Přednáška 09

Smyk za ohybu

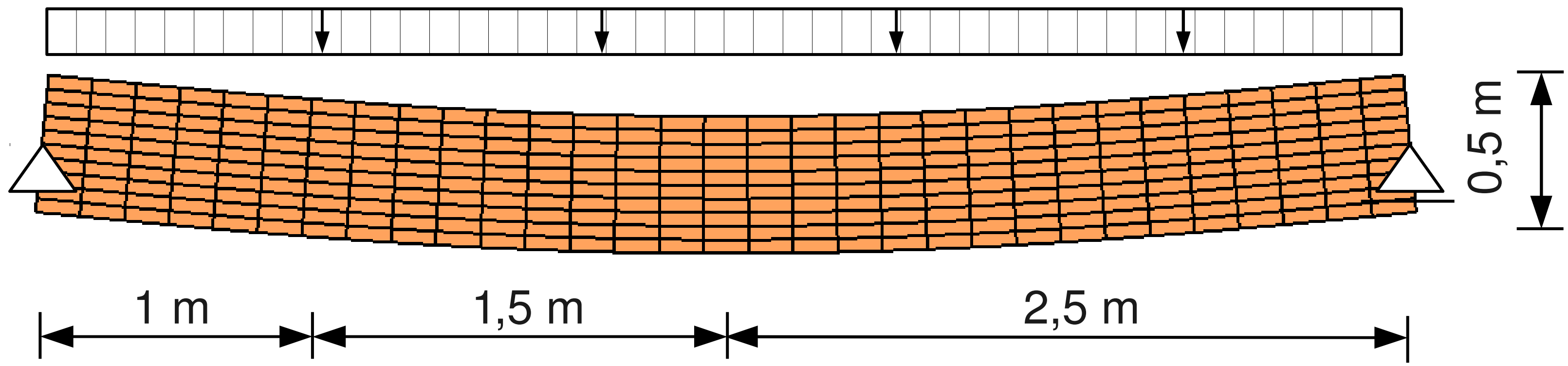
Vnitřní síly na nosníku ve vztahu k napětí
Smykové napětí pro obdélníkový průřez
Smykové napětí pro obecný průřez
Smykové ochabnutí
Střed smyku průřezu
Svary, šrouby, spřahovací trny
Příklady

Copyright (c) 2011 Vít Šmilauer
Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Mechanics, Czech Republic

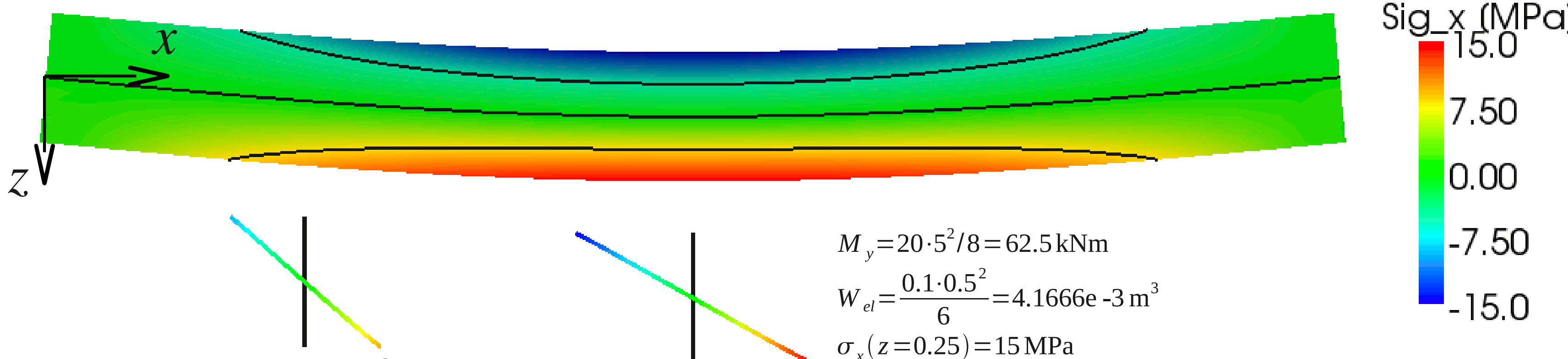
Motivace - ohýbaný nosník

f=20 kN/m, šířka obdélníkového průřezu 0,1 m

Nosník modelován jako úloha rovinné napjatosti



Normálové napětí



$M_y = 50 \cdot 1 - 20 \cdot 1^2/2 = 40\,\mathrm{kNm}$

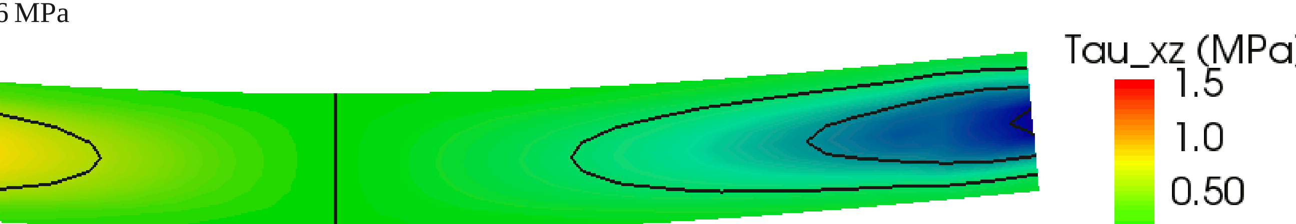
$\sigma_x(z=0.25) = 9.6\,\mathrm{MPa}$

$M_y = 20 \cdot 5^2/8 = 62.5\,\mathrm{kNm}$

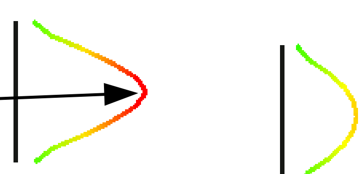
$W_{el} = \dfrac{0.1 \cdot 0.5^2}{6} = 4.1666\mathrm{e}\text{-}3\,\mathrm{m}^3$

$\sigma_x(z=0.25) = 15\,\mathrm{MPa}$

Smykové napětí



Přesné řešení 1.5 MPa

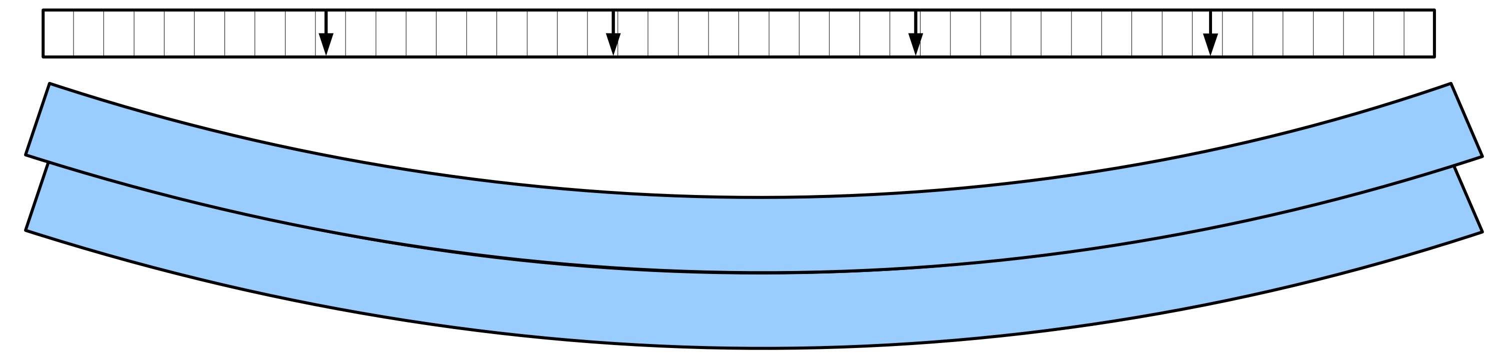


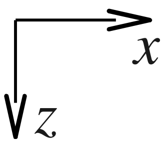
OOFEM.ORG

Deformace zvětšeny 200x, E=210 GPa, ν=0.3.

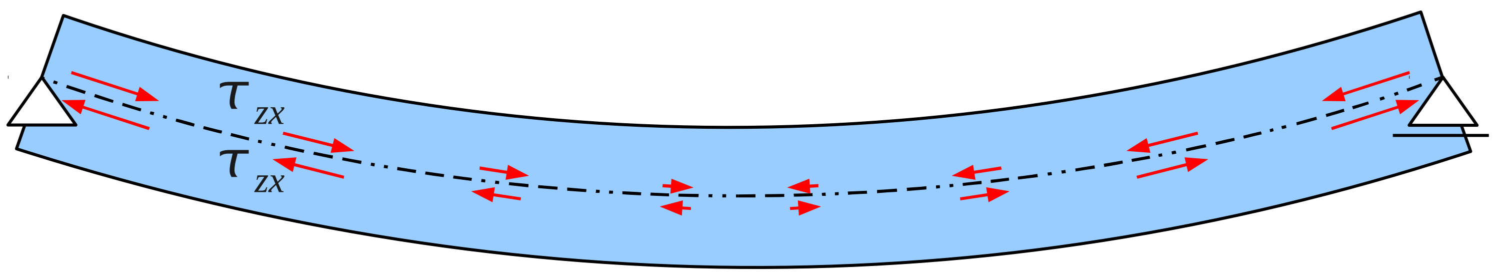
Ilustrace vzniku smykových napětí, rovnováha

Dva oddělené nosníky

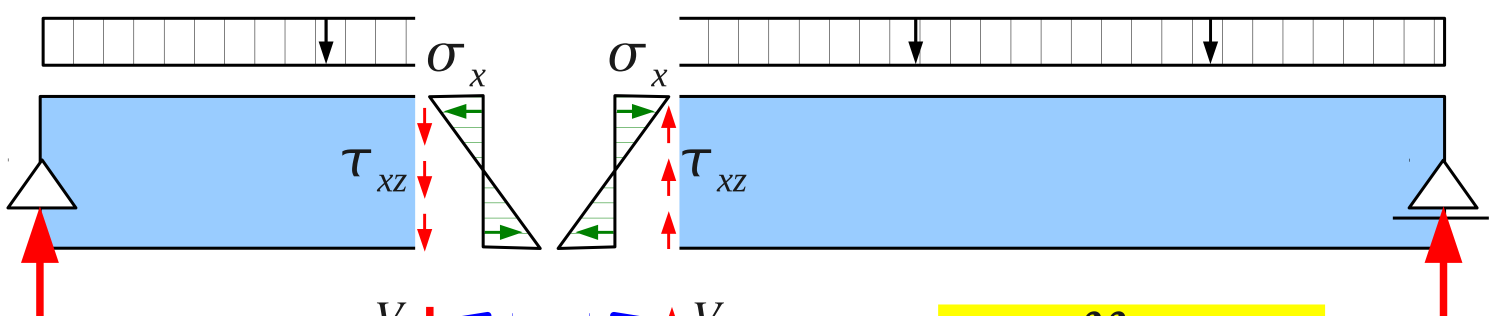




Spolupůsobící nosník

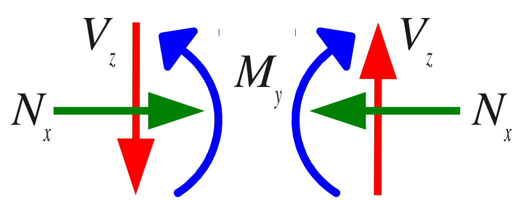


Každá část nosníku musí být v rovnováze, výslednice napětí jsou N_x, V_z, M_y.



