

Stavební mechanika 1 - K132SM1

Structural mechanics

Přednášející

Vít Šmilauer, Ing., Ph.D.

katedra Mechaniky

vit.smilauer@fsv.cvut.cz

místnost D2034, konzultační hodiny Út 10:00-11:30

Literatura

Kufner, Kuklík: Stavební mechanika 10, ES ČVUT, 1997

Kufner, Kuklík: Stavební mechanika 20, ES ČVUT, 2003

Kufner, Kratěnová, Kuklík, Teoretická mechanika, Příklady, ES ČVUT, 1990

Kadlčák, Kytýr: Statika stavebních konstrukcí I., VUT v Brně, VUTIUM, 2001

Rektorys a kol.: Přehled užití matematiky, 2000

Bubeník, Pultar, Pultarová: Matematické vzorce a metody, 1997

Copyright (c) 2007-2008 Vít Šmilauer

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Mechanics, Czech Republic

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License" found at <http://www.gnu.org/licenses/>

Organizace předmětu SM1

- stránka předmětu (domácí úkoly, informace, přednášky v pdf)
 - username = rodné číslo bez lomítka
- <https://mech.fsv.cvut.cz/student/>
- 2 testy během semestru (2 x 15 b), neúčast pouze z vážných důvodů (nutno doložit neschopenkou !)
- domácí úkoly
 - zadání a numerická kontrola na webových stránkách, termíny odevzdání
 - odevzdání v kvalitním zpracování cvičícímu (dle jeho instrukcí)
- získání zápočtu: odevzdané domácí úkoly do termínu a min. 12 bodů z testů
- zkouška: nutný zápočet, max. 70 bodů + max. 30 bodů ze dvou testů
 - okruhy: vše z přednášek a cvičení
 - pomůcky: psací a rýsovací potřeby, kalkulačka

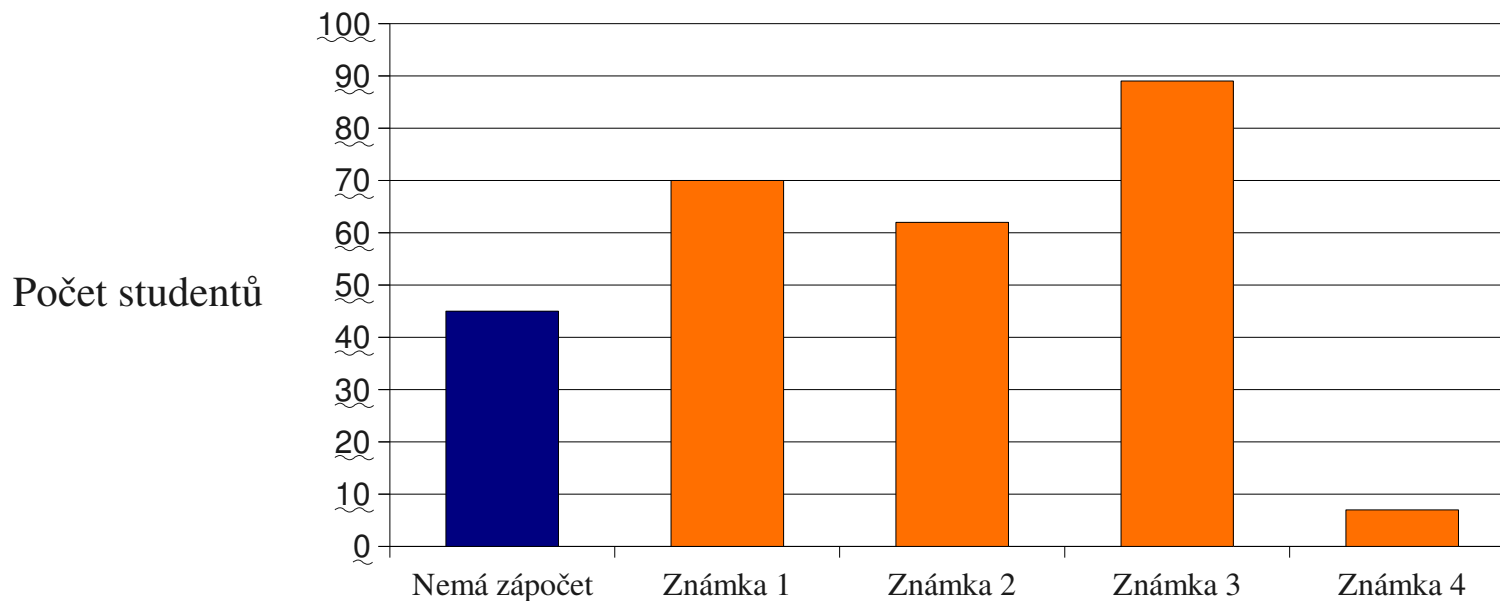
Výsledek zkoušky

- Získané body ze dvou testů a zkoušky (max. 100 bodů)

