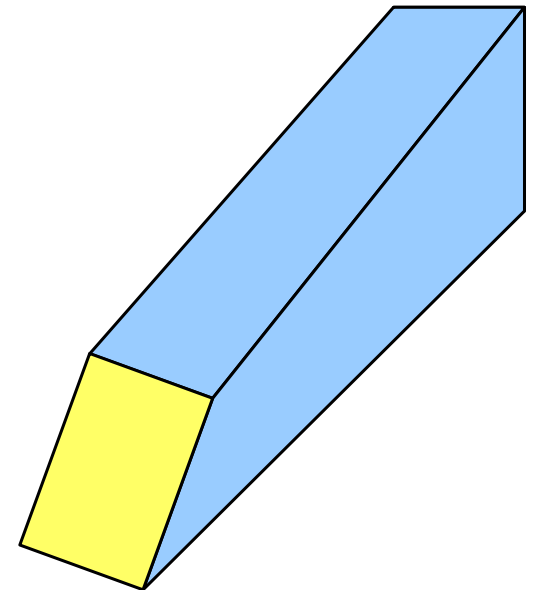


Přednáška 10

Kroucení prutů

- 1) Kroucení prutu s kruhovým průřezem
- 2) Volné kroucení prutu s průřezem
 - a) Masivním
 - b) Tenkostěnným otevřeným
 - c) Tenkostěnným uzavřeným
- 3) Ohybové (vázané) kroucení

Příklady



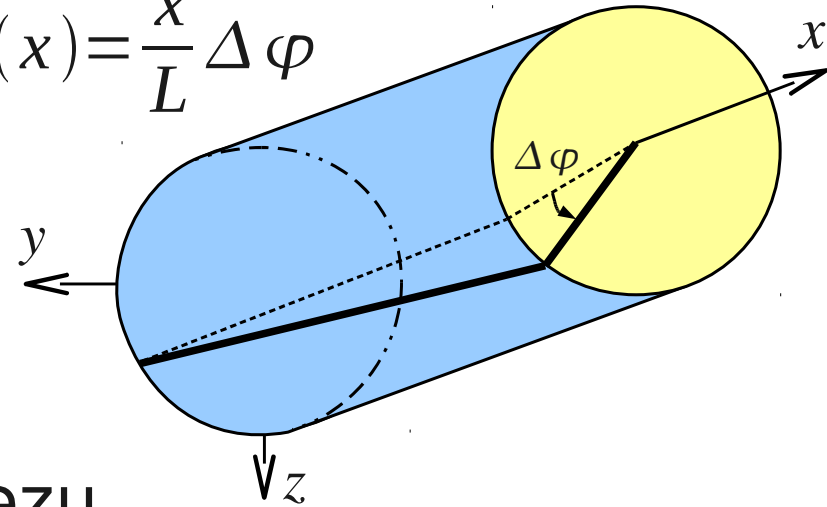
Rovnoměrné kroucení kruhové tyče

Původní poloha bodu

$$y = r \cos \alpha$$

$$z = r \sin \alpha$$

$$\varphi_x(x) = \frac{x}{L} \Delta \varphi$$



Nová poloha bodu po natočení průřezu

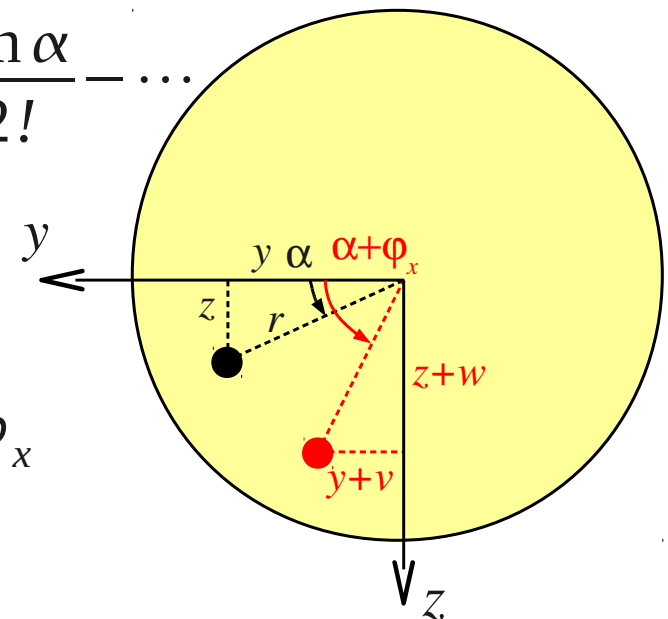
$$y + v = r \cos(\alpha + \varphi_x) = r \cos \alpha - r \varphi_x \sin \alpha - r \varphi_x^2 \frac{\cos \alpha}{2!} + \dots$$

$$z + w = r \sin(\alpha + \varphi_x) = r \sin \alpha + r \varphi_x \cos \alpha - r \varphi_x^2 \frac{\sin \alpha}{2!} - \dots$$

Posuny bodu, pokud $\varphi_x \ll 1$

$$v = r \cos(\alpha + \varphi_x) - r \cos \alpha \approx -r \varphi_x \sin \alpha = -z \varphi_x$$

$$w = r \sin(\alpha + \varphi_x) - r \sin \alpha \approx r \varphi_x \cos \alpha = y \varphi_x$$



Rovnoměrné kroucení kruhové tyče

Pole posunů

$$v(x, y, z) = -z \varphi_x(x)$$

$$w(x, y, z) = y \varphi_x(x)$$

Rovnoměrné kroucení

$$\varphi_x(x) = \frac{x}{L} \Delta \varphi$$

Pole deformací

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \frac{\varphi_x(x)}{dx} = -z \frac{\Delta \varphi}{L} = -z \theta$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = y \frac{\varphi_x(x)}{dx} = y \frac{\Delta \varphi}{L} = y \theta$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\varphi_x(x) + \varphi_x(x) = 0$$

V rovině xy nedochází ke smykovým deformacím.

θ – Poměrné (relativní) zkroucení

Rovnoměrné kroucení kruhové tyče - napětí

Pole napětí

$$\tau_{xy}(x, y, z) = G \gamma_{xy} = -G \theta z$$

$$\tau_{xz}(x, y, z) = G \gamma_{xz} = G \theta y$$

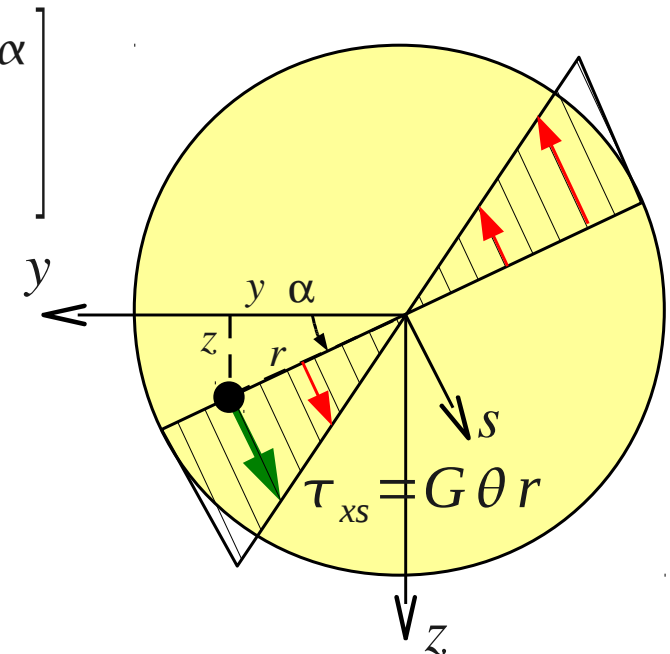
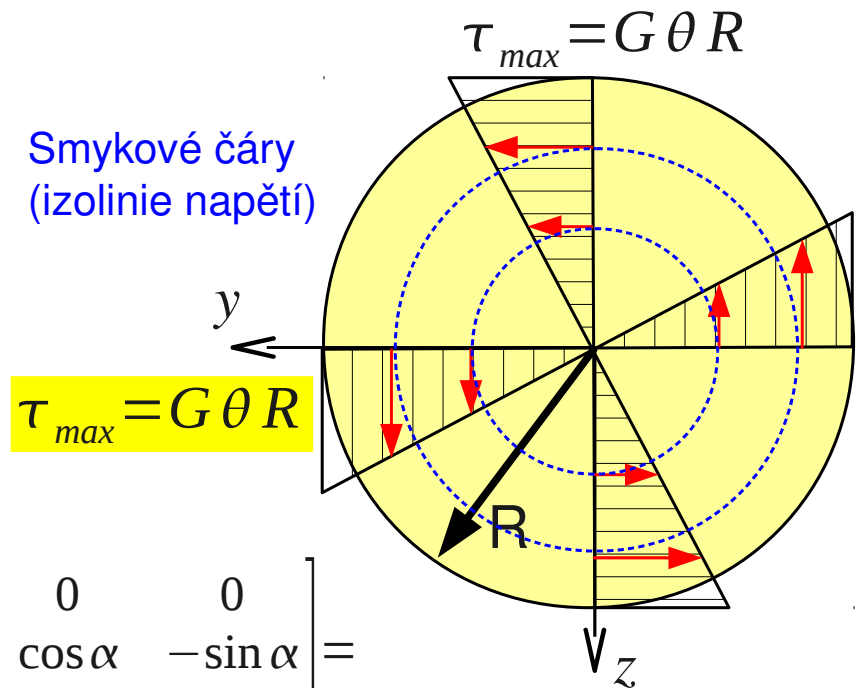
$$\sigma' = A \sigma A^T$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & 0 & 0 \\ \tau'_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} =$$