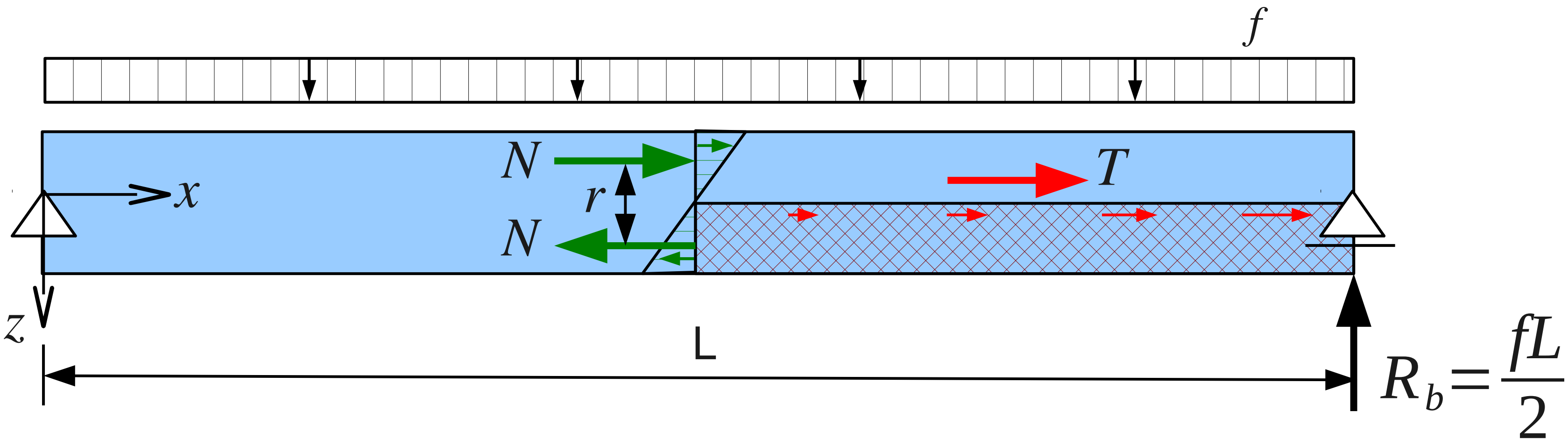
$$N_x = \iint_A \sigma_x \, dA$$

$$M_y = \iint_A \sigma_x \, z \, dA$$

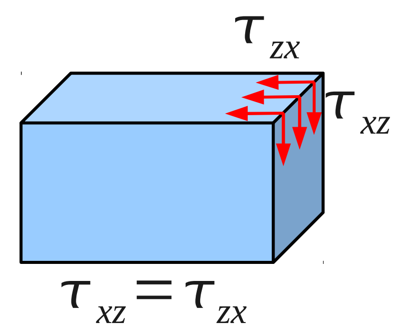


$$V_z = \iint_A \tau_{xz} \, dA$$

Rovnováha – smyková síla změnou normálové síly



$\rightarrow$: $T - N = 0$ … rovnováha na vyšrafované části

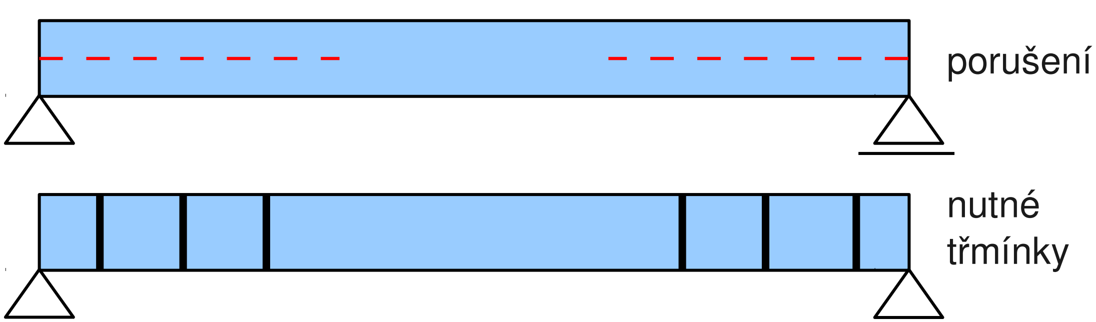


$M_y = Nr\,,\quad N = \dfrac{M_y}{r}$ … ohybový moment

$M_y = \dfrac{fL^2}{8}\,,\quad N = \dfrac{fL^2}{8\mathrm{r}} = R_b \dfrac{L}{4\mathrm{r}} = T$ … vztah mezi T a R_b

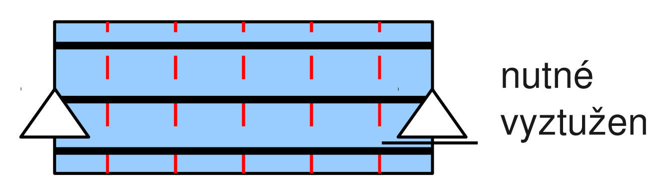
Dlouhé nízké nosníky

$L \gg 4\mathrm{r}\,, T \gg R_b$



Krátké a vysoké nosníky

$L \ll 4\mathrm{r}\,, T \ll R_b$



Podmínka rovnováhy na elementárním kvádru

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+\overline{X}=0$$

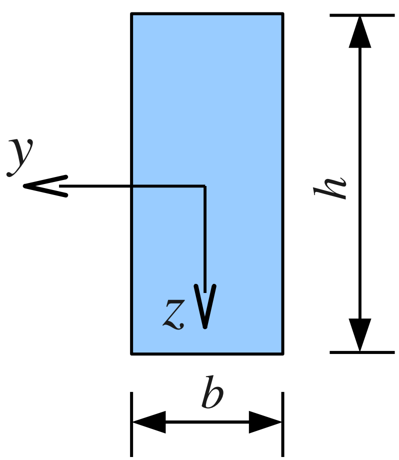
Pro nosník ohýbaný pouze okolo hlavní centrální osy y a zatížený svisle:

$$\sigma_x(x,y,z)=\frac{M_y(x)}{I_y}z$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}=-\frac{dM_y(x)}{dx}\cdot\frac{z}{I_y}=-\frac{V_z(x)z}{I_y}$$

$$\tau_{zx}=-\frac{V_z(x)}{I_y}\cdot\frac{z^2}{2}+C_1$$ … na okrajích průřezu je smykové napětí nulové

Smykové napětí – obdélníkový průřez



$$\tau_{zx}(x, y, h/2) = 0 \ldots C_1 = \frac{V_z(x)}{I_y} \cdot \frac{h^2}{8}$$

$$\tau_{zx}(x, y, -h/2) = 0 \ldots C_1 = \frac{V_z(x)}{I_y} \cdot \frac{h^2}{8}$$

$$I_y = \frac{1}{12} bh^3$$

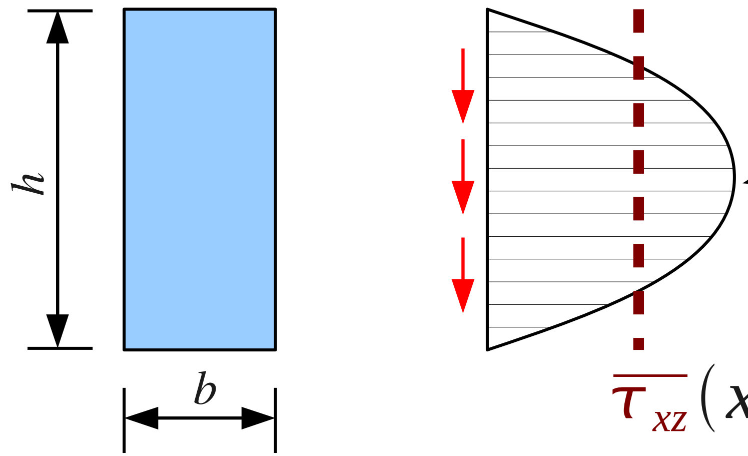
$$\tau_{zx} = -\frac{V_z(x)}{I_y} \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{V_z(x)}{I_y} \cdot \frac{h^2}{8} = \frac{1.5\, V_z(x)}{bh} \left[1 - \frac{4z^2}{h^2} \right]$$

Kontrola:

$$\iint_A \tau_{zx}(x, y, z)\, dA = \frac{1.5\, V_z(x)}{bh}\, b \int_{-h/2}^{h/2} \left[1 - \frac{4z^2}{h^2} \right] dz =$$

$$\frac{1.5\, V_z(x)}{h} \left[\frac{h}{2} - \frac{-h}{2} - \frac{4(h/2)^3}{3h^2} + \frac{4(-h/2)^3}{3h^2} \right] = \frac{1.5\, V_z(x)}{h} \cdot \frac{2h}{3} = V_z(x)$$

Smykové napětí – obdélníkový průřez



$$\tau_{xz,max} = \frac{3}{2}\overline{\tau_{xz}}(x) = \frac{3}{2}\cdot\frac{V_z(x)}{A} \ldots \text{elasticky}$$

$$\overline{\tau_{xz}}(x) = \frac{V_z(x)}{bh} = \frac{V_z(x)}{A} \ldots \text{plastický stav}$$

$$\tau_{xz}(x,z) = \frac{1.5\,V_z(x)}{bh}\left[1-\frac{4z^2}{h^2}\right] \ldots \text{elasticky}$$

$$\text{Kontrola:}\; V_z(x) = \iint_A \tau_{xz}\,dA = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\,\frac{V_z(x)}{A} = V_z(x)$$

Smykové napětí vzniká v důsledku posouvající síly. Jinými slovy: Změna normálových napětí po délce prutu vytváří posouvající sílu a smyková napětí.

