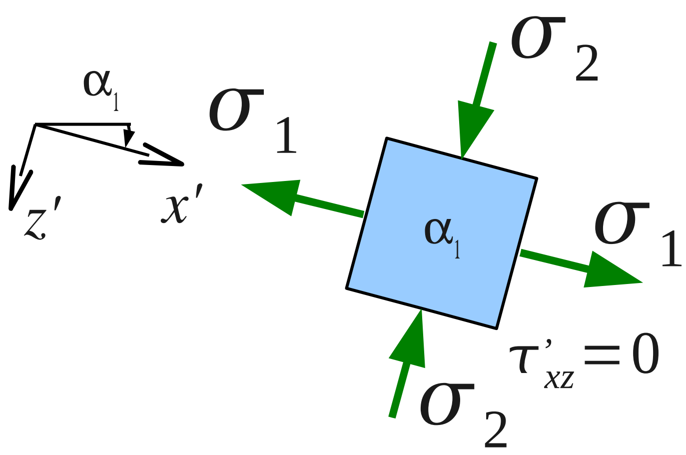
E_{oed}

	E_{oed} [MPa]
Jemnozrnné zeminy	1 – 30
Písky	5 – 100
Štěrky	20 – 500

V praxi se často uvažuje závislost oedometrického modulu na úrovni napětí.

Hlavní napětí

- V úloze <u>rovinné napjatosti</u> vždy existuje takové pootočení souřadnic, při kterém vymizí smykové napětí. Zbylá normálová napětí jsou hlavní napětí.



- Matematicky jsou hlavní napětí σ_1, σ_2 vlastní čísla matice

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xz}\\ \tau_{zx} & \sigma_z\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}=\sigma\,\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}-\sigma\,\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{x}=0,\quad \left(\boldsymbol{A}-\sigma\,\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{x}=0,\quad \det\left(\boldsymbol{A}-\sigma\,\boldsymbol{I}\right)=0$$

Výpočet hlavních napětí pomocí vlastních čísel

$$\det\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} = 0$$

$$(\sigma_x - \sigma)(\sigma_z - \sigma) - \tau_{xz}^2 = 0$$

$$\sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_z)\sigma + \sigma_x \sigma_z - \tau_{xz}^2 = 0$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

Pro trojosou napjatost vede problém hlavních napětí na kubickou rovnici. Řešením jsou tři reálná hlavní napětí.

$$\det\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} = 0$$

Výpočet hlavních deformací

$$\det\begin{bmatrix} \varepsilon_x-\varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y-\varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z-\varepsilon \end{bmatrix}=0$$

Koeficienty ½ jsou nezbytné pro zachování tenzorového charakteru, tj. nezávislost vlastních čísel na rotaci souřadnic. Řešením jsou tři reálné hlavní deformace.

Pro rovinnou napjatost jsou hlavní deformace

$$\det\begin{bmatrix} \varepsilon_x-\varepsilon & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ 0 & \varepsilon_y-\varepsilon & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & 0 & \varepsilon_z-\varepsilon \end{bmatrix}=0, \quad (\varepsilon_y-\varepsilon)\det\begin{bmatrix} \varepsilon_x-\varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \varepsilon_z-\varepsilon \end{bmatrix}=0$$

$$\varepsilon_{1,2}=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_z}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_z}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xz}}{2}\right)^2}, \quad \varepsilon_3=\varepsilon_y$$

Objemová část napětí a deformace

Normálové deformace

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}\left(\sigma_x-\nu\sigma_y-\nu\sigma_z\right)\\ \varepsilon_y&=\frac{1}{E}\left(\sigma_y-\nu\sigma_z-\nu\sigma_x\right)\\ \varepsilon_z&=\frac{1}{E}\left(\sigma_z-\nu\sigma_x-\nu\sigma_y\right)\end{aligned}\right\}$$

Objemové deformace ε_V

$$\varepsilon_V=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\frac{1-2\nu}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)$$

$$\varepsilon_V=\frac{3(1-2\nu)}{E}\cdot\boxed{\frac{\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z}{3}}$$

Střední hydrostatické napětí σ_m

Konstitutivní vztah

$$\sigma_m=\boxed{\frac{E}{3(1-2\nu)}}\,\varepsilon_V$$

Objemový modul pružnosti *K* [Pa]

$$\sigma_m=K\,\varepsilon_V$$

Rozklad napětí a deformace

Nebude ve zkoušce

Složky napětí = Hydrostatická část (změna objemu) + Deviatorická část (změna tvaru)

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_m \\ \sigma_m \\ \sigma_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_x = \sigma_x - \sigma_m \\ s_y = \sigma_y - \sigma_m \\ s_z = \sigma_z - \sigma_m \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}$$

Složky deformace = Volumetrická část (změna objemu) + Deviatorická část (změna tvaru)

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_V/3 \\ \varepsilon_V/3 \\ \varepsilon_V/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_x = \varepsilon_x - \varepsilon_V/3 \\ e_y = \varepsilon_y - \varepsilon_V/3 \\ e_z = \varepsilon_z - \varepsilon_V/3 \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

Příklad – napětí od ohřátí vody v ocelové trubce

Součinitel objemové teplotní roztažnosti vody $\beta_{H_2O} = 2\text{e-}4 \ \ \mathrm{K}^{-1}$

Součinitel délkové teplotní roztažnosti oceli $\alpha_{ocel} = 12\text{e-}6 \ \ \mathrm{K}^{-1}$

Součinitel objemové teplotní roztažnosti oceli $\beta_{ocel} = (1+\alpha_T)^3 - 1 \approx 3\alpha_T = 3.6\text{e-}5 \ \mathrm{K}^{-1}$

Objemový modul pružnosti vody $K_{H_2O} = 2.15\,\mathrm{GPa}$

Ohřátí vody o +40 K.