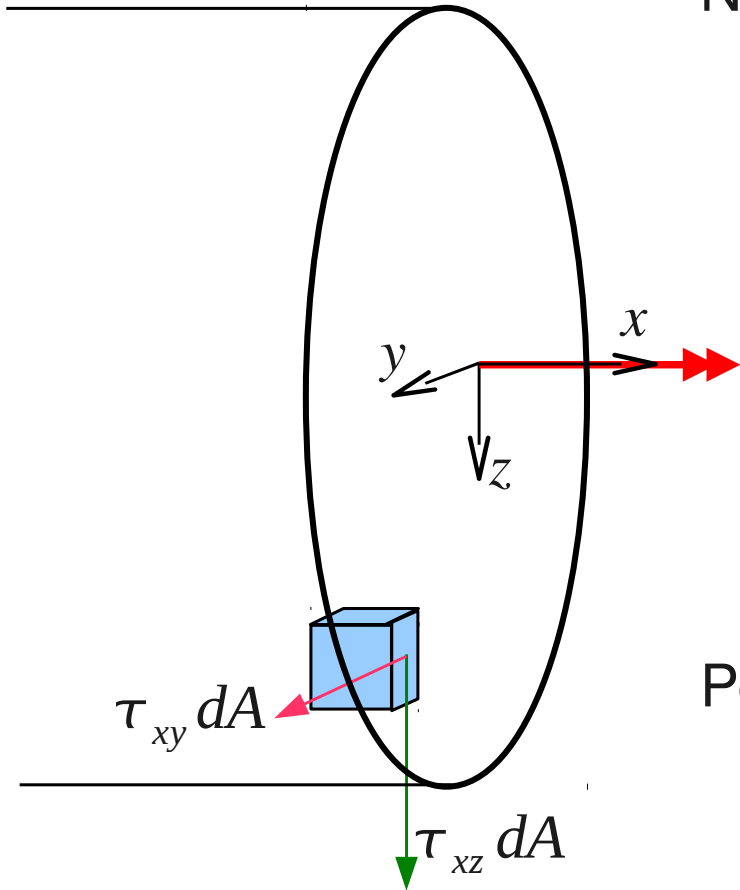
$$\begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} \cos \alpha + \tau_{xz} \sin \alpha & -\tau_{xy} \sin \alpha + \tau_{xz} \cos \alpha \\ \tau_{xy} \cos \alpha + \tau_{xz} \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\tau_{xy} \sin \alpha + \tau_{xz} \cos \alpha & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rotace tenzoru napětí zde funguje stejně jako rotace vektoru napětí.

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= -\tau_{xs} \sin \alpha \\ \tau_{xz} &= \tau_{xs} \cos \alpha \\ \tau_{xs} &= \tau_{xz}' \\ \tau_{xy}' &= 0 \end{aligned}$$



Vztah smykových napětí a kroučícího momentu



Nenulové složky napětí

$$\tau_{xy}(x, y, z) = -G\theta z$$

$$\tau_{xz}(x, y, z) = G\theta y$$

$$M_x = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA$$

$$M_x = \int_A (G\theta y^2 + G\theta z^2) dA = G\theta \int_A (y^2 + z^2) dA$$

Polární moment setrvačnosti průřezu

$$I_p = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A r^2 dA = I_y + I_z$$

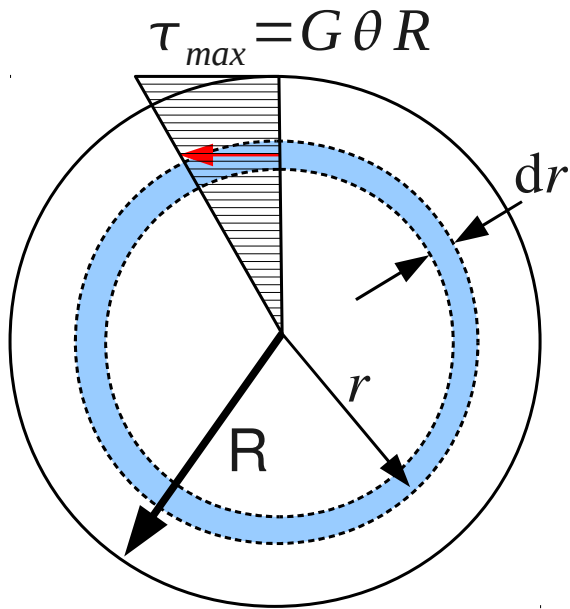
$$M_x = G I_p \theta$$

Tuhost kruhového průřezu v kroucení

Poměrné (relativní) zkroucení prutu

Příklad – ověřte ekvivalenci smykového napětí a M_x

- Kruhová tyč o poloměru R



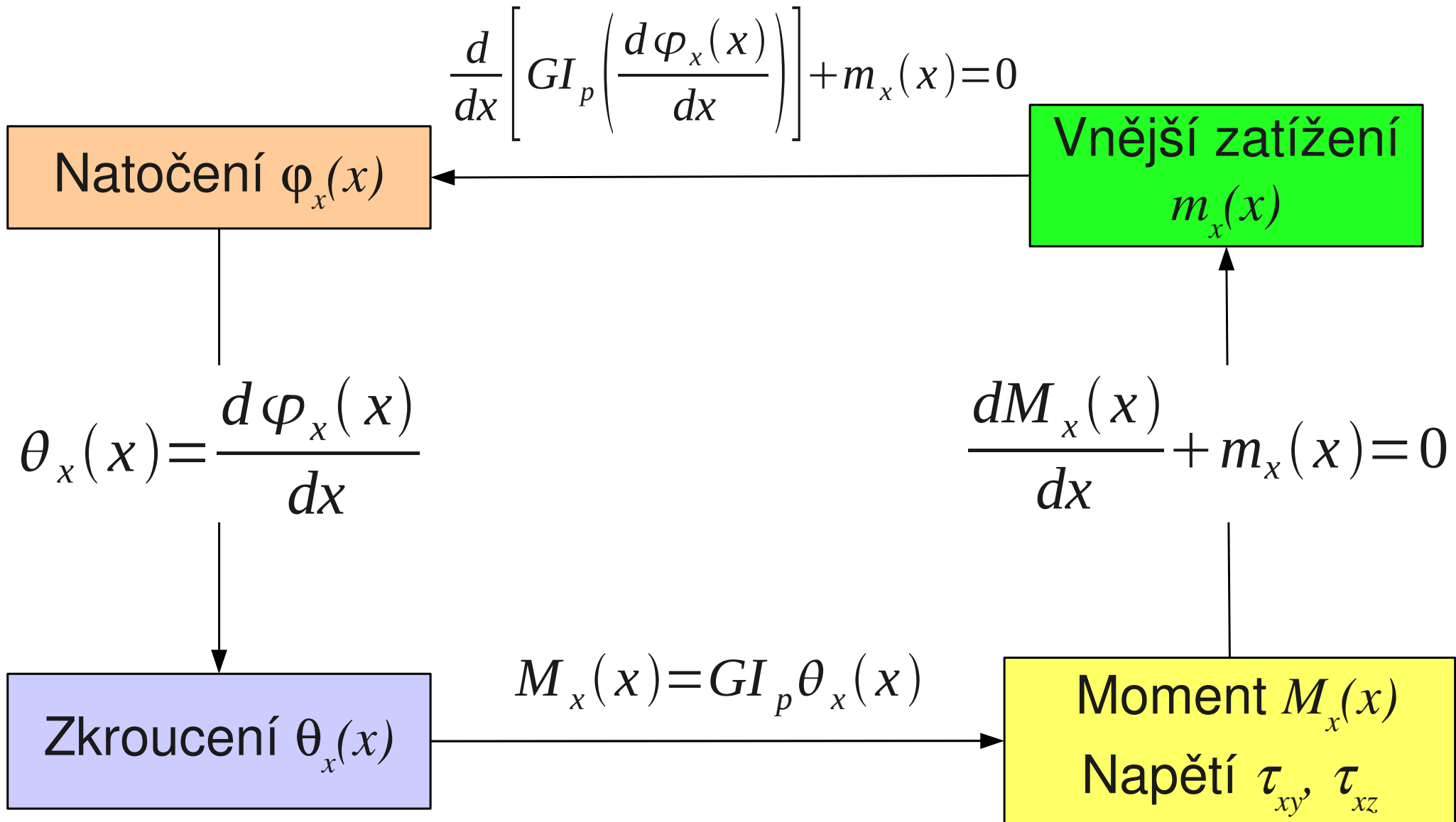
$$M_x = \int_0^R \underbrace{2\pi r}_{\text{obvod}} \cdot \underbrace{\frac{G\theta R}{R} r}_{\text{napětí}} \cdot \underbrace{r}_{\text{rameno}} dr$$