Příklad – odvoďte konstantu *k* pro obdélníkový průřez

Model prutu někdy uvažuje průměrné smykové napětí $\overline{\tau_{xz}}$

$$\overline{\tau_{xz}} = \boxed{k} G \overline{\gamma_{xz}} = \frac{V_z}{A}, \quad \overline{\gamma_{xz}} = \frac{V_z}{kGA}$$

Práce průměrných napětí a deformací

$$\frac{1}{2} \iint_A \overline{\tau_{xz}} \; \overline{\gamma_{xz}} \, dA = \frac{1}{2} \overline{\tau_{xz}} \; \overline{\gamma_{xz}} \, A = \frac{1}{2} \cdot \frac{V_z}{A} \cdot \frac{V_z}{kGA} A = \frac{V_z^2}{2\mathrm{kGA}}$$

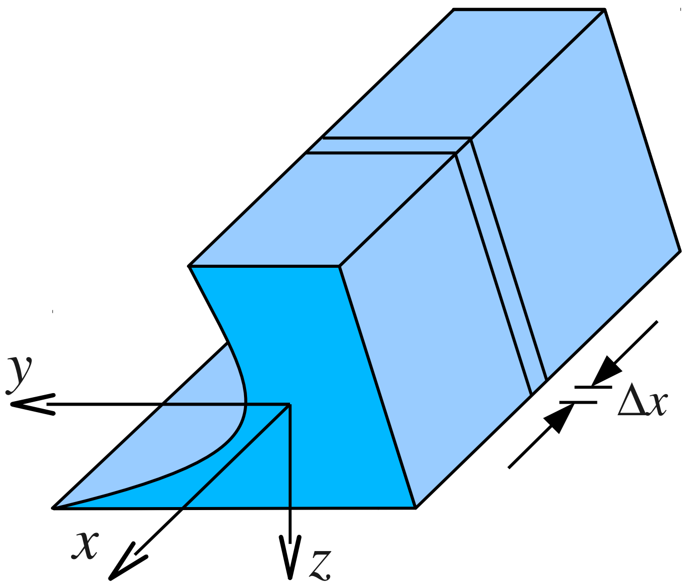
Práce skutečných napětí a deformací

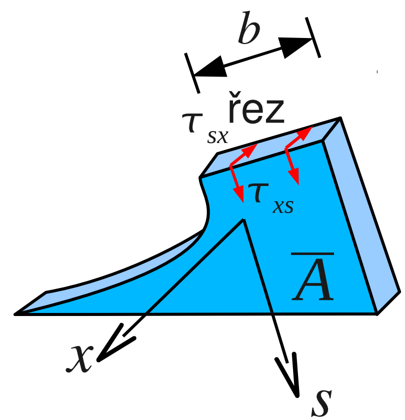
$$\frac{1}{2} \iint_A \tau_{xz} \; \gamma_{xz} \, dA = \frac{b}{2\mathrm{G}} \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}^2 \, dz = \frac{1{,}5^2 b V_z^2}{2\mathrm{GA}^2} \int \left[1 - \frac{4\mathrm{z}^2}{h^2} \right]^2 dz =$$

$$\frac{1{,}5^2 b V_z^2}{2\mathrm{GA}^2} \left[z - \frac{8\mathrm{z}^3}{3\mathrm{h}^2} + \frac{16\mathrm{z}^5}{5\mathrm{h}^4} \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{1{,}5^2 b V_z^2}{2\mathrm{GA}^2} \cdot \frac{8\mathrm{h}}{15} = \frac{0.6 V_z^2}{GA}$$

$$\frac{V_z^2}{2\mathrm{kGA}} = \frac{0.6 V_z^2}{GA}, \quad \boxed{k = \frac{5}{6}}$$

Smykový tok pro obecný průřez konstantního průřezu

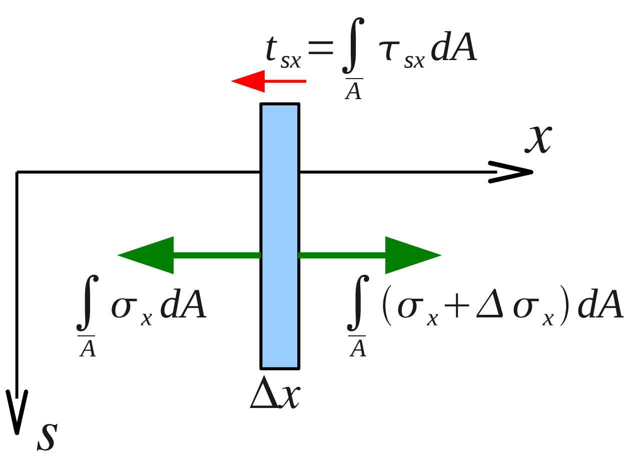




$$\tau_{xs} = \tau_{sx}$$
$$t_{sx} = b\,\tau_{sx}$$

Souřadnice s může mít libovolnou orientaci po průřezu. Často souhlasí s osami y,z. Souřadnici s volíme tak, aby řez byl co nejužší a předpoklad rovnoměrného smykového napětí τ_{sx} na řezu tím byl co nejlépe splněn, viz dále.

Podmínka rovnováhy



$$\rightarrow: \int_{\bar{A}} (\sigma_x + \Delta\sigma_x)\, dA - \int_{\bar{A}} \sigma_x\, dA - t_{sx}\,\Delta x = 0$$

$$t_{sx} = \int_{\bar{A}} \frac{\Delta\sigma_x}{\Delta x}\, dA, \quad x \rightarrow 0, \quad t_{sx} = \int_{\bar{A}} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\, dA$$

Změna normálových napětí po délce prutu vytváří smykový tok a smykové napětí.

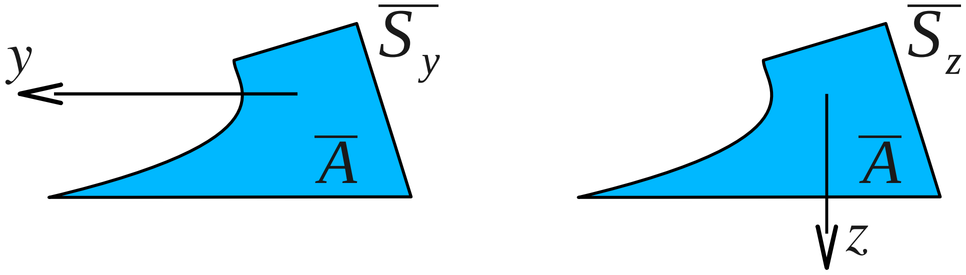
Obecný vzorec pro smykový tok

- Odvození platí pouze pro <u>hlavní centrální</u> osy y,z

$$\sigma_x(x,y,z)=\frac{M_y(x)}{I_y}z-\frac{M_z(x)}{I_z}y$$

$$\frac{\partial\sigma_x(x,y,z)}{\partial x}=\frac{dM_y(x)}{dx}\cdot\frac{z}{I_y}-\frac{dM_z(x)}{dx}\cdot\frac{y}{I_z}=\frac{V_z(x)z}{I_y}+\frac{V_y(x)y}{I_z}$$

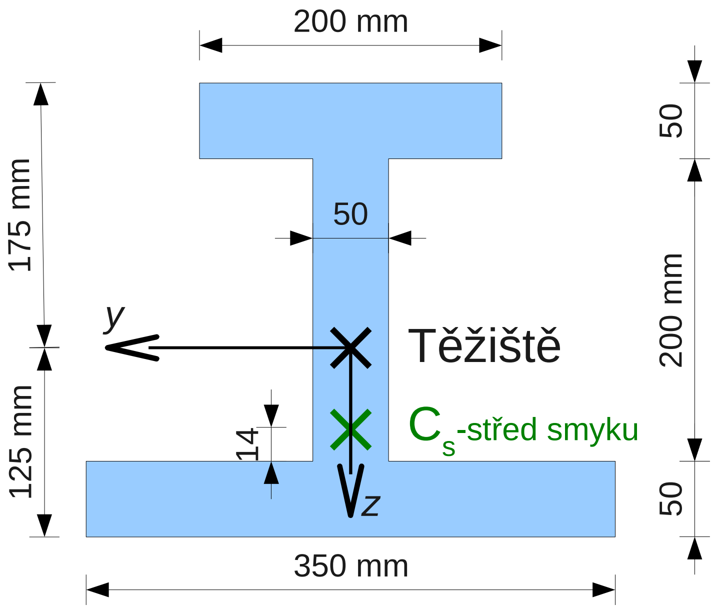
$$t_{sx}=\int_{\overline{A}}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dA=\frac{V_z(x)}{I_y}\underbrace{\int_{\overline{A}}z\,dA}_{\overline{S}_y}+\frac{V_y(x)}{I_z}\underbrace{\int_{\overline{A}}y\,dA}_{\overline{S}_z}$$

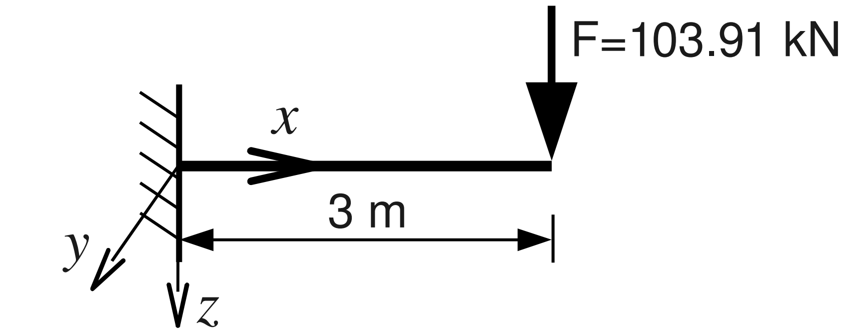


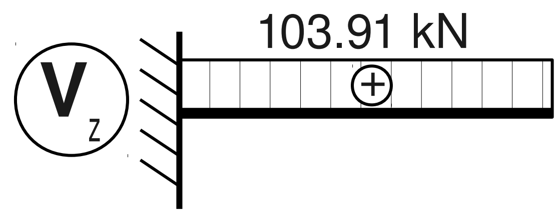
Statické momenty oddělených částí k <u>hlavním centrálním</u> osám.

$$t_{sx}=\frac{V_z(x)\overline{S}_y}{I_y}+\frac{V_y(x)\overline{S}_z}{I_z},\quad \tau_{sx}=\tau_{xs}=\frac{t_{sx}}{b}$$