Výsledná známka	Body
1	<100;86>
2	(86;70>
3	(70;50>
4	(50;0>

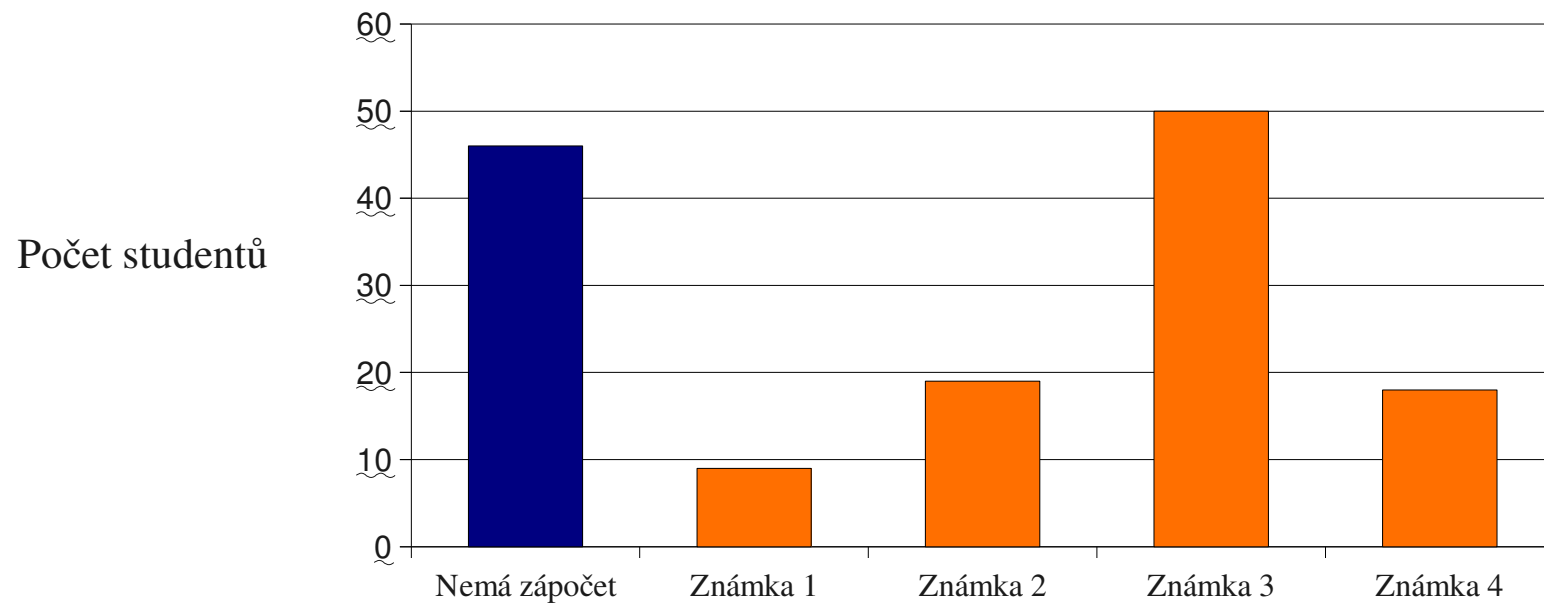
- Statistika SM1A (2006/2007)Z – celkem 273 studentů, prof. Bittnar

Statistika 2006/2007



- Statistika SM1 (2007/2008)Z – celkem 142 studentů, Šmilauer

Statistika 2007/2008



Stavební mechanika = mechanika aplikovaná na stavební konstrukce, které jsou vystaveny silovým účinkům

Stavební konstrukce = obytné a administrativní budovy, věže, mosty, tunely, inženýrské stavby,

Zákony, principy, axiomy
setrvačnost, síla, akce a reakce
zachování hmoty a energie
rovnováha, sčítání sil

matematický aparát

stavební mechanika
(statika a dynamika)

mechanika pevných těles, kapalin, plynů

mechanika kontinua

mechanika kompozitů

geomechanika

lomová mechanika

mikromechanika

biomechanika

transportní jevy

.....