$$M_x = \int_0^R 2\pi G\theta \cdot r^3 dr = G\theta \frac{\pi R^4}{2}$$

Vzorec s využitím polárního moment setrvačnosti průřezu

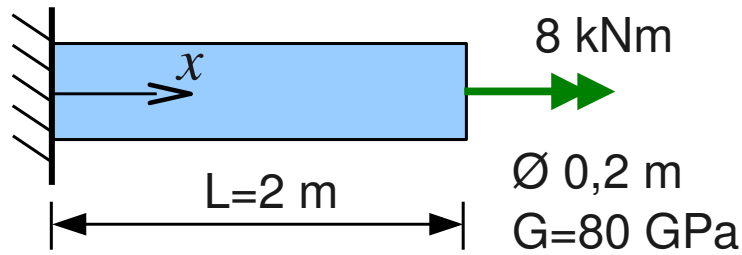
$$M_x = G I_p \theta = G\theta \left(\frac{\pi R^4}{4} + \frac{\pi R^4}{4} \right) = G\theta \frac{\pi R^4}{2}$$

Základní rovnice krouceného prutu



Příklad - rovnoměrné kroucení kruhové tyče

Určete průběh smykového napětí a průběh natočení



$$I_p = I_y + I_z = 2 \frac{\pi R^4}{4} = 1.571 \text{e-}4 \text{ m}^4$$

$$\theta_x(x) = \frac{M_x(x)}{GI_p} = 6.37 \text{e-}4 \text{ rad/m}$$

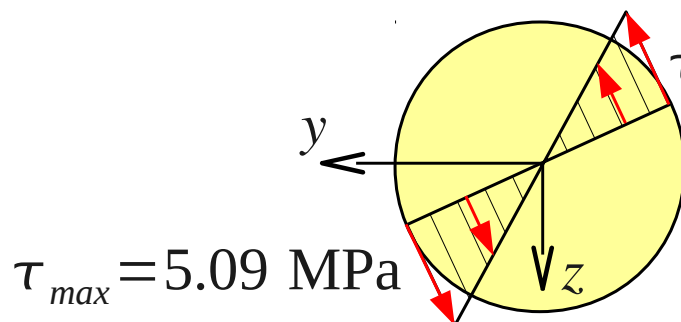
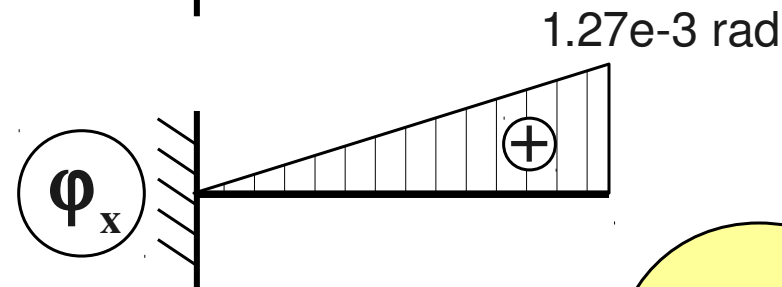
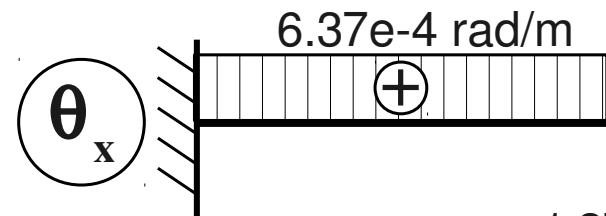
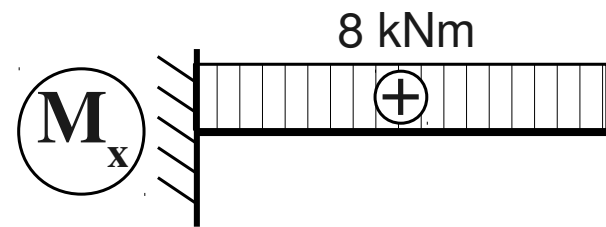
$$\theta_x(x) = \frac{d\varphi_x(x)}{dx}$$

$$\varphi_x(x) = \int_0^L \theta_x(x) dx = 6.37 \text{e-}4 x + \underbrace{C_1}_0 \quad \varphi_x(0) = 0$$

$$\varphi_x(L) = \Delta \varphi = 2 \cdot 6.37 \text{e-}4 = 1.27 \text{e-}3 \text{ rad}$$

$$\tau_{max} = 5.09 \text{ MPa}$$

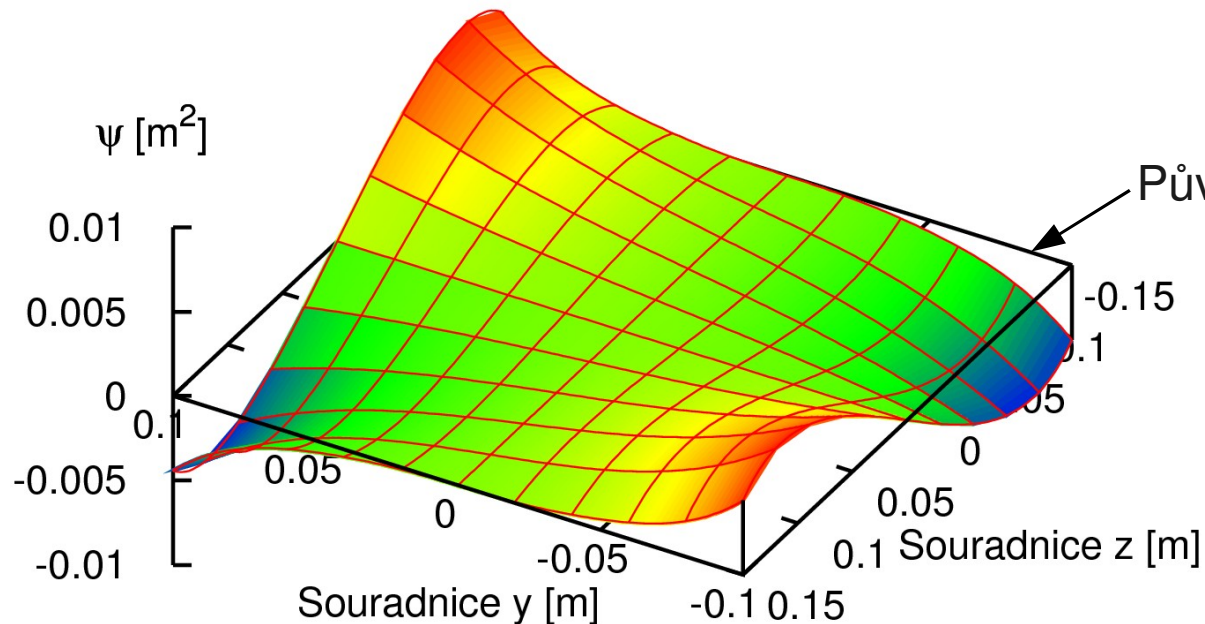
$$\tau_{max} = G \theta_x(x) R = 5.09 \text{ MPa}$$



Deplanace průřezu

- Při kroucení obecně ztrácejí průřezy rovinnost, s výjimkou rotačně symetrických průřezů, tj. kruhu a mezikruží.
- **Deplanace = ztráta rovinnosti průřezu**
- Pole posunutí s uvážením funkce deplanace $\psi(y,z)$

$$u(y, z) = \theta(x) \psi(y, z)$$



Funkce deplanace pro
obdélníkový průřez 0,2 x 0,3 m.