Příklad – smykové napětí v tenkostěnném průřezu





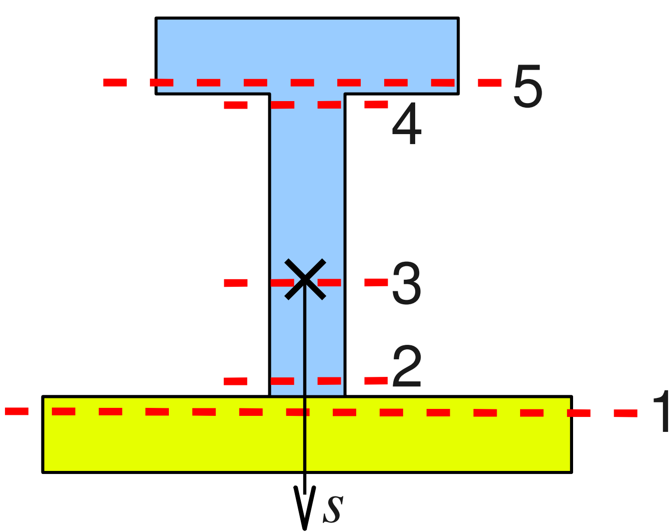


A=0,0375 m^2
I_y=4,453125e-4 m^4
I_z=2,140625e-4 m^4

$$\bar{S}_y^{\overline{1,2}} = 0.35\cdot 0.05\cdot 0.1 = 1.75e-3\ \mathrm{m}^3$$

$$\bar{S}_y^{\bar{3}} = \bar{S}_y^{\overline{1,2}} + 0.05\cdot 0.075^2/2 = 1.89e-3\ \mathrm{m}^3$$

$$\bar{S}_y^{\overline{4,5}} = -0.2\cdot 0.05\cdot(-0.15) = 1.5e-3\ \mathrm{m}^3$$

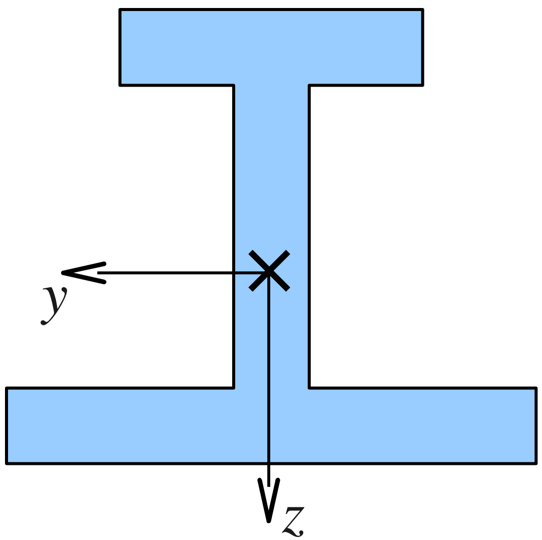


$$\tau_{xs}^{\bar{1}} = \frac{V_z \bar{S}_y^{\overline{1,2}}}{\mathbf{0.35}\, I_y} = 1.167\ \mathrm{MPa}, \quad \tau_{xs}^{\bar{2}} = \frac{V_z \bar{S}_y^{\overline{1,2}}}{\mathbf{0.05}\, I_y} = 8.167\ \mathrm{MPa}$$

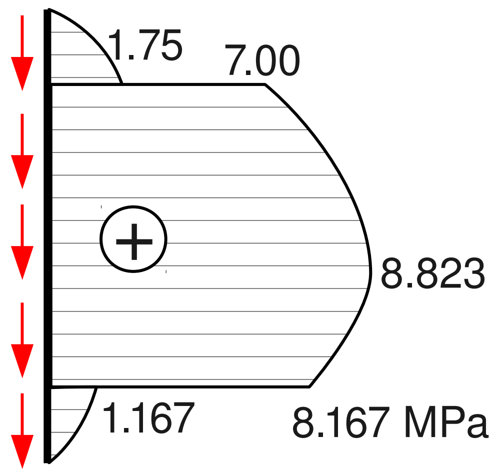
$$\tau_{xs}^{\bar{3}} = \frac{V_z \bar{S}_y^{\bar{3}}}{\mathbf{0.05}\, I_y} = 8.823\ \mathrm{MPa}$$

$$\tau_{xs}^{\bar{4}} = 7.000\ \mathrm{MPa}, \quad \tau_{xs}^{\bar{5}} = 1.75\ \mathrm{MPa}$$

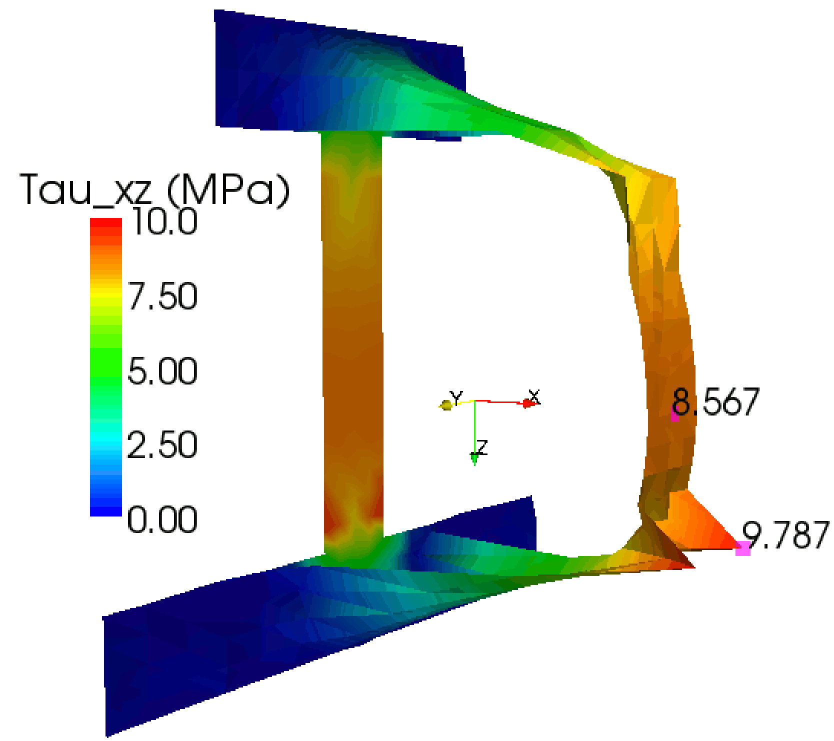
Příklad – smykové napětí v tenkostěnném průřezu



$$\tau_{xs} = \tau_{xz}$$

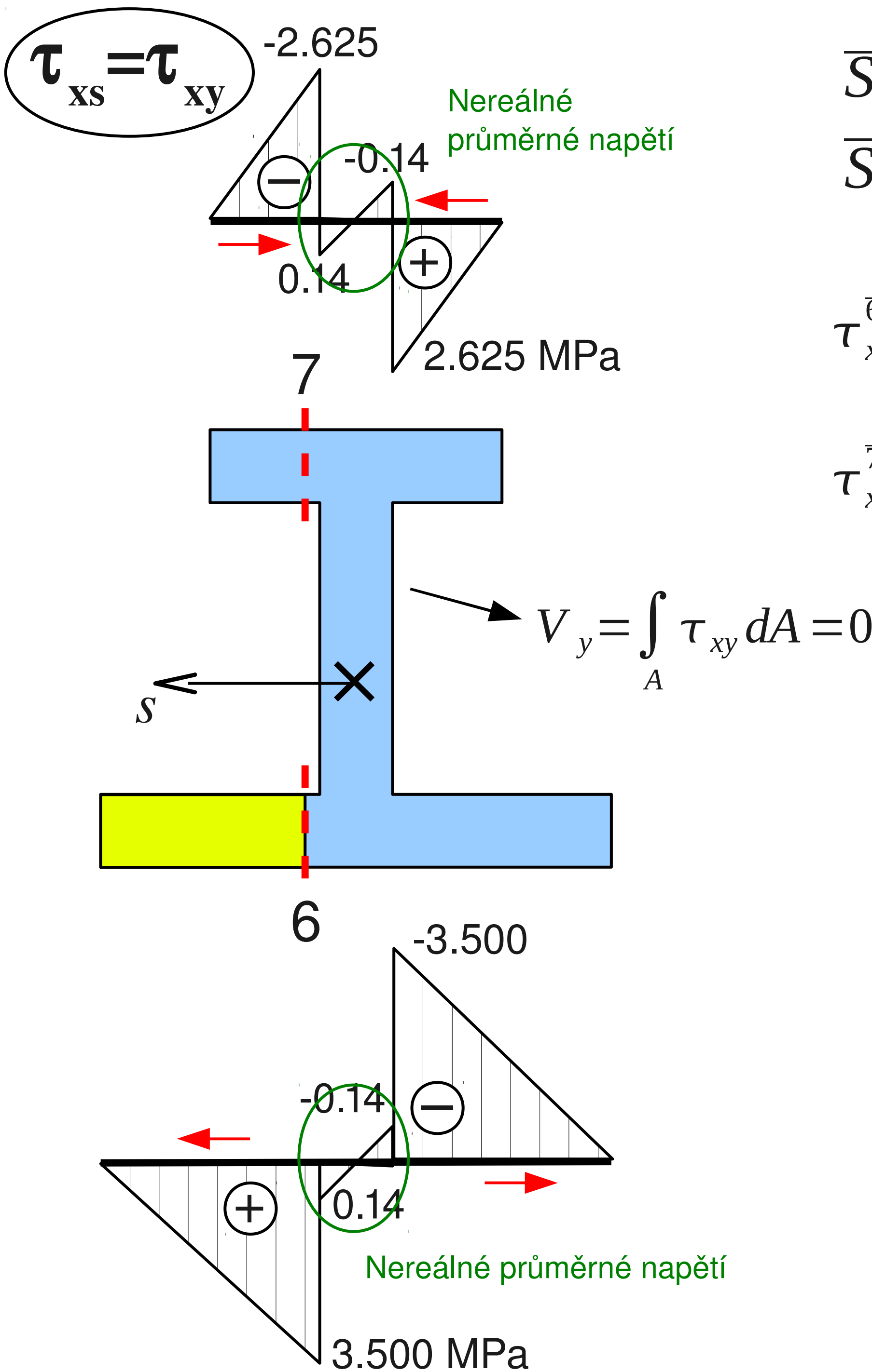


$$V_z = \int_A \tau_{xz}\, dA$$



Simulace pomocí metody konečných prvků (MKP), napětí spojitě vyhlazeno do uzlů (skoky v napětí jsou ve vykreslení ignorovány)