Proč studovat stavební mechaniku ?

- 1) Zajistit bezpečnost a spolehlivost stavebních konstrukcí
 - životnost stavební konstrukce až stovky let (> životnost projektanta)
 - selhání či kolaps stavební konstrukce má společenské a hmotné následky, snižuje kredit inženýrských profesí
- 2) Uspokojit vzrůstající nároky a nové typy stavebních konstrukcí
 - výška, zatížení, lehkost, krása, funkce, kvalita, vyjimečnost, ekologie ...
- 3) Ověřit výsledky z počítače (chybné zadání, úskalí numerických metod...)

zcela mimořádně lze vybudovat prototyp konstrukce *in situ*, obyčejně virtuální návrh konstrukce a jedno vyhotovení, proto **správné pochopení a vhodné řešení konstrukce jsou klíčové faktory úspěchu**

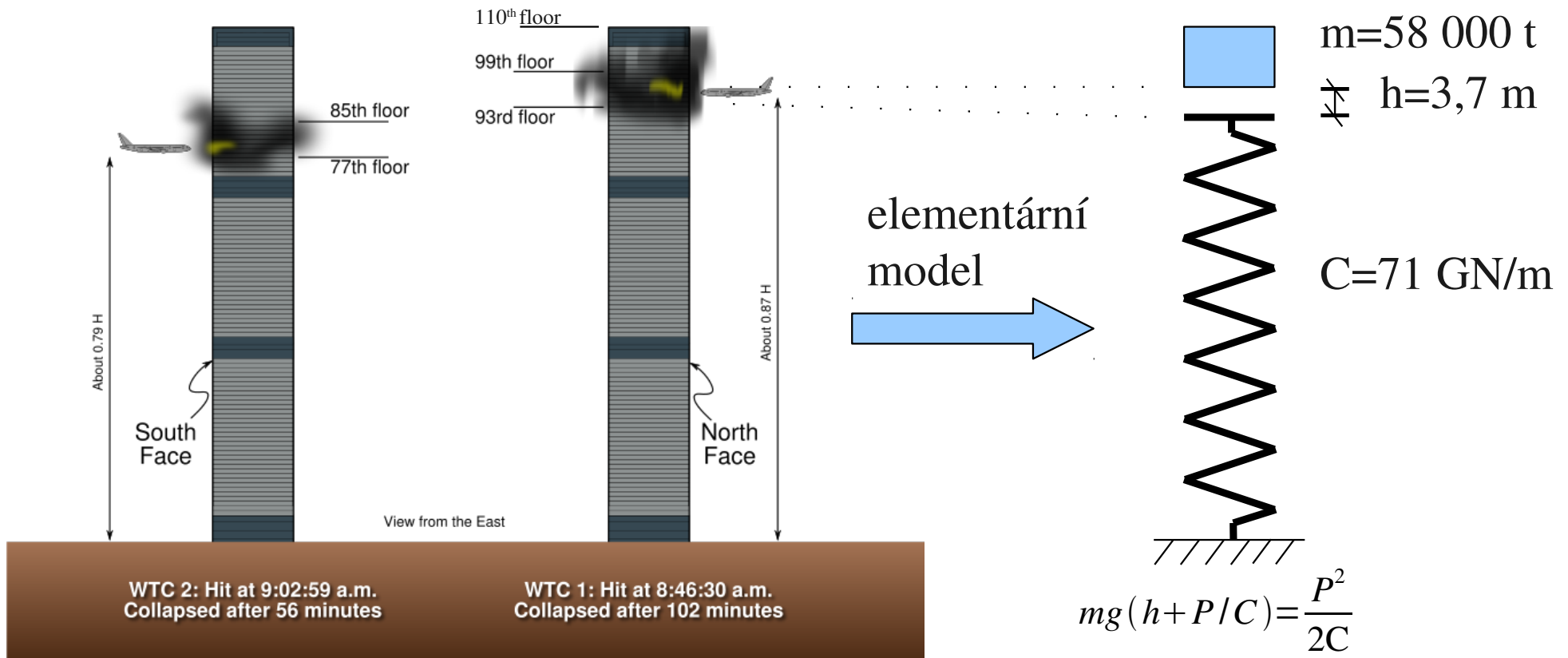
Most přes Mississippi

- 14 polí (z toho 3 příhradové oblouky), délka 579 m, návrh 1961, dokončen 1967
- pád hlavního oblouku 1.8.2007, Minneapolis, Minnesota (USA)