Volné kroucení obecného průřezu

- Pro deplanační funkci lze odvodit Laplaceovu rovnici

$$\frac{\partial^2 \psi(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(y, z)}{\partial z^2} = 0$$

Řešení rovnice pro obdélníkový průřez a okrajové podmínky viz dále.

- Odvození Laplaceovy rovnice: vyjdeme z pole posunů, uvažujeme nejprve rovnoměrné kroucení

$$\frac{d\varphi_x(x)}{dx} = \theta = \text{konst.}$$

$$u(x, y, z) = \theta \psi(y, z)$$

$$v(x, y, z) = -z \varphi_x(x)$$

$$w(x, y, z) = y \varphi_x(x)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$



$$\gamma_{xy}(x, y, z) = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right)$$

$$\gamma_{xz}(x, y, z) = \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)$$

$$\gamma_{yz}(x, y, z) = -\varphi_x(x) + \varphi_x(x) = 0$$

Volné kroucení obecného průřezu

- Pole napětí

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz}$$



$$\tau_{xy}(x, y, z) = G \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right)$$

$$\tau_{xz}(x, y, z) = G \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)$$

- Cauchyho rovnice rovnováhy

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \bar{X} = 0$$

$$G \theta \left(\frac{\partial^2 \psi(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(y, z)}{\partial z^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(y, z)}{\partial z^2} = 0$$

Okrajová podmínka Laplaceovy rovnice

- Smykové napětí na okraji průřezu působí ve směru tečny

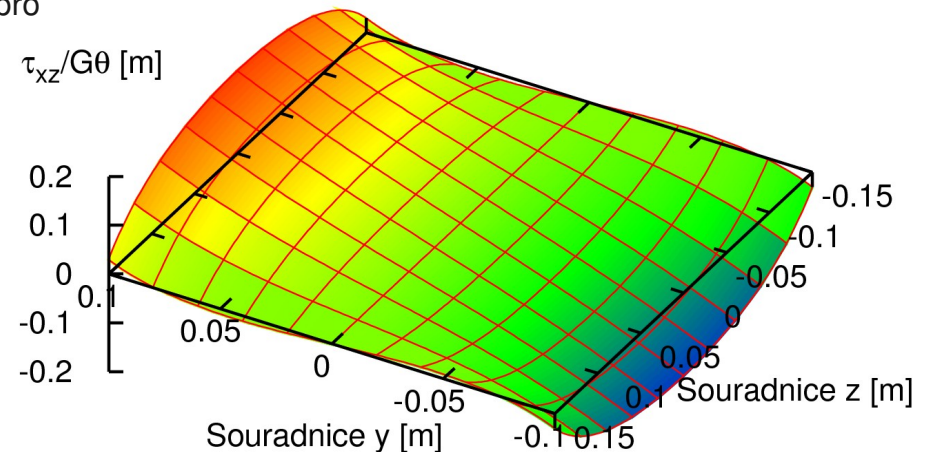
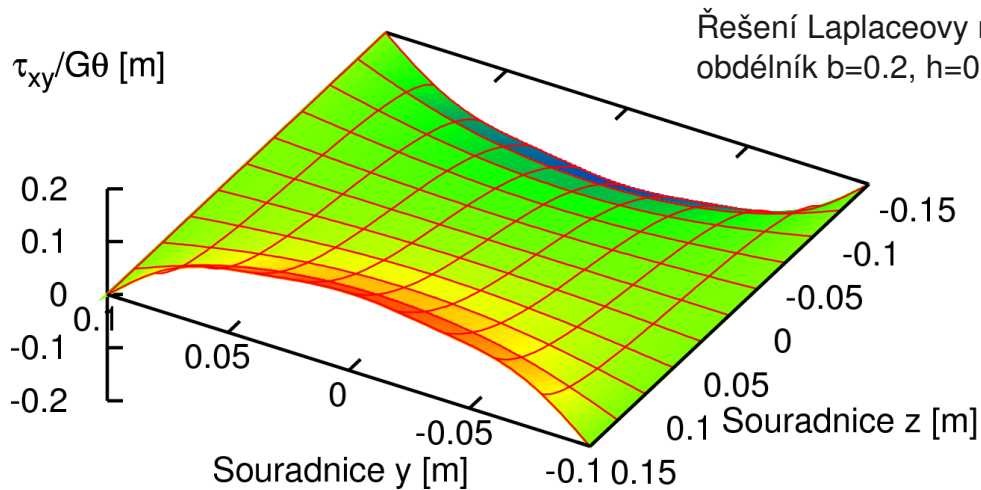
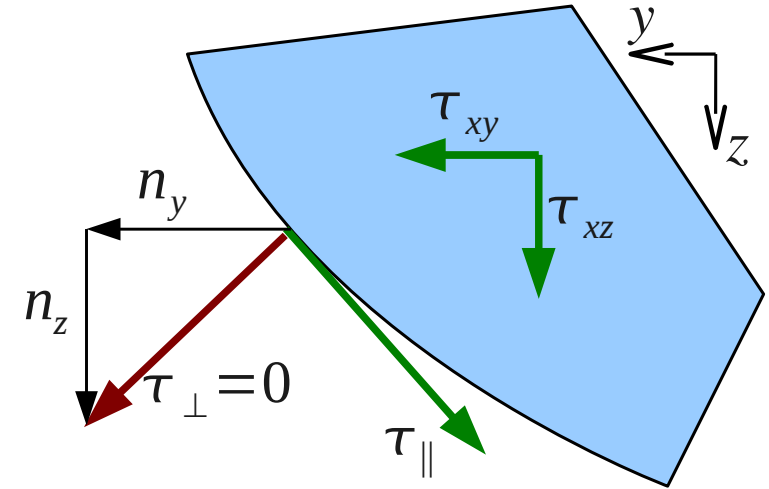
$$\tau_{\perp} = 0 = n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz}$$

$$\tau_{xy} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right), \tau_{xz} = G\theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)$$

$$n_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + n_z \frac{\partial \psi}{\partial z} = n_y z - n_z y$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = n_y z - n_z y$$

Na hranici je předepsána normálová derivace deplanační funkce (Neumannova podmínka)



Volné kroucení obecného prutu

- Při známé deplanační funkci lze vyjádřit složky napětí

$$\tau_{xy} = G \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right), \tau_{xz} = G \theta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)$$

- Kroutící moment

$$M_x = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA = G \theta \underbrace{\int_A \left(y^2 + z^2 + \frac{\partial \psi}{\partial z} y - \frac{\partial \psi}{\partial y} z \right) dA}_{I_k}$$