Příklad – smykové napětí v tenkostěnném průřezu

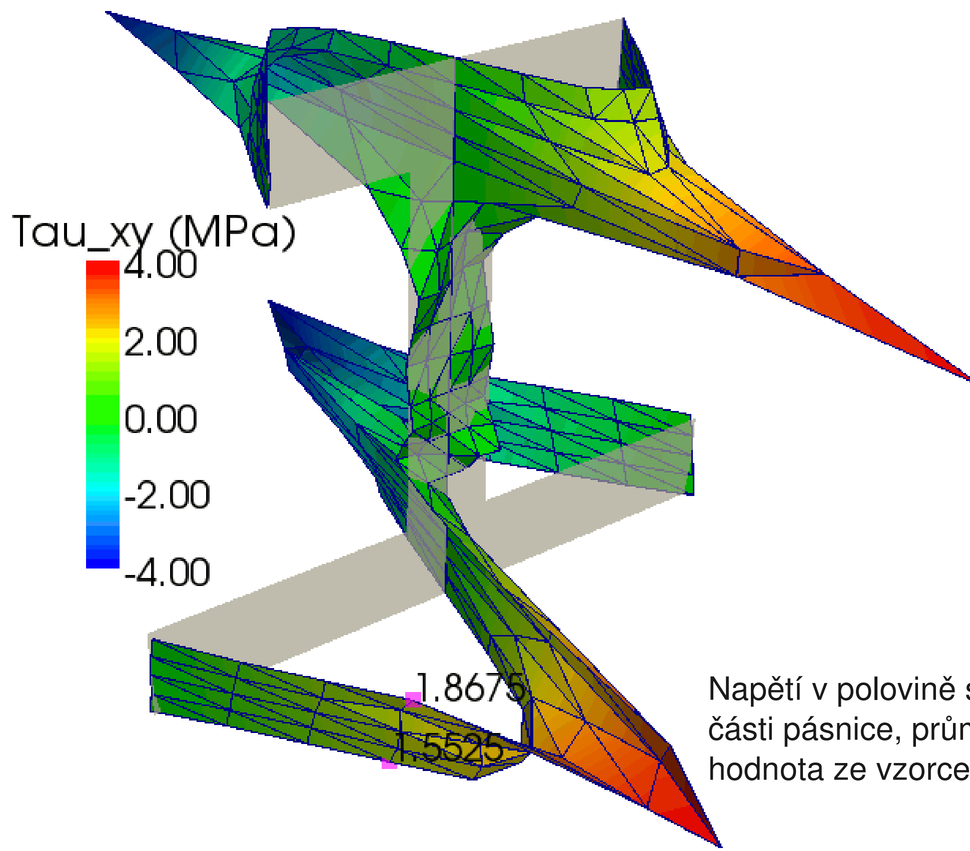


$$\bar{S}_y^{\bar{6}} = 0.15\cdot 0.05\cdot 0.1 = 7.5e-4\ \mathrm{m}^3$$

$$\bar{S}_y^{\bar{7}} = 0.075\cdot 0.05\cdot(-0.15) = -5.625e-4\ \mathrm{m}^3$$

$$\tau_{xs}^{\bar{6}} = \frac{V_z \bar{S}_y^{\bar{6}}}{0.05\, I_y} = 3.500\ \mathrm{MPa}$$

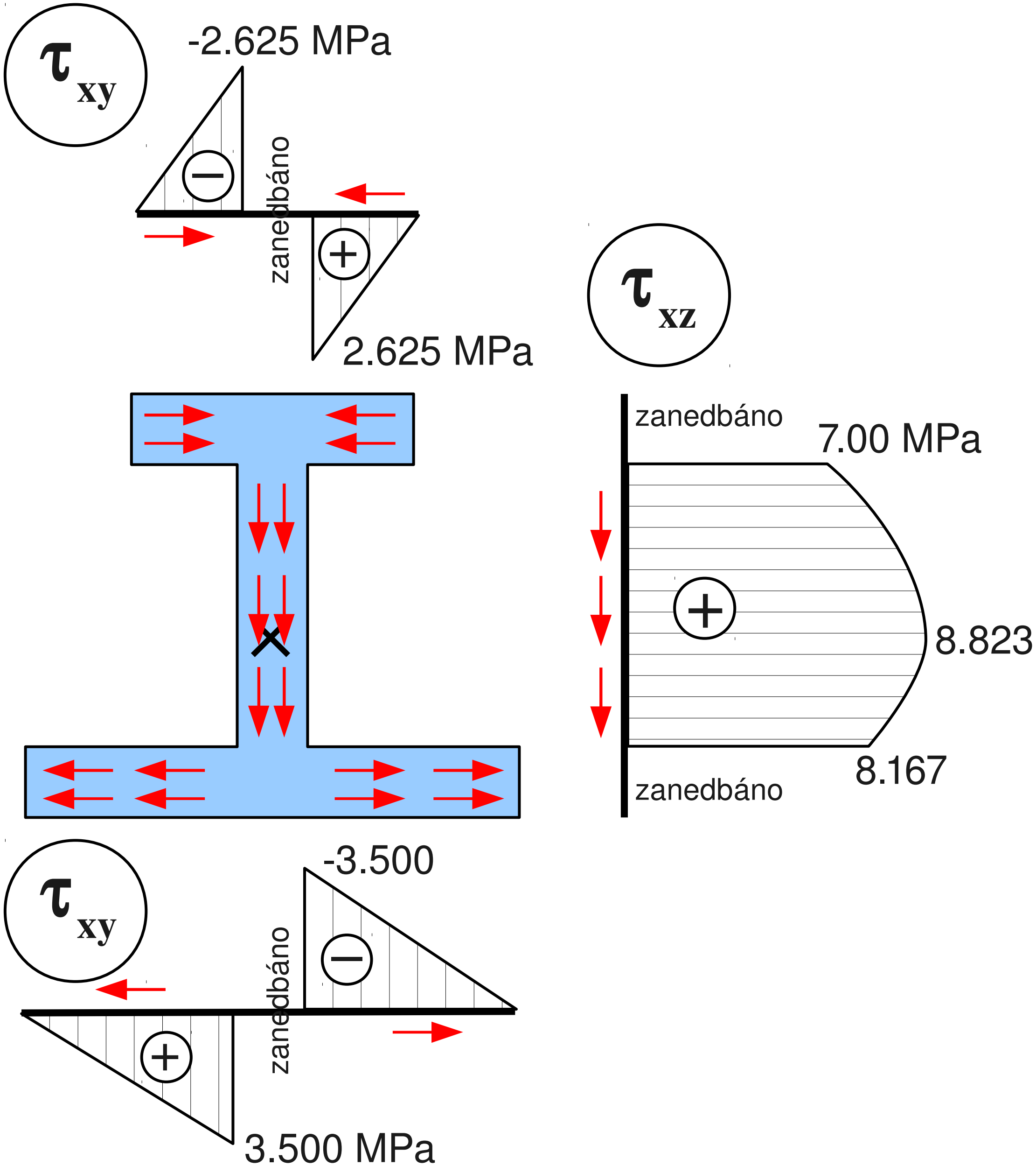
$$\tau_{xs}^{\bar{7}} = \frac{V_z \bar{S}_y^{\bar{7}}}{0.05\, I_y} = -2.625\ \mathrm{MPa}$$



Napětí v polovině světlé šířky části pásnice, průměrná hodnota ze vzorce 1.75 MPa

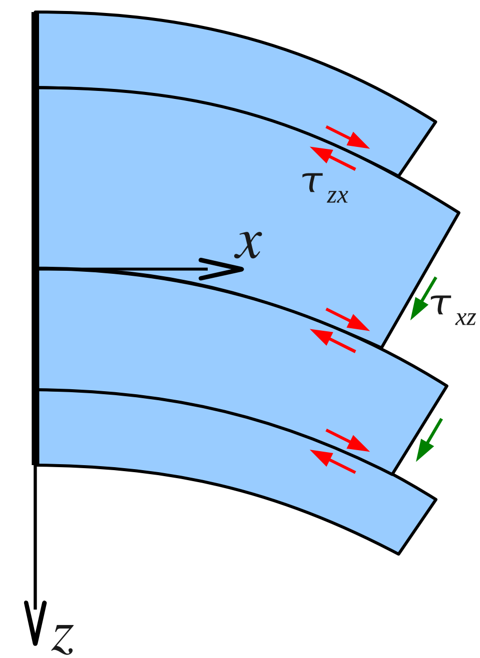
Příklad – smykové napětí v tenkostěnném průřezu

Dominantní smyková napětí



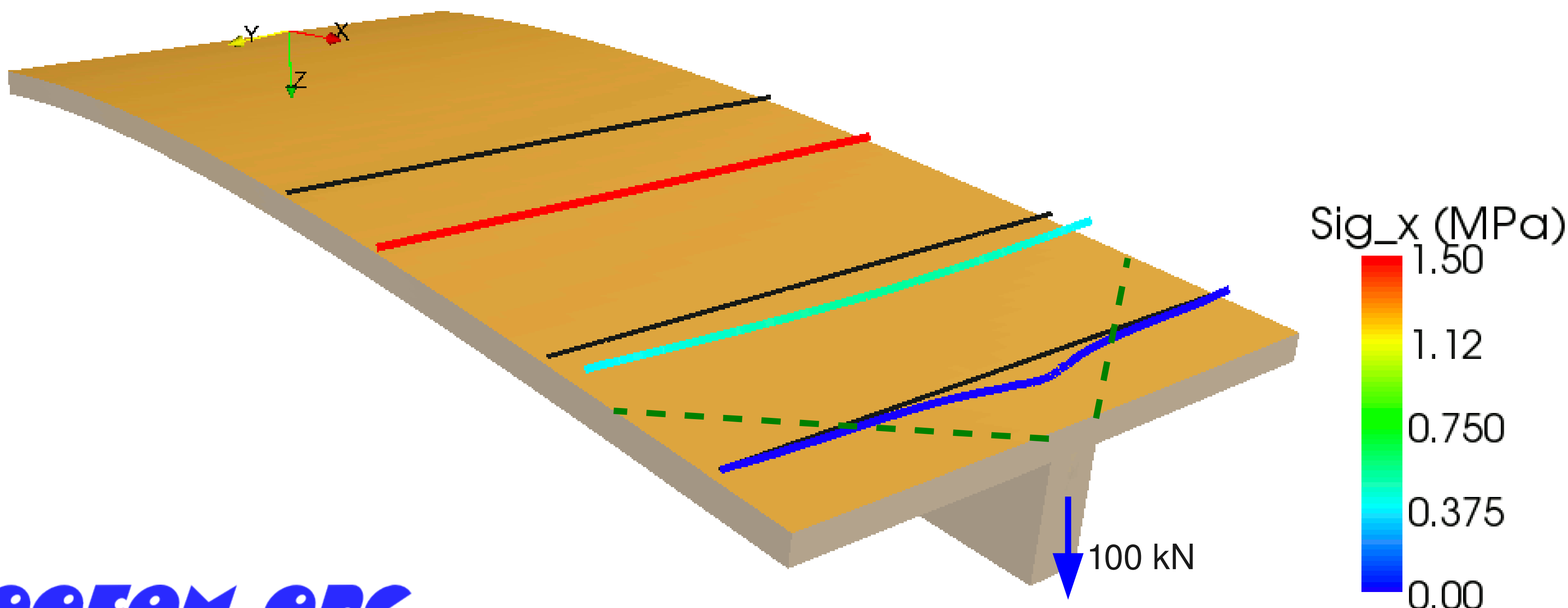
Boční pohled

(pokud by části nosníku nespolupůsobily)