- 13.11.2008 National Transportation Safety Board (NTBS) dospěl k závěru: chybný návrh styčnickových plechů, 262 t naskladněného materiálu při rekonstrukci, 51 mm betonu navíc na mostovce, nedostatečné revizní prohlídky



World Trade Center, 11.9.2001

- 110 podlaží, ~417 m, výstavba 1966-1973
- příčina: teplota > 600 °C, vybočení sloupů, progresivní kolaps
- detailní inženýrská analýza 3 roky (NIST)

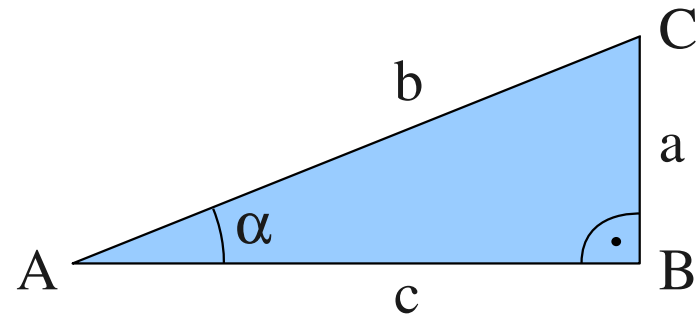


http://en.wikipedia.org/wiki/Collapse_of_the_World_Trade_Center
 Z. P. Bažant, Y. Zhou: Why Did the World Trade Centre Collapsed -
 Simple Analysis, *Journal of Engineering Mechanics*, Jan 2002

Základní znalosti z trigonometrie

- **pravoúhlý** trojúhelník

$$\sin \alpha = \frac{a}{b} \quad \cos \alpha = \frac{c}{b} \quad \tan \alpha = \frac{a}{c}$$



- **obecný** trojúhelník

sinová věta

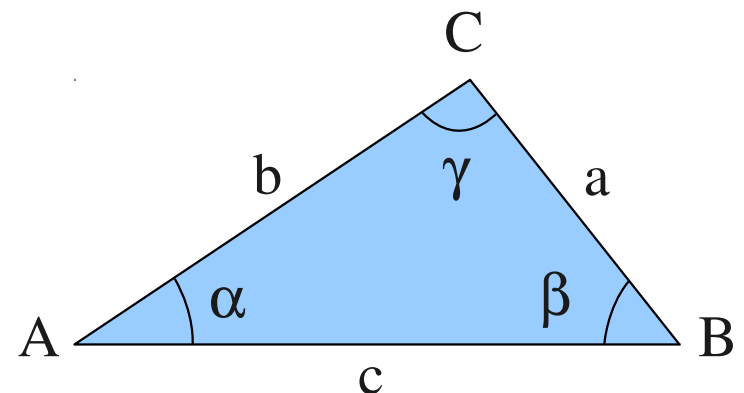
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