Moment tuhosti průřezu
ve volném kroucení

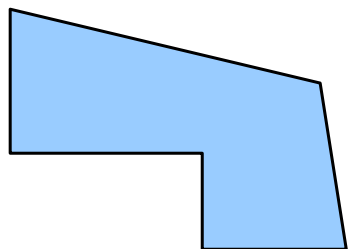
$$M_x = G I_k \theta$$

Tuhost průřezu ve
volném kroucení

Poměrné (relativní) zkroucení prutu

Volné kroucení masivního průřezu

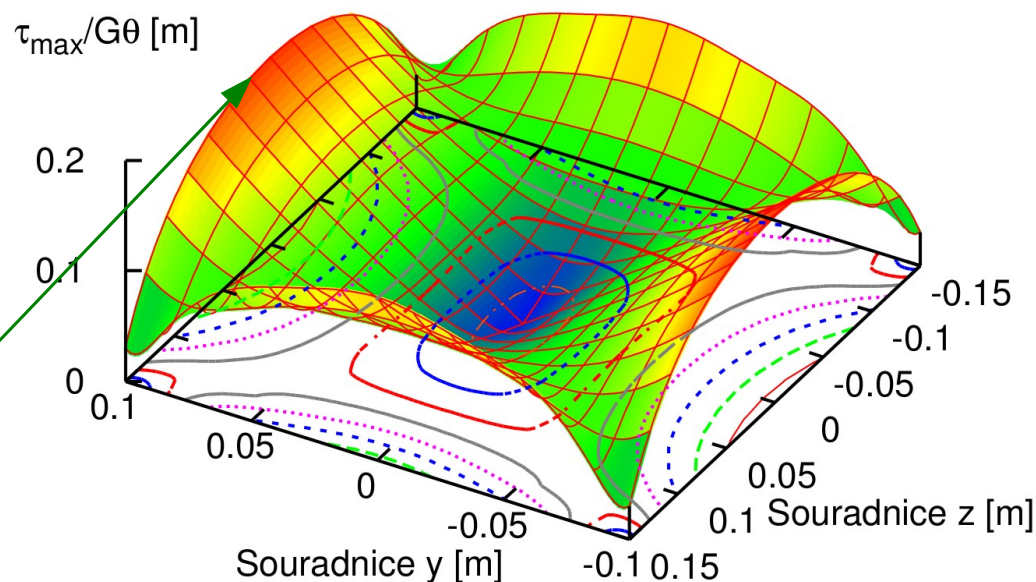
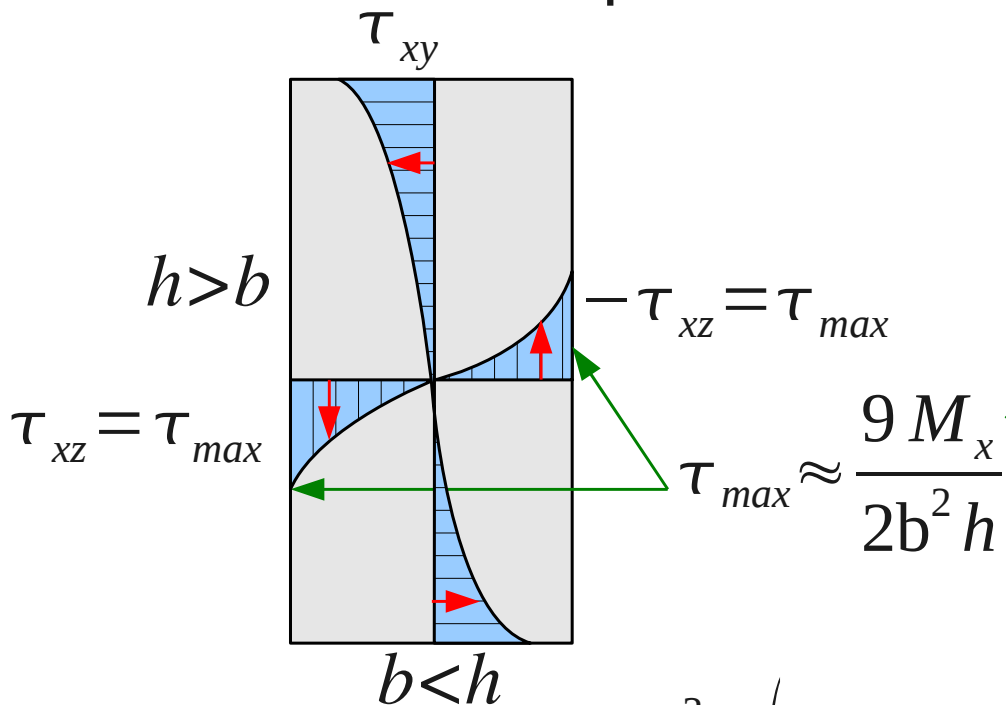
- Přibližné řešení pro masivní průřez **obecného tvaru**



$$I_k \approx \frac{A^4}{40I_p}$$

τ_{max} je nutné určit přímo z deplanační funkce

- Přesné řešení pro **obdélník** z Laplaceovy rovnice



$$I_k = \frac{b^3 h}{3} \left(1 - \frac{192b}{\pi^5 h} \sum_{n=0,1,\dots}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \tanh \frac{(2n+1)\pi h}{2b} \right)$$

Volné kroucení úzkého obdélníka

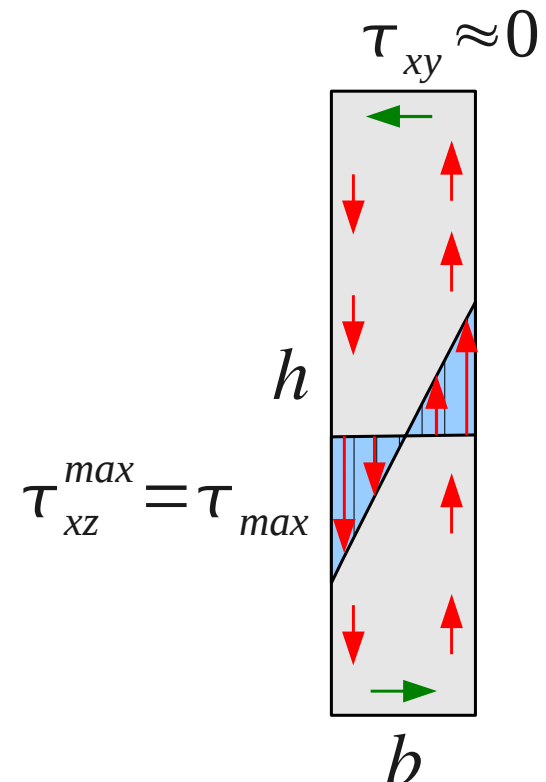
- Ponecháme první člen sumy a za předpokladu $b \ll h$

$$I_k \approx \frac{b^3 h}{3} \left(1 - \frac{192b}{\pi^5 h} \tanh \frac{\pi h}{2b} \right) = \frac{b^3 h}{3} \left(1 - 0.63 \frac{b}{h} \right)$$

- Smykové napětí je ve směru b rozloženo přibližně lineárně

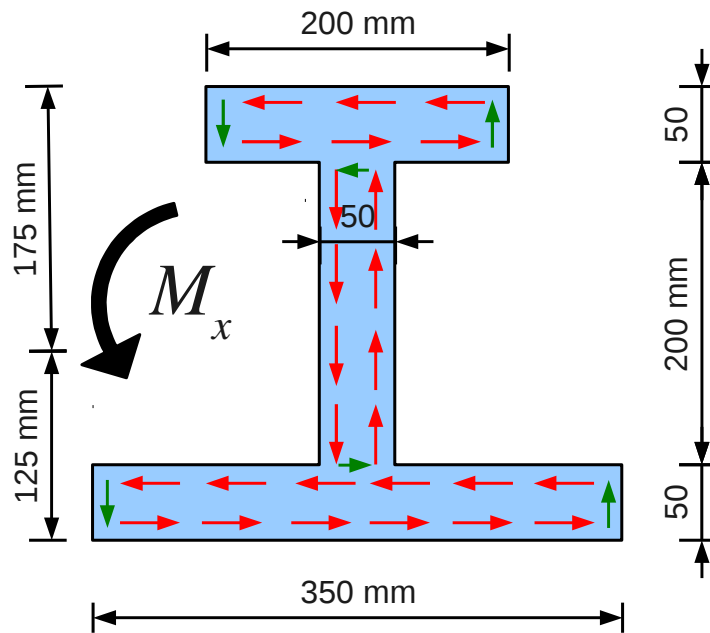
$$\tau_{max} = \frac{M_x}{I_k} b$$

Pozn. Napětí τ_{xy} a τ_{xz} je určeno z deplanační funkce. Výsledný moment od smykového napětí τ_{xz} dává přesně polovinu momentu M_x . Druhou polovinu momentu M_x tvoří malé napětí τ_{xy} , které ovšem působí na velkém rameni.

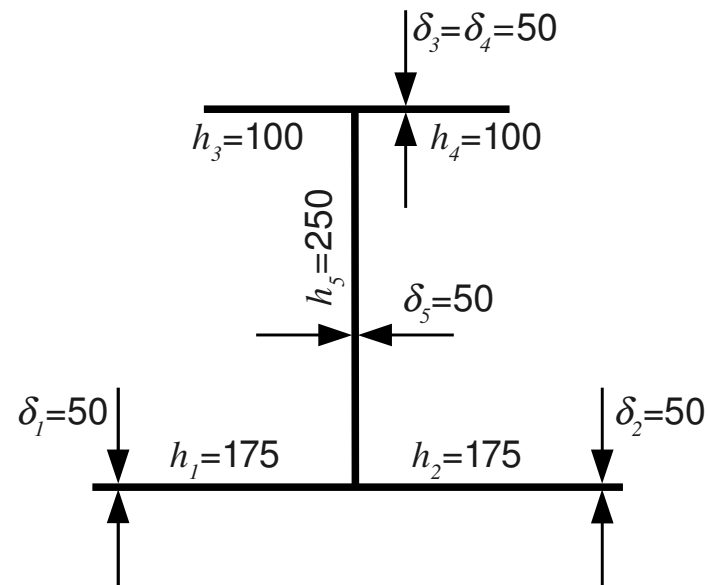


Volné kroucení otevřeného tenkostěnného průřezu

Otevřený tenkostěnný průřez



Střednice průřezu



Moment tuhosti v kroucení je součtem momentů tuhosti z jednotlivých větví

$$I_k \approx \frac{1}{3} \sum_n \delta^3 h$$

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{I_k} \delta_{max}$$

Největší smykové napětí vzniká v **nejtlustší** větvi!