Smykové ochabnutí (shear lag)

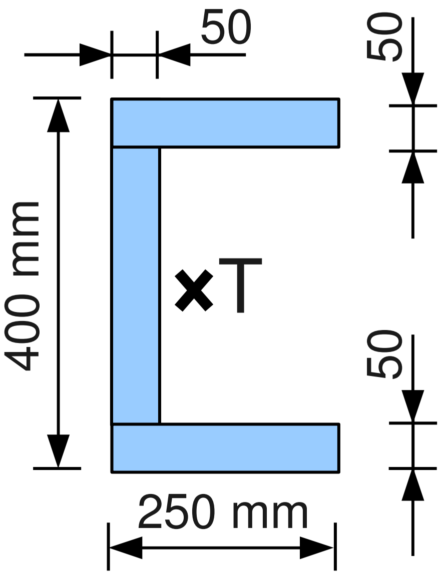
- Nerovnoměrné rozdělení normálového napětí, které vzniká vlivem smykové poddajnosti určitých oblastí konstrukce. Důležité u krátkých nosníků a tenkostěnných profilů. Zjednodušený výpočet běžně uvažuje efektivní průřez s vyloučením málo spolupůsobících částí.



OOFEM.ORG

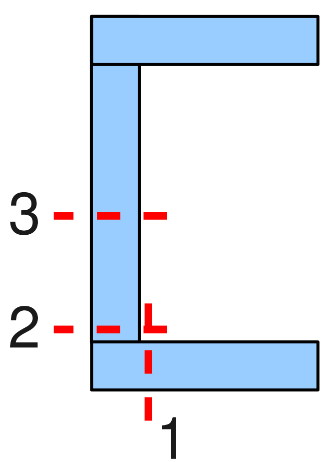
Délka konzoly 10 m, Rozměr betonové desky 4.4x10x0.2 m, šířka žebra 0.4 m, světlá výška žebra 0.8 m, E=30 GPa, ν=0.3, deformace 100x zvětšeny.

Příklad – určete střed smyku průřezu tvaru C



Středem smyku prochází výslednice smykových napětí. Pokud nemá být tenkostěnný průřez namáhán kroucením, musí zatížení procházet právě středem smyku. Střed smyku respektuje symetrii průřezu, vystačíme si proto pouze s výpočtem pro V_z.

$$I_y = \frac{1}{12}\left(2\cdot 0.25\cdot 0.05^3 + 0.05\cdot 0.3^3\right) + 2\cdot 0.25\cdot 0.05\cdot 0.175^2 = 8.8333\mathrm{e}-4\ \mathrm{m}^4$$



$$\bar{S}_y^{\bar{1}} = 0.2\cdot 0.05\cdot 0.175 = 1.75\mathrm{e}-3\ \mathrm{m}^3$$

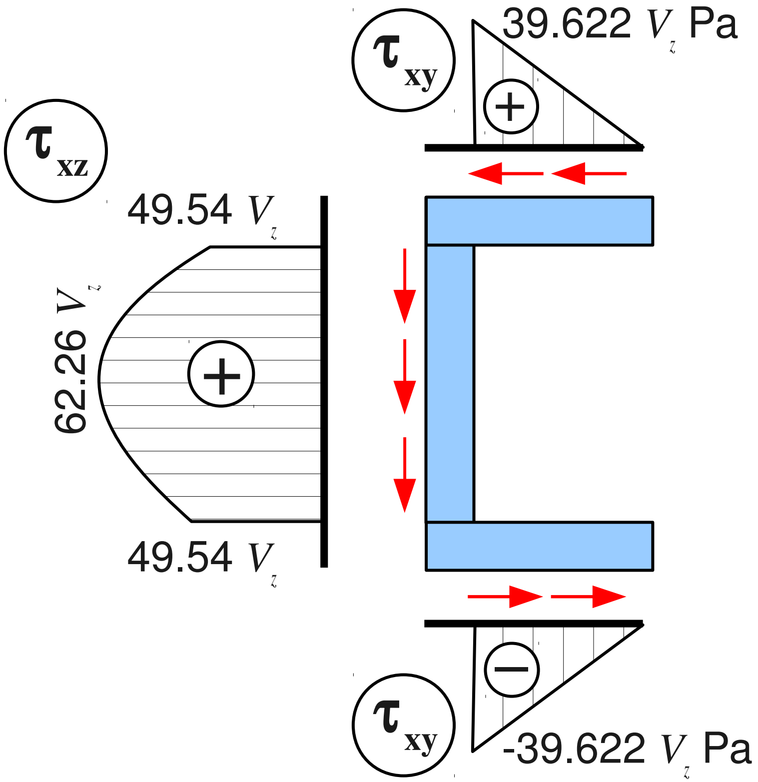
$$\bar{S}_y^{\bar{2}} = 0.25\cdot 0.05\cdot 0.175 = 2.188\mathrm{e}-3\ \mathrm{m}^3$$

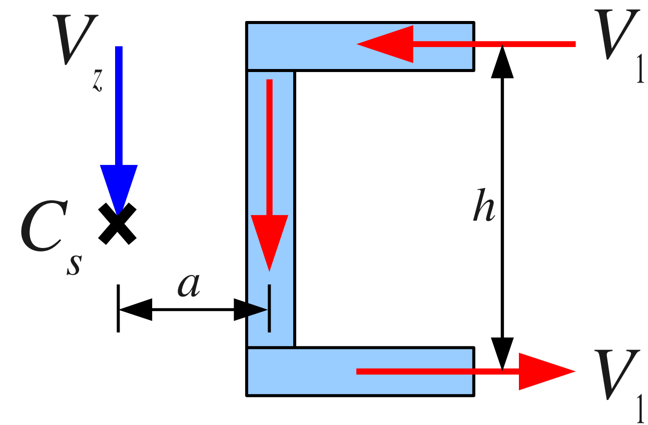
$$\bar{S}_y^{\bar{3}} = \bar{S}_y^{\bar{2}} + 0.05\cdot\frac{0.15^2}{2} = 2.75\mathrm{e}-3\ \mathrm{m}^3$$

$$\tau_{xs}^{\bar{1}} = \frac{V_z \bar{S}_y^{\bar{1}}}{0.05\, I_y} = 39.622\, V_z\ \mathrm{Pa}$$

$$\tau_{xs}^{\bar{2}} = 49.54\, V_z\ \mathrm{Pa}\,,\quad \tau_{xs}^{\bar{3}} = 62.26\, V_z\ \mathrm{Pa}$$

Příklad – určete střed smyku průřezu tvaru C





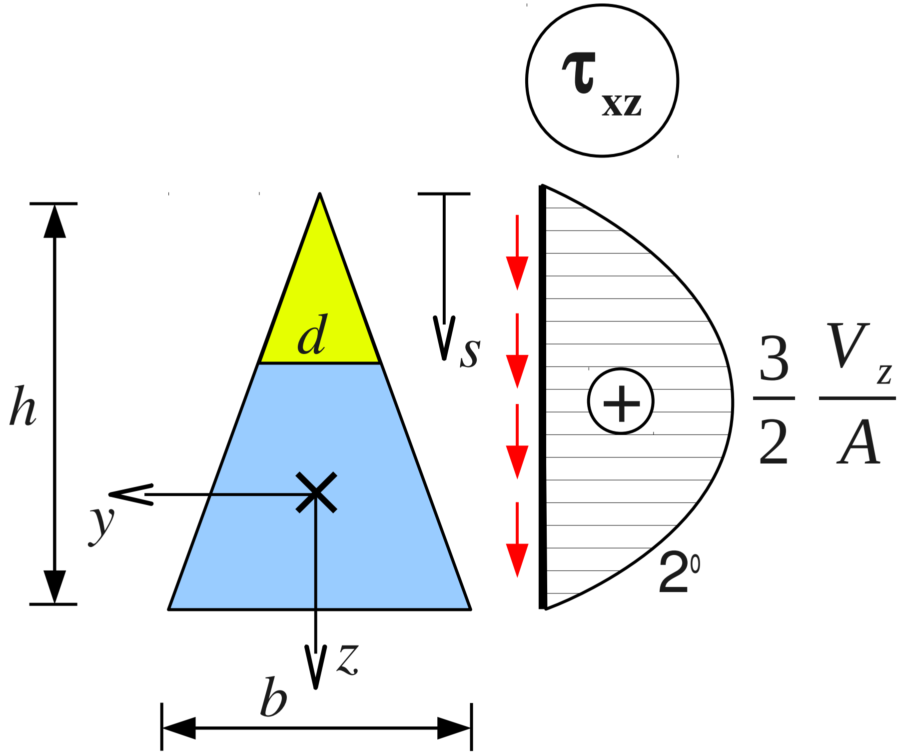
Souřadnici středu smyku a určíme z momentové podmínky ekvivalence:

$$V_z \cdot a = V_1 \cdot h$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \tau_{xs}^{\bar{1}} 0.2 \cdot 0.05 = 0.1981\, V_z$$

$$a = \frac{V_1}{V_z} h = 0.1981 \cdot 0.35 = 0.069\,\mathrm{m}$$

Příklad – určete průběh τ_{xz} u trojúhelníkového průřezu



Rovnoramenný trojúhelník

$$\tau_{xz}(s)=\frac{V_z \overline{S}_y(s)}{d\, I_y}=\frac{12 V_z s(h-s)}{bh^3}$$

$$\frac{d\tau_{xz}(s)}{ds}=0 \;\rightarrow\; s=\frac{h}{2}$$

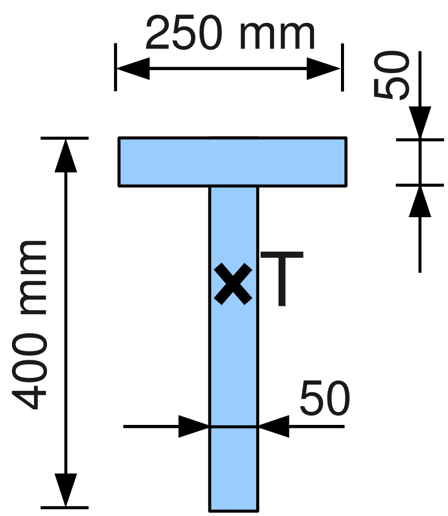
$$\tau_{xz}(h/2)=\frac{3V_z}{bh}=\frac{3}{2}\frac{V_z}{A}$$

$$I_y=\frac{1}{36}bh^3,\;\; d(s)=\frac{b}{h}s$$

$$\overline{S}_y(s)=-\frac{1}{2}s\,d(s)\left(-\frac{2}{3}h+\frac{2}{3}s\right)=\frac{bs^2}{3h}(h-s)$$

Pozn.: Napětí τ_{xy} nejsou nulová.