kosinová věta

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

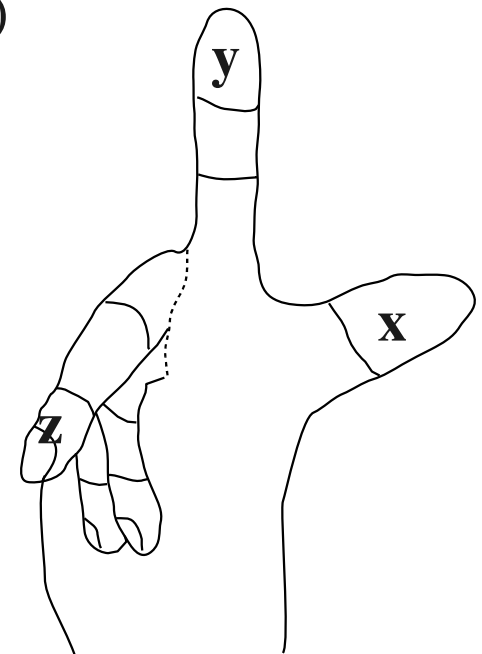
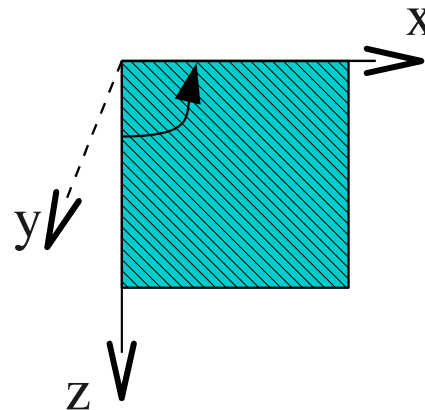
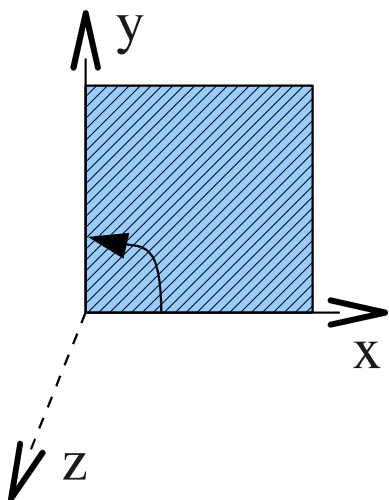
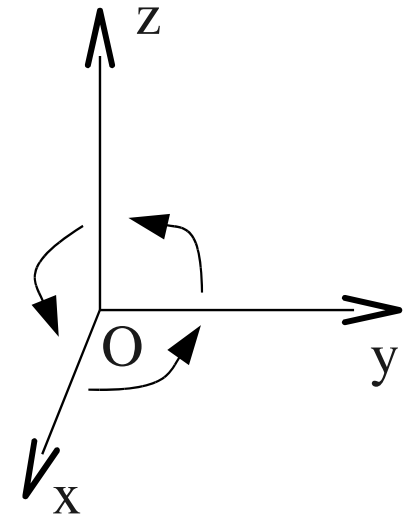
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



Kartézský souřadnicový systém

- nejčastěji pravoúhlý a pravotočivý
- v prostoru (3D)
 - pravidlo **pravé** ruky: x - palec, y - ukazováček, z - prostředníček
 - rotace $x \rightarrow y$ ve směru prstů **pravé** ruky (palec ve směru osy z), analogicky $y \rightarrow z$ a $z \rightarrow x$
- v rovině (2D) - kladný směr úhlu dle **pravé** ruky
- výsledky nikdy nezávisí na volbě systému (kontrola úlohy)



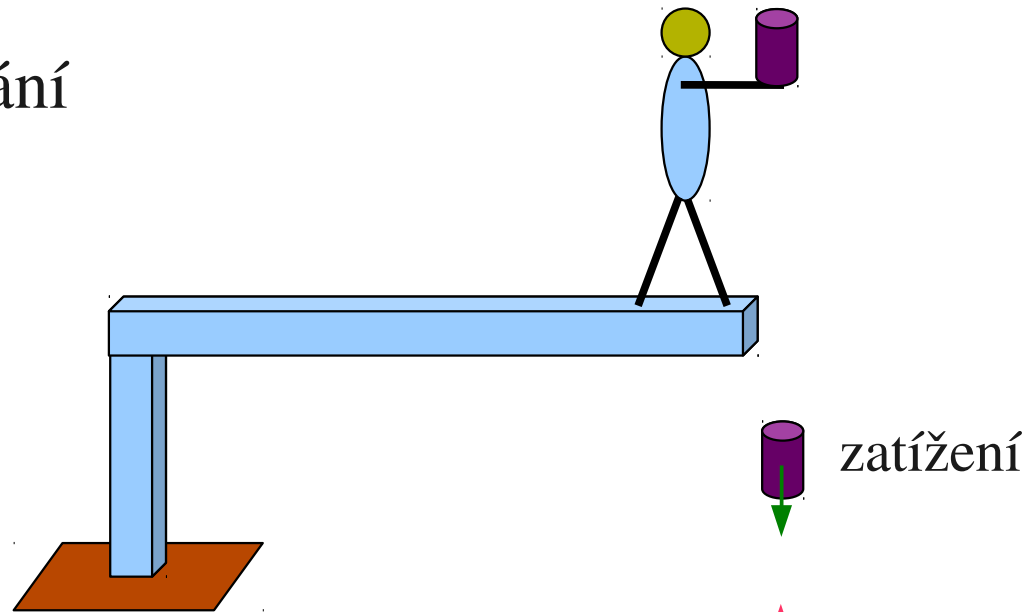
Síla

- **vektorová** veličina definovaná velikostí, orientací, směrem a působišťem (bod přenášení účinku na těleso)
- označení \vec{F} , \vec{R} , v inženýrské praxi často určena jen velikostí F, R
- síla způsobuje změnu hybnosti hmotného bodu za jednotku času