Příklad – tenkostěnný otevřený průřez

Pro tenkostěnný průřez z předešlé stránky určete rozložení napětí a vzájemné natočení koncových průřezů. Prut je délky 3 m. $M_x = 12.95$ kNm, $G = 80.77$ GPa

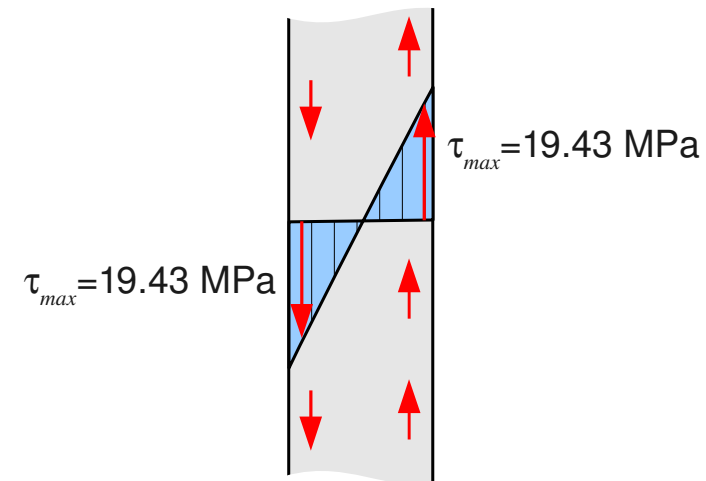
$$I_k = \frac{1}{3} \sum_n \delta^3 h = \frac{0.05^3}{3} (2 \cdot 0.175 + 2 \cdot 0.100 + 0.250) = 3.333e-5 \text{ m}^4$$

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{I_k} \delta_{max} = \frac{12.95e-3}{3.333e-5} 0.05 = 19.43 \text{ MPa}$$

$$\theta = \frac{M_x}{GI_k} = \frac{12.95}{80.77e+6 \cdot 3.333e-5} = 4.81e-3 \text{ m}^{-1}$$

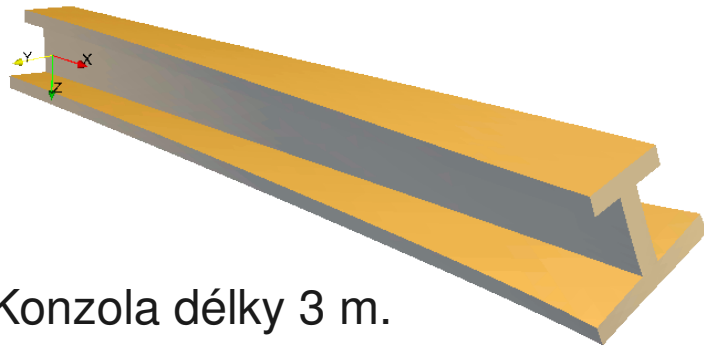
$$\Delta \varphi = \int_0^{3 \text{ m}} \theta dx = 3 \cdot 4.81e-3 = 1.44e-2 \text{ rad} = 0.83^\circ$$

Rozložení napětí po tloušťce střednic

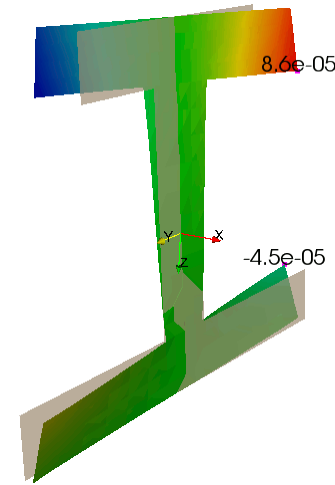


Příklad – tenkostěnný otevřený průřez

Simulace kroucení pomocí metody konečných prvků (kvadratické prostorové prvky brick). Díky vetknutí prutu je bráněno volné deplanaci. Vzájemné natočení krajních průřezu vychází o 22% menší, tj. 0.655° .

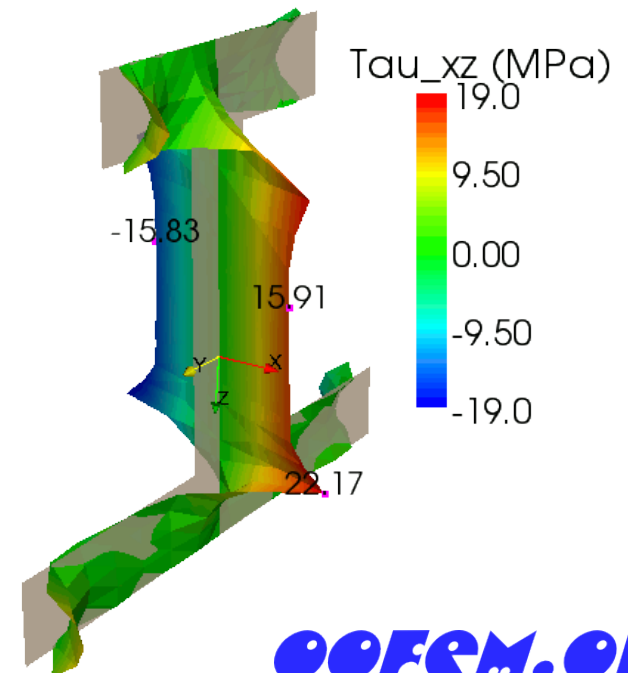
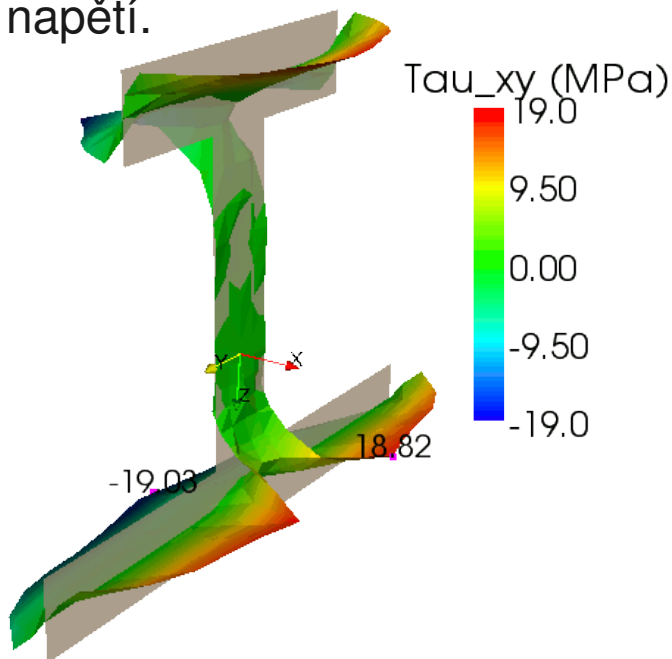


Konzola délky 3 m.
Deformace zvětšeny 50x.



Deplanace průřezu ve
2 m od vetknutí.
Deformace zvětšeny
500x. Posuny u udány
v metrech.

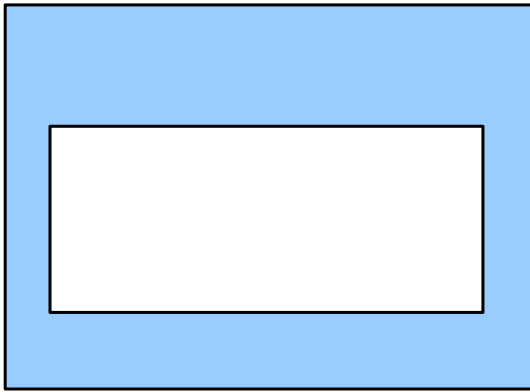
Smyková napětí.