Příklad – určete smyková napětí od síly V_y

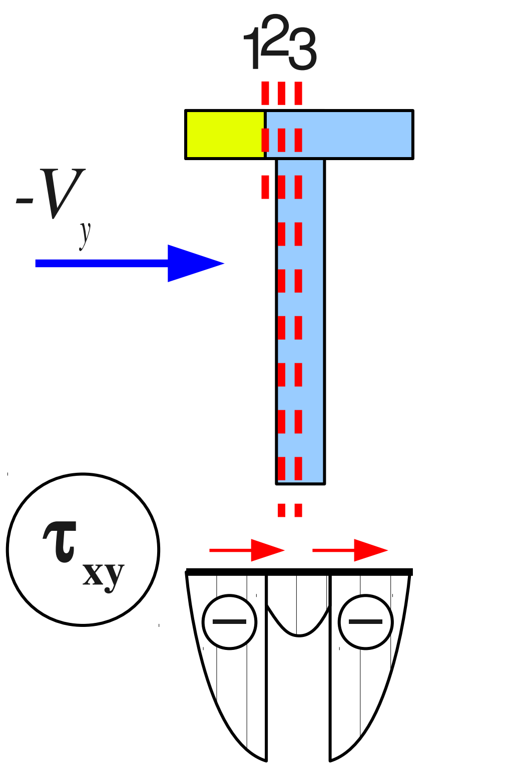


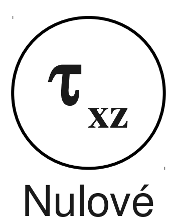
$$\tau_{xs} = \frac{V_y(x)\boxed{\overline{S}_z}}{bI_z}, \quad V_y = -22\ \mathrm{kN}$$

$$I_z = \frac{1}{12}\left(0.35 \cdot 0.05^3 + 0.05 \cdot 0.25^3\right) = 6.875\mathrm{e}-5\ \mathrm{m}^4$$

$$\overline{S}_z^{\overline{1,2}} = 0.1 \cdot 0.05 \cdot 0.075 = 3.75\mathrm{e}-4\ \mathrm{m}^3$$

$$\overline{S}_z^{\overline{3}} = \overline{S}_z^{\overline{1,2}} + 0.4 \cdot \frac{0.025^2}{2} = 5.0\mathrm{e}-4\ \mathrm{m}^3$$



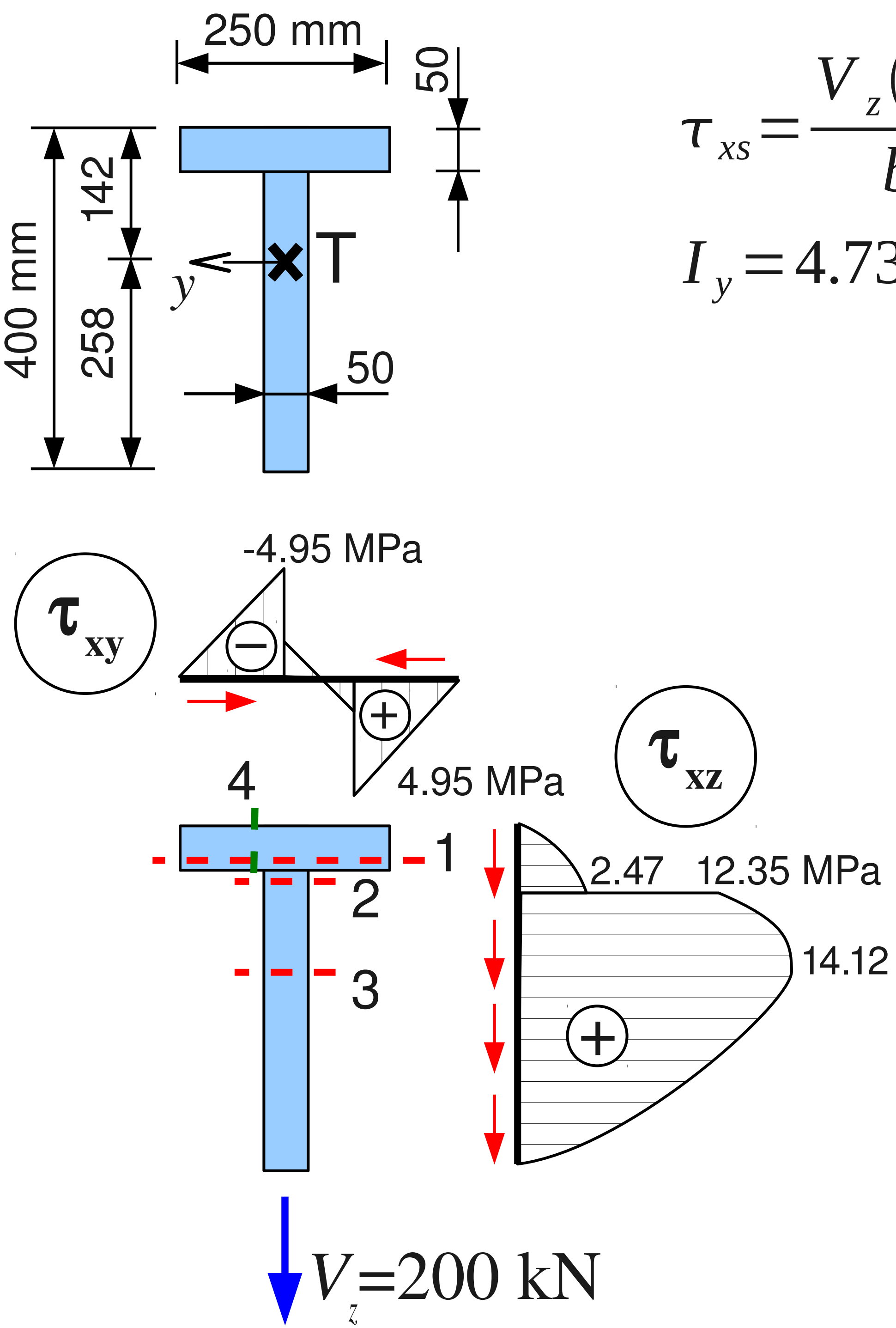


$$\tau_{xs}^{\overline{1}} = \frac{-0.022 \cdot 3.75\mathrm{e}-4}{\mathbf{0.05}\, I_z} = -2.40\ \mathrm{MPa}$$

$$\tau_{xs}^{\overline{2}} = \frac{-0.022 \cdot 3.75\mathrm{e}-4}{\mathbf{0.4}\, I_z} = -0.30\ \mathrm{MPa}$$

$$\tau_{xs}^{\overline{3}} = \frac{-0.022 \cdot 5.0\mathrm{e}-4}{\mathbf{0.4}\, I_z} = -0.40\ \mathrm{MPa}$$

Příklad – určete smyková napětí od posouvající síly V_z



$$\tau_{xs} = \frac{V_z(x)\boxed{\bar{S}_y}}{bI_y}, \quad V_z = 200\ \text{kN}$$

$$I_y = 4.73\text{e}-4\ \text{m}^4$$

$$\bar{S}_y^{\overline{1,2}} = 0.25 \cdot 0.05 \cdot 0.117 = 1.46\text{e}-3\ \text{m}^3$$

$$\bar{S}_y^{\bar{3}} = \bar{S}_y^{\overline{1,2}} + 0.05 \cdot \frac{0.092^2}{2} = 1.67\text{e}-3\ \text{m}^3$$

$$\bar{S}_y^{\bar{4}} = 0.1 \cdot 0.05 \cdot (-0.117) = -5.85\text{e}-4\ \text{m}^3$$

$$\tau_{xs}^{\bar{1}} = \frac{0.2 \cdot 1.46\text{e}-3}{\mathbf{0.25}\, I_y} = 2.47\ \text{MPa}$$

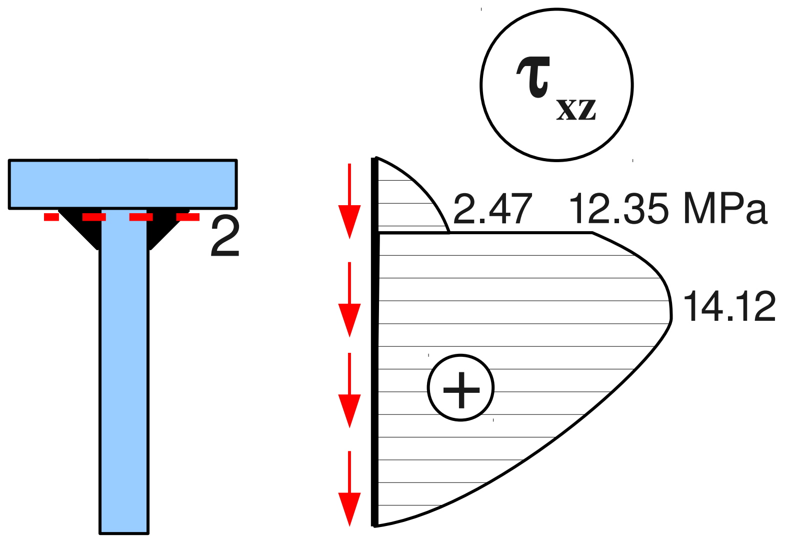
$$\tau_{xs}^{\bar{2}} = \frac{0.2 \cdot 1.46\text{e}-3}{\mathbf{0.05}\, I_y} = 12.35\ \text{MPa}$$

$$\tau_{xs}^{\bar{3}} = \frac{0.2 \cdot 1.67\text{e}-3}{0.05\, I_y} = 14.12\ \text{MPa}$$

$$\tau_{xs}^{\bar{4}} = \frac{0.2 \cdot (-5.85\text{e}-4)}{0.05\, I_y} = -4.95\ \text{MPa}$$

Příklad – určete smykové napětí v koutovém svaru

Využijte výsledky z minulého příkladu a uvažujte tloušťku svaru 4 mm.