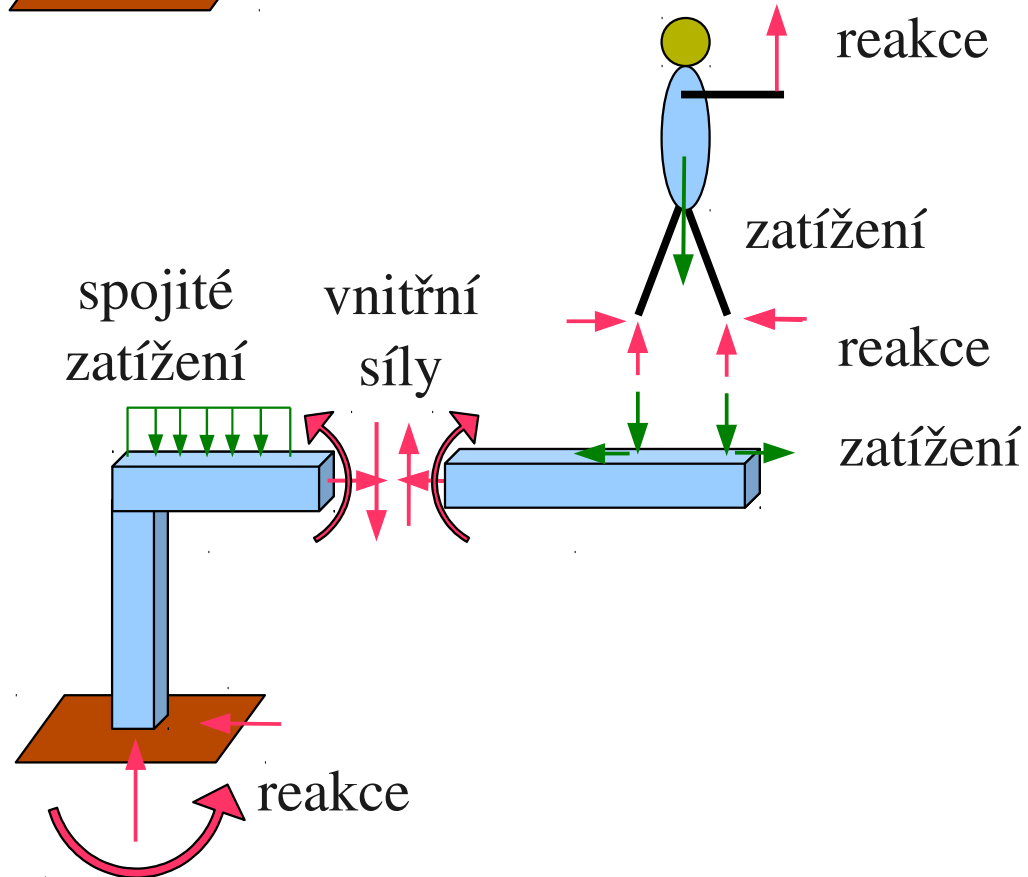
$$\vec{F} = \frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \stackrel{m=konst.}{=} m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

- jednotka [N] = [m·kg·s⁻²], v inženýrské praxi častěji násobky [kN], [MN]
- vlastní tíha určena gravitačním zrychlením $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$
- operace se silami = operace s vektory