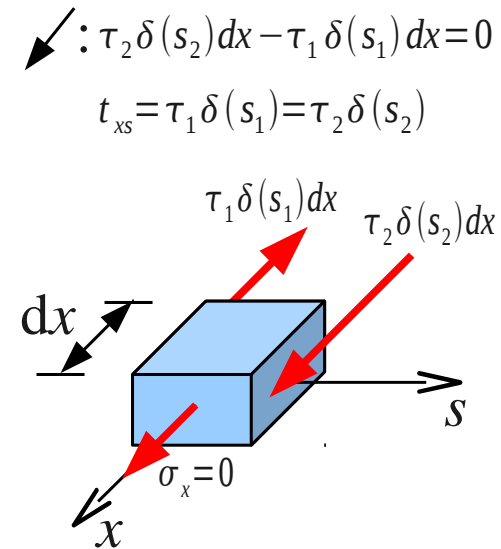
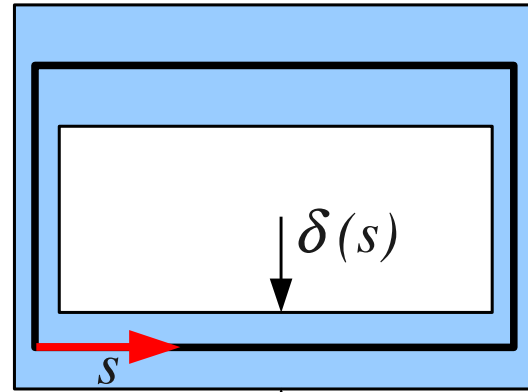
Volné kroucení uzavřeného tenkostěnného průřezu

- Smykový tok je konstantní podél střednice průřezu, smykové napětí je rozloženo rovnoměrně po tloušťce

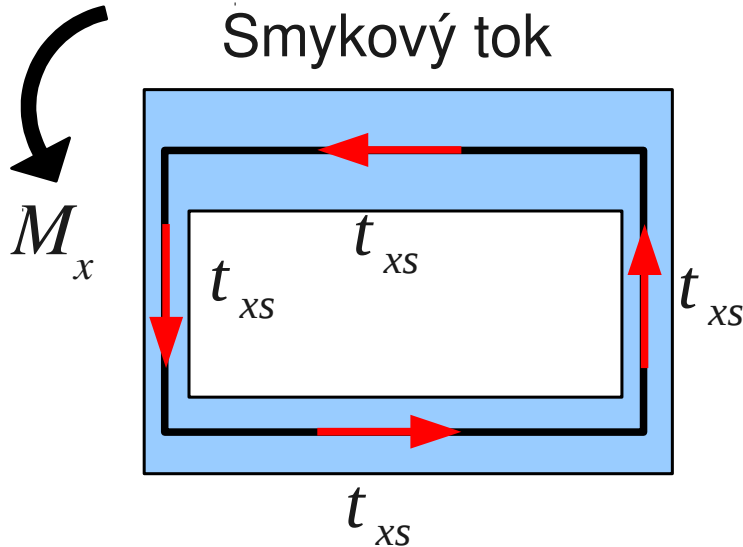
Uzavřený tenkostěnný průřez



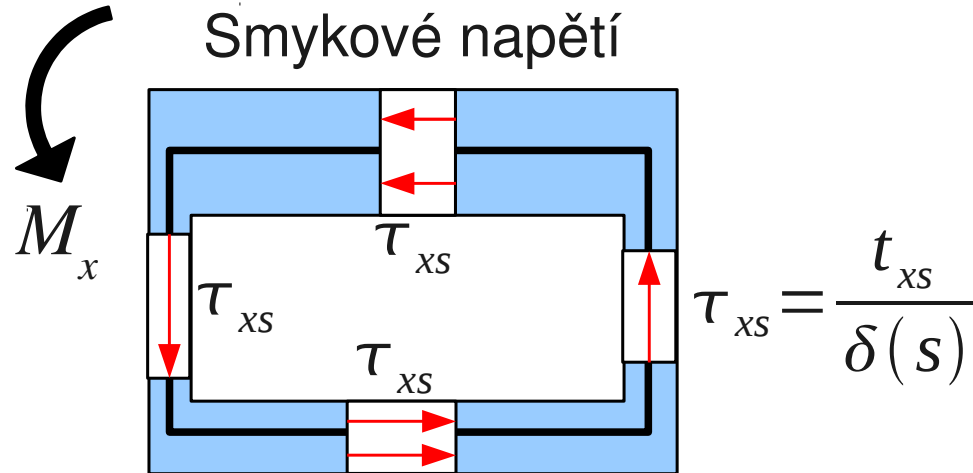
Střednice průřezu



Smykový tok



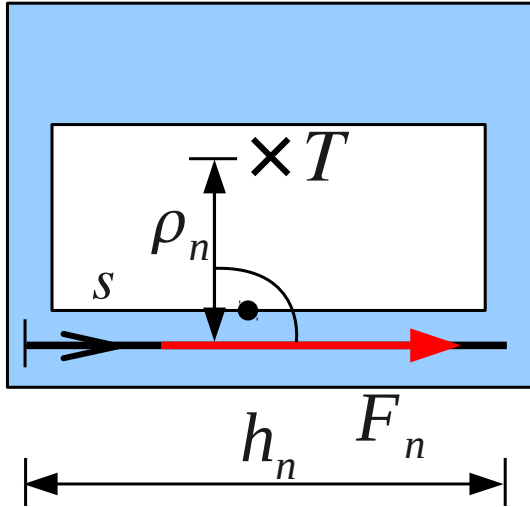
Smykové napětí



Největší napětí vzniká v **nejtenčí** části!

Volné kroucení uzavřeného tenkostěnného průřezu

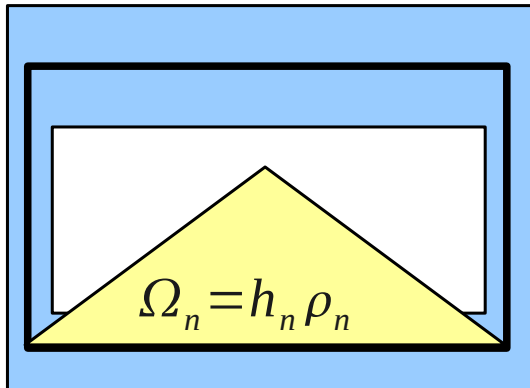
Příspěvek segmentu střednice číslo n ke kroučicímu momentu



$$F_n = \tau_{xs} \delta_n h_n = t_{xs} h_n$$

$$F_n \rho_n = t_{xs} h_n \rho_n = t_{xs} \Omega_n$$

Ω_n ... Dvojnásobná plocha opaná průvodičem

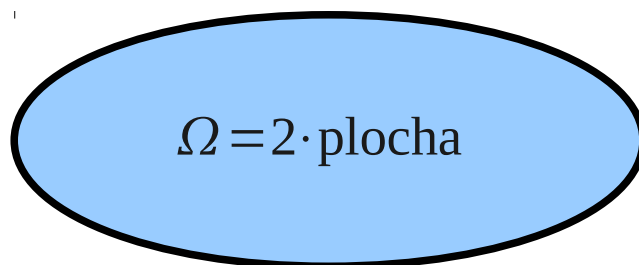
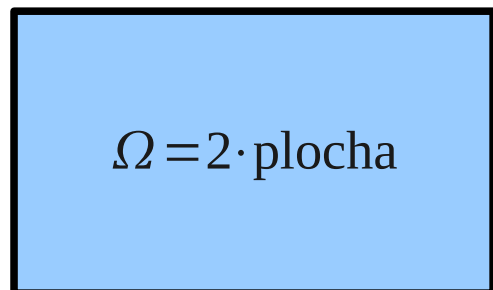


Celkový kroučicí moment

$$M_x = \sum_n F_n \rho_n = t_{xs} \sum_n \Omega_n$$

$$M_x = t_{xs} \Omega = t_{xs} \oint \rho(s) ds \quad 1. \text{ Bredtův vzorec}$$

Volné kroucení uzavřeného tenkostěnného průřezu



Z deplanační funkce uzavřeného průřezu lze odvodit 2. Bredtův vzorec

$$\theta = \frac{M_x}{GI_k}$$

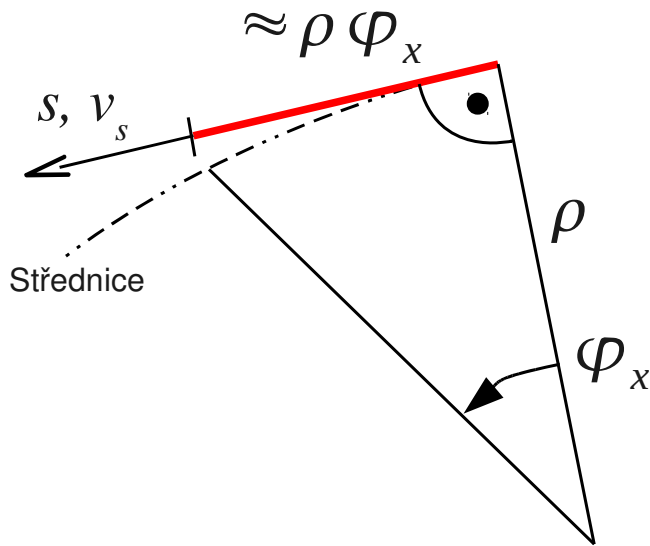
$$I_k = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}}$$

2. Bredtův vzorec

Moment tuhosti ve volném kroucení

GI_k ... Torzní tuhost průřezu. U uzavřených průřezů řádově převyšuje torzní tuhost průřezů otevřených (při podobných tvarech průřezů).