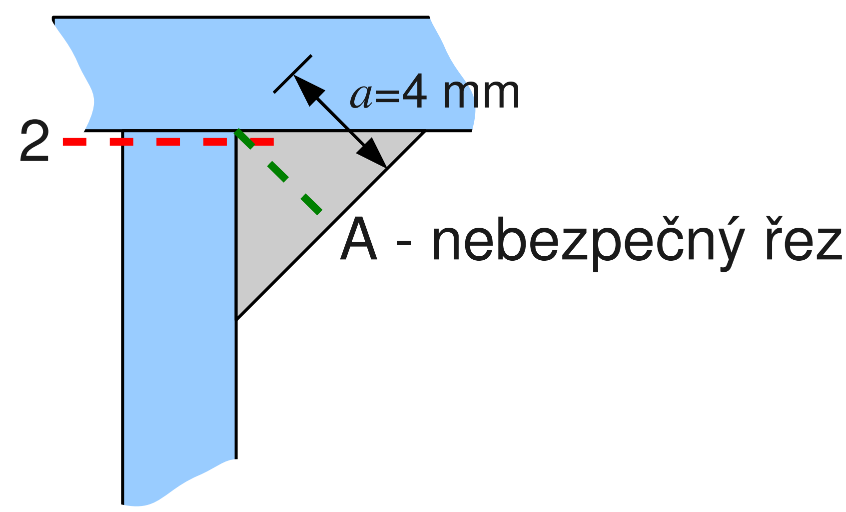


Svary musí přenést smykový tok:

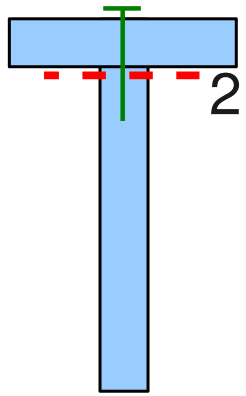
$$t_{xz} = 12.35 \cdot 0.05 = 2.47 \cdot 0.25 = 0.618 \ \text{MN/m'}$$

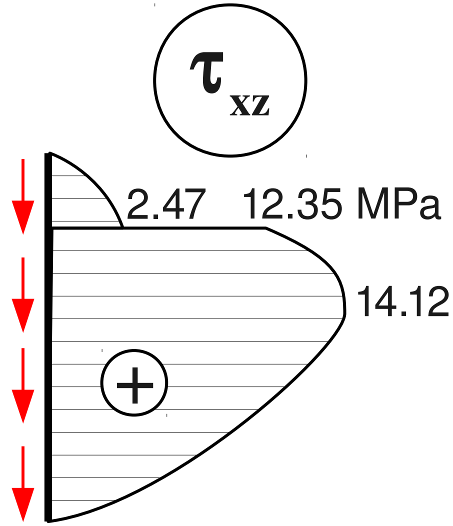
Svary na jeden běžný metr nosníku musí tedy přenést 618 kN. Na jeden svar připadá polovina, tj. 309 kN. Smykové napětí v nebezpečném řezu A:

$$\tau_{\parallel} = \frac{t_{xz}}{2a} = \frac{0.618}{2 \cdot 0.004} = \frac{0.309}{0.004} = 77.25 \ \text{MPa}$$



Příklad – určete smykovou sílu na jeden spřahovací trn





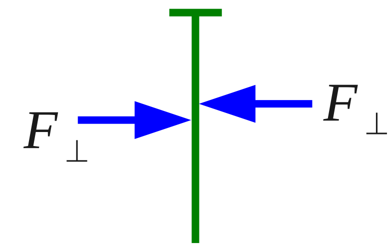
Využijte výsledků z minulého příkladu.

Trny opět musí přenést smykový tok:

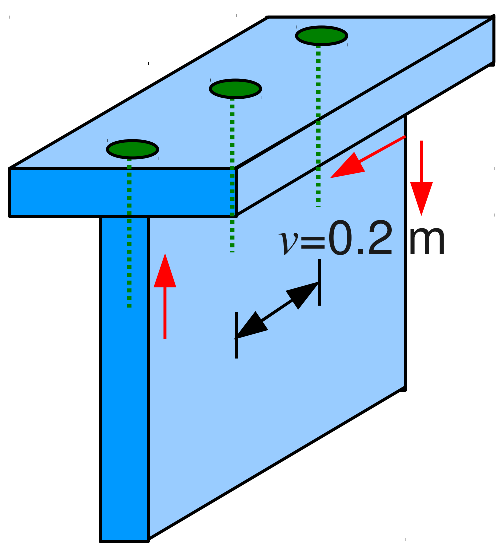
$$t_{xz} = 12.35 \cdot 0.05 = 2.47 \cdot 0.25 = 0.618 \ \mathrm{MN/m'}$$

Na jeden trn připadá smyková síla:

$$F_{\perp} = 618 \cdot 0.2 = 123.6 \ \mathrm{kN}$$

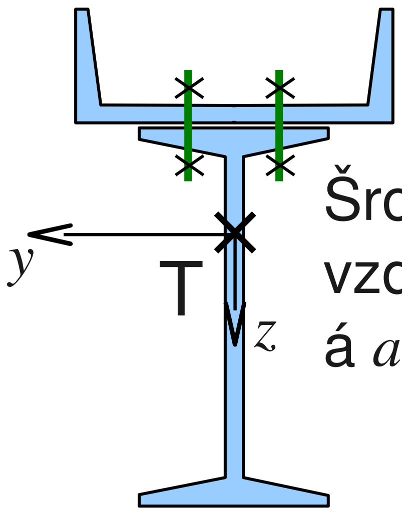


Ocelový hmoždík „Bulldog“

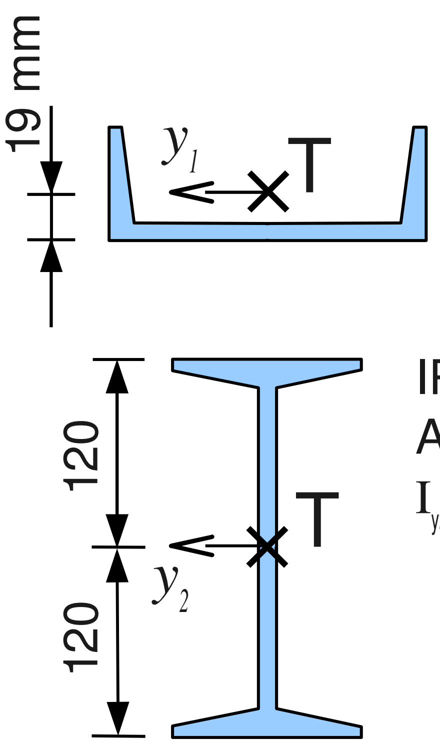


M. Patrick: University of Western Sydney

Příklad – určete smykové zatížení jednoho šroubu



Šrouby ve vzdálenostech á a=0.2 m.



UPN 160
A=2400 mm^2
I_{y1}=8.53e-7 m^4

IPN 240
A=4610 mm^2
I_{y2}=4.25e-5 m^4

Výpočet těžiště a charakteristik složeného průřezu:

$$z_T = \frac{2400\cdot(-19)+4610\cdot 120}{2400+4610} = 72\ \text{mm}$$

$$I_y = 8.53\text{e}-7 + 2.4\text{e}-3\cdot(-0.091)^2 + 4.25\text{e}-5 + 4.61\text{e}-3\cdot 0.048^2 = 7.385\text{e}-5\ \text{m}^4$$

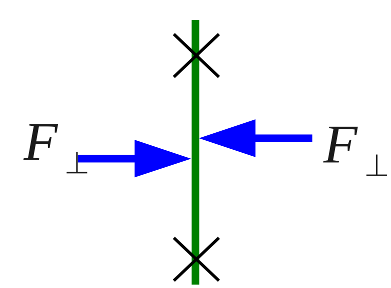
$$\overline{S_y} = -2.4\text{e}-3\cdot(-0.072-0.019) = 2.184\text{e}-4\ \text{m}^3$$

Na jeden šroub připadá smyková síla:

$$V_z = 200\ \text{kN}$$

$$F_\perp = t_{xz}\cdot\frac{a}{2} = \frac{V_z\overline{S_y}}{I_y}\cdot\frac{a}{2} = \frac{200\cdot 2.184\text{e}-4\cdot 0.2}{2\cdot 7.385\text{e}-5}$$

$$F_\perp = 59.1\ \text{kN}$$



Otázky

1. Nakreslete průběh posouvající síly pro nosník, který je zatížen pouze koncovými momenty a tím je v rovnováze. Proč nevzniká posouvající síla ani smykové napětí? Vysvětlete na modelu nosníku, který je složen z vrstviček elastických vláken.
2. Kolikrát se zvětší průhyb nosníku, pokud se obdélníkový průřez usmykne v rovině procházející jeho těžištěm?
3. Při výpočtu smykového toku se snažíme vést co nejužší řez. Vysvětlete, jaké důsledky může mít nerespektování této zásady.
4. Při zatížení nosníku posouvající silou V_z vnikají napětí τ_{xz}. Kterou sílu dostaneme integrací τ_{xz} po průřezu? Ukažte průřez, kde vznikají i τ_{xy}.
5. Co je střed smyku a smykové ochabnutí? Uveďte příklady úloh, kdy se musí smykové ochabnutí uvažovat.
6. Nakreslete průběh smykového napětí τ_{xz} na kruhovém průřezu. Dokažte, že výsledný průběh napětí má parabolický průběh.
7. Ukažte průřez, kde v těžišti nevzniká největší smykové napětí. Existuje takový průřez pro smykový tok?

Vytvořeno 04/2011 v OpenOffice 3.2, Ubuntu 10.04, Vít Šmilauer, ČVUT.
Poděkování patří zejména M. Jiráskovi za inspiraci jeho přednáškami.