Skutečné uspořádání



Síly a zatížení



Vektor

Skalár

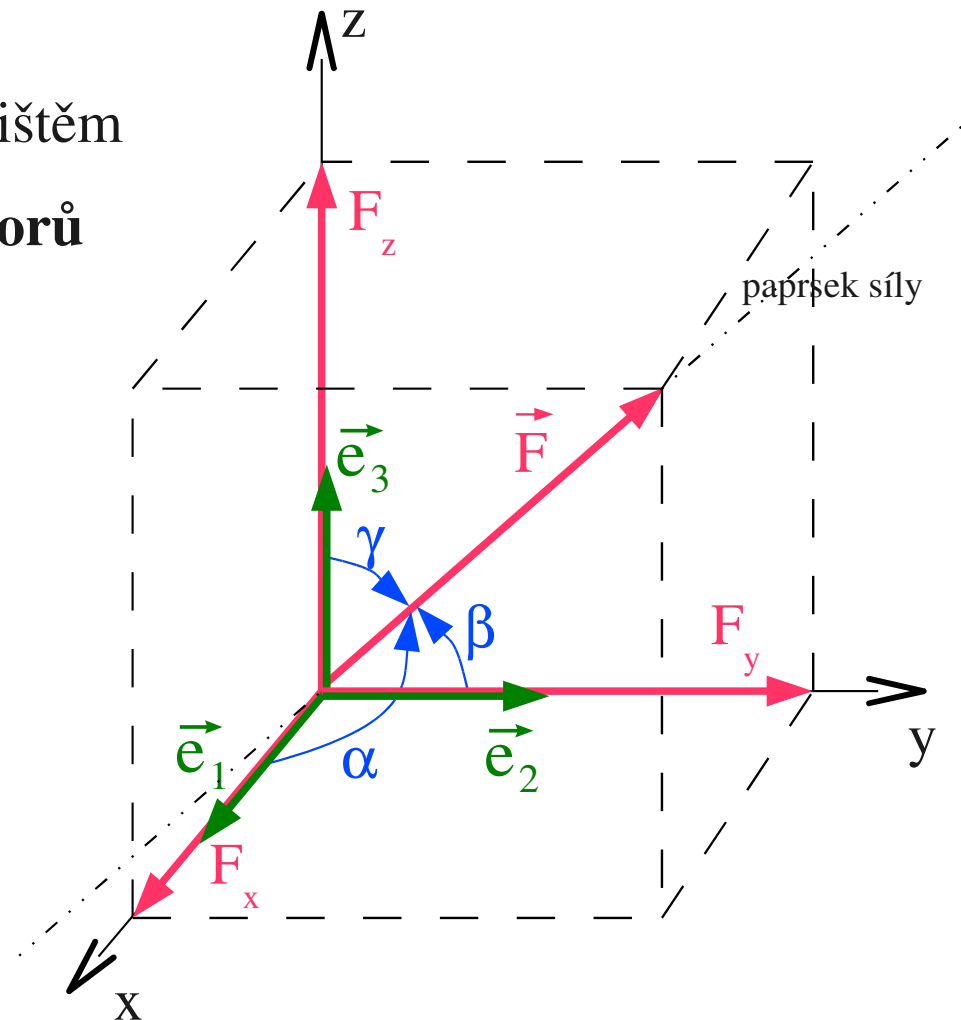
- veličina daná pouze velikostí, nezávisí na volbě souřadnicového systému

Vektor (síla) $\vec{F} = (F_x; F_y; F_z)$

- veličina daná velikostí, orientací a působišťem
- určen lineární kombinací **bázových vektorů**

$$\left. \begin{aligned} \vec{e}_1 = \vec{i} &= (1; 0; 0) \\ \vec{e}_2 = \vec{j} &= (0; 1; 0) \\ \vec{e}_3 = \vec{k} &= (0; 0; 1) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{jednotkové} \\ \text{velikosti} \end{array}$$

- směrové úhly α, β, γ
 - mezi kladnými poloosami a \vec{F}
 - $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$