Odvození 2. Bredtova vzorce



$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v_s}{\partial x} = \frac{\tau_{xs}}{G} = \frac{t_{xs}}{G \delta} = \frac{M_x}{G \Omega \delta}$$

$$v_s \approx \rho \varphi_x, \quad \frac{\partial v_s}{\partial x} = \rho \theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{M_x}{G \Omega \delta} - \frac{\partial v_s}{\partial x} = \frac{M_x}{G \Omega \delta} - \rho \theta$$

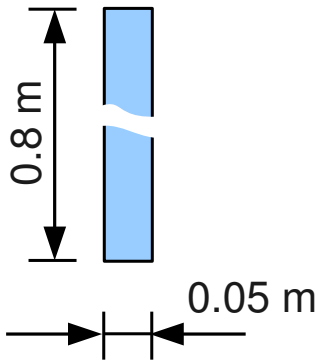
$$u = \int_0^s \frac{M_x}{G \Omega \delta} ds - \int_0^s \rho \theta ds + C_1 = \frac{M_x}{G \Omega} \int_0^s \frac{ds}{\delta} - \theta \Omega + C_1$$

Integrace po obvodě průřezu musí vést ke stejnému posunu u , tj. $C_1=0$.

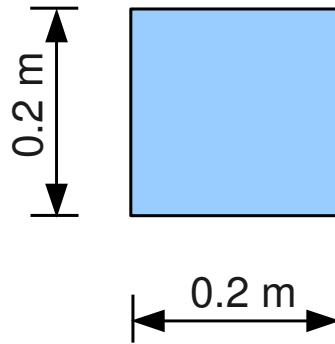
$$\frac{M_x}{G \Omega} \oint \frac{ds}{\delta} = \theta \Omega, \quad \underbrace{\frac{M_x}{G \theta}}_{I_k} \oint \frac{ds}{\delta} = \Omega^2, \quad I_k = \frac{\Omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}}$$

Příklad – porovnání průřezů stejných ploch v kroucení

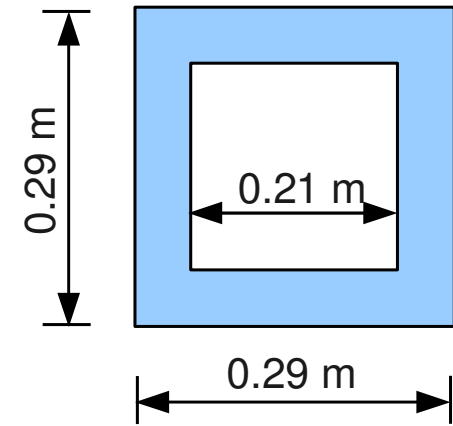
Porovnejte I_k , θ , $\Delta\varphi$, τ_{max} . Délka prutu 2 m, $M_x = 3$ kNm, $G=15$ GPa.



Úzký obdélník

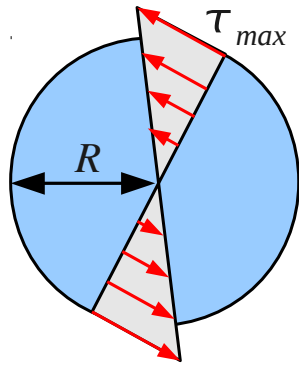


Masivní průřez



Uzavřený tenkostěnný průřez

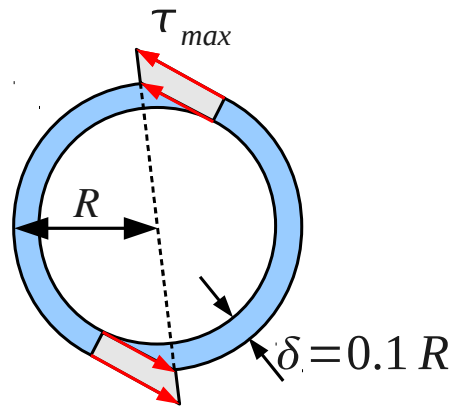
Příklad – porovnejte I_k , τ_{max} následujících průřezů



Kruhová tyč

$$I_k = I_p = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{I_p} R = 2 \cdot \frac{M_x}{\pi R^3}$$

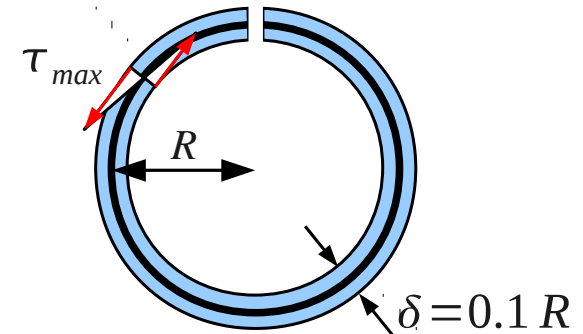


Kruhová trubka

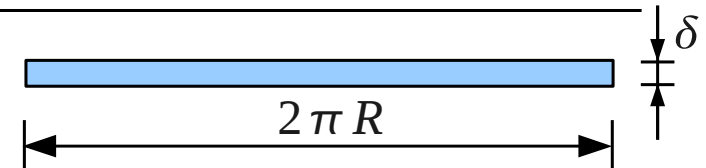
$$I_k = I_p = \frac{\pi (R^4 - (0.9R)^4)}{2}$$

$$I_k = I_p \approx 0.34 \frac{\pi R^4}{2}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{I_p} R = 5.82 \cdot \frac{M_x}{\pi R^3}$$



Rozříznutá trubka



$$I_k = \frac{1}{3} \cdot 2\pi R \delta^3 = \frac{1}{3} \cdot 2\pi 0.1^3 R^4$$

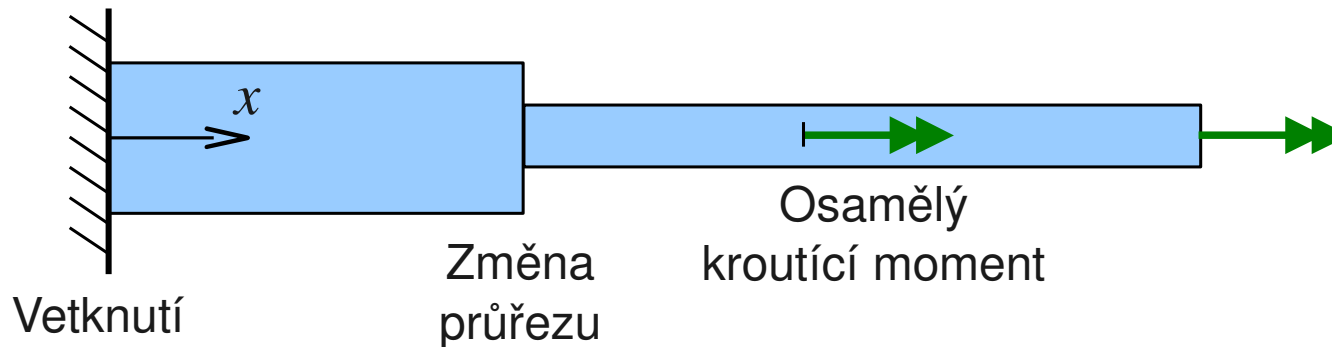
$$I_k = 0.00133 \frac{\pi R^4}{2}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{I_k} \delta = \frac{M_x}{I_k} 0.1 R$$

$$\tau_{max} = 150 \cdot \frac{M_x}{\pi R^3}$$

Ohybové (vázané) kroucení

- K ohybovému kroucení dochází, pokud průřezy nemohou volně deplanovat. Vznikají sekundární napětí σ_x , τ_{xy} , τ_{xz} . Tyto sekundární napětí jsou významné pro tenkostěnné průřezy, zejména otevřené.
- Možné příčiny omezení deplanace



- Ohybové kroucení nastává v inženýrské praxi velmi často, volné kroucení naopak zřídka.

Otázky

1. Kterých šest složek napětí a deformace je nulových při volném kroucení?
2. Co označuje deplanační funkce? Jakým způsobem se vypočte na obecném průřezu?
3. Které průřezy nikdy nedeplanují, u kterých je deplanace naopak význačná?
4. Jaký je vztah mezi deplanační funkcí a momentem tuhosti ve volném kroucení?
5. Napište moment tuhosti ve volném kroucení pro masivní průřez, tenký obdélník, otevřený tenkostěnný průřez a tenkostěnný uzavřený průřez.
6. Učiňte totéž pro maximální smykové napětí.
7. Ve kterých částech tenkostěnných otevřených a uzavřených průřezů vzniká největší smykové napětí?
8. Které typy průřezů mají nejmenší moment tuhosti ve volném kroucení?
9. Co je ohybové (vázané) kroucení a za jakých podmínek vzniká?
10. Jak není prut namáhán, pokud vnější zatížení prochází středem smyku?