Výpočet zanedbává objemovou roztažnost oceli (řádově nižší) a pružnost ocelové nádoby (řádově vyšší). Celková objemová deformace bude proto v uzavřené nádobě přibližně nulová.

$$\varepsilon_V = 0 = \frac{\sigma_m}{K_{H_2O}} + \beta_{H_2O}\Delta T$$

$$\sigma_m = -K_{H_2O}\,\beta_{H_2O}\,\Delta T = -2.15\text{e+}3 \cdot 2\text{e-}4 \cdot 40 = -17.2 \ \mathrm{MPa}$$

Změna objemu vody, pokud by mohla volně expandovat

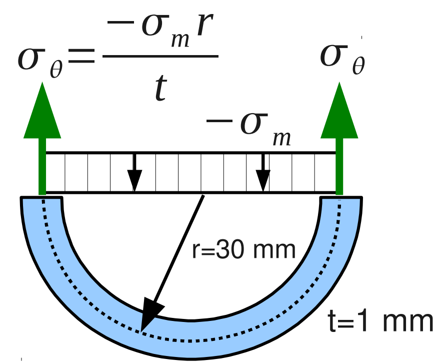
$$\varepsilon_V = \beta_{H_2O}\Delta T = 0.008$$

Příklad – napětí od ohřátí vody v ocelové trubce

Nyní uvažujte nekonečně dlouhou ocelovou trubku o středním poloměru 30 mm a o tloušťce stěny t=1 mm. Uvažujte teplotní roztažnost trubky spolu s kapalinou i její poddajnost. Výsledek porovnejte s předešlým řešením.

Prodloužení obvodu trubky

$$\delta o=\frac{N\cdot 2\pi r}{EA}+2\pi r\cdot\alpha_T\Delta T$$



Zvětšení poloměru trubky

$$\delta r=\frac{\delta o}{2\pi}=\frac{\sigma_\theta r}{E}+r\cdot\alpha_T\Delta T=\frac{-\sigma_m r^2}{Et}+r\cdot\alpha_T\Delta T$$

Objemová deformace vnitřního prostoru ocelové trubky

$$\varepsilon_V^{ocel}=1\cdot\frac{\pi(r+\delta r)^2-\pi r^2}{\pi r^2}\approx\frac{2\delta r}{r}=\frac{-2\sigma_m r}{Et}+2\alpha_T\Delta T$$

Objemová deformace vody

$$\varepsilon_V^{H_2O}=\frac{\sigma_m}{K_{H_2O}}+\beta_{H_2O}\Delta T$$

$$\varepsilon_V^{ocel}=\varepsilon_V^{H_2O}\,,\quad \sigma_m\left(\frac{-2r}{Et}-\frac{1}{K_{H_2O}}\right)=\beta_{H2O}\Delta T-2\alpha_T\Delta T$$

$$\sigma_m=(\beta_{H2O}\Delta T-2\alpha_T\Delta T)\cdot\left[\frac{-2r}{Et}-\frac{1}{K_{H_2O}}\right]^{-1}=-9.38\,\mathrm{MPa}\,,\quad \sigma_\theta=281\,\mathrm{MPa}$$

Pozn. Pro α_T=0 a E→∞ dává řešení předchozí výsledek -17.2 MPa.

Základní rovnice pro trojosou napjatost

Přemístění

u, v, w

Laméovy rovnice

(3 rovnice)

Vnější síly

$\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$

6 Geometrických rovnic

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\dots$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\dots$$

3 Statické rovnice

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \overline{X} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \overline{Y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \overline{Z} = 0$$

6 Materiálových rovnic

$$\sigma_x = \frac{E\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y + \nu\varepsilon_z\right]}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\dots$$

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xz}$$

$$\dots$$

Přetvoření

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$

$\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$

Napětí

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$

$\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$

Otázky

1. Definujte tensor napětí a nakreslete vektor napětí na normále, která je orientována souhlasně s osou y.
2. Odvoďte statickou podmínku rovnováhy ve směru x. Jak se výsledná rovnice zredukuje, pokud se použije na čistě tažený prut?
3. Uvažujte tažený prut jako 3D kontinuum. Které složky napětí a deformace jsou nulové?
4. Dokažte, že matice tuhosti lineárně elastického materiálu je inverzí matice poddajnosti. Pro výpočet inverzní matice využijte rozdělení matice na 4 submatice.
5. Odvoďte hlavní napětí pro případ rovinné deformace pomocí transformace tensoru napětí.
6. Proč jsou v tenzoru deformace koeficienty ½ u inženýrských deformací?
7. V jakých rovnicích vystupuje modul pružnosti ve smyku a objemový modul pružnosti?
8. Jaký je vztah hydrostatického napětí u kapalin vůči složkám napětí $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$? Jsou kapaliny opravdu nestlačitelné?

Vytvořeno 04/2011 v OpenOffice 3.2, Ubuntu 10.04, Vít Šmilauer, ČVUT.
Poděkování patří zejména M. Jiráskovi za inspiraci jeho přednáškami.