- vyjádření vektoru \vec{F} ve složkách

- kolmé průměty vektoru do směrů souřadnicových os

$$\vec{F} = (F_x; F_y; F_z)$$

- velikost (délka) vektoru \vec{F}

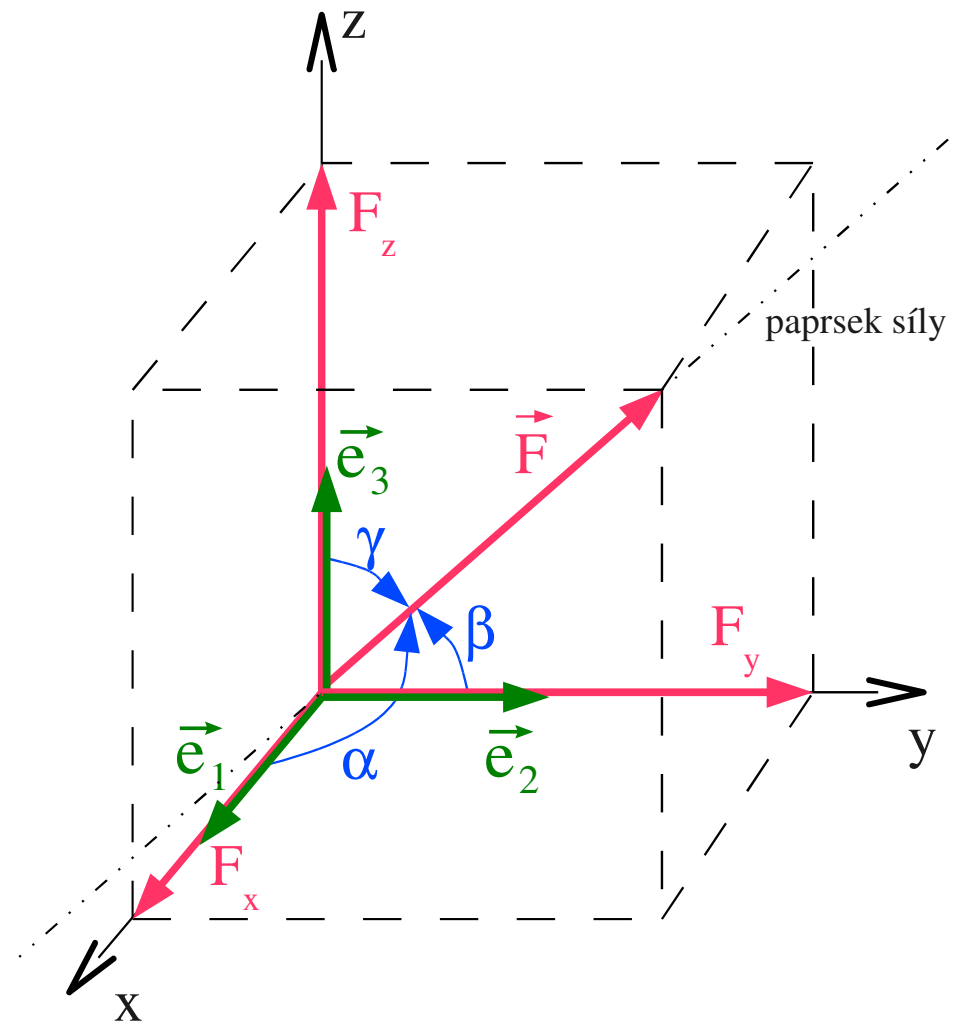
$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

- pomocí bázových vektorů

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_1 + F_y \vec{e}_2 + F_z \vec{e}_3$$

- složky ze směrových úhlů

$$\begin{aligned} F_x &= F \cos \alpha = \vec{F} \vec{e}_1 \\ F_y &= F \cos \beta = \vec{F} \vec{e}_2 \\ F_z &= F \cos \gamma = \vec{F} \vec{e}_3 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{skalární} \\ \text{součin} \end{array}$$

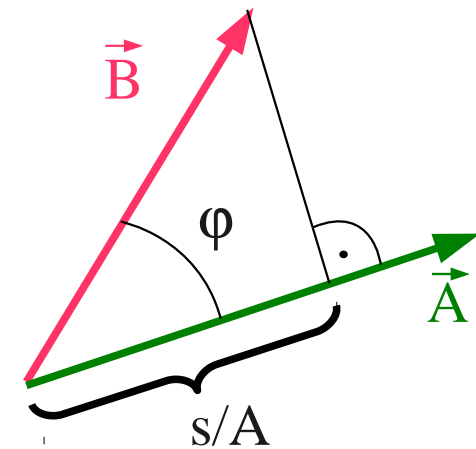


Skalární součin vektorů

výsledkem skalárního součinu je skalár, $\vec{A} \cdot \vec{B} = s$

$$s = \vec{A} \cdot \vec{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \varphi = AB \cos \varphi = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

- Geometrický význam: průmět vektorů
- Pokud jsou vektory kolmé, je skalární součin 0
- Použití: např. vyjádření složek síly



pokud $A=1$, pak s
určuje velikost ve
směru \vec{A}

Sčítání vektorů

- značení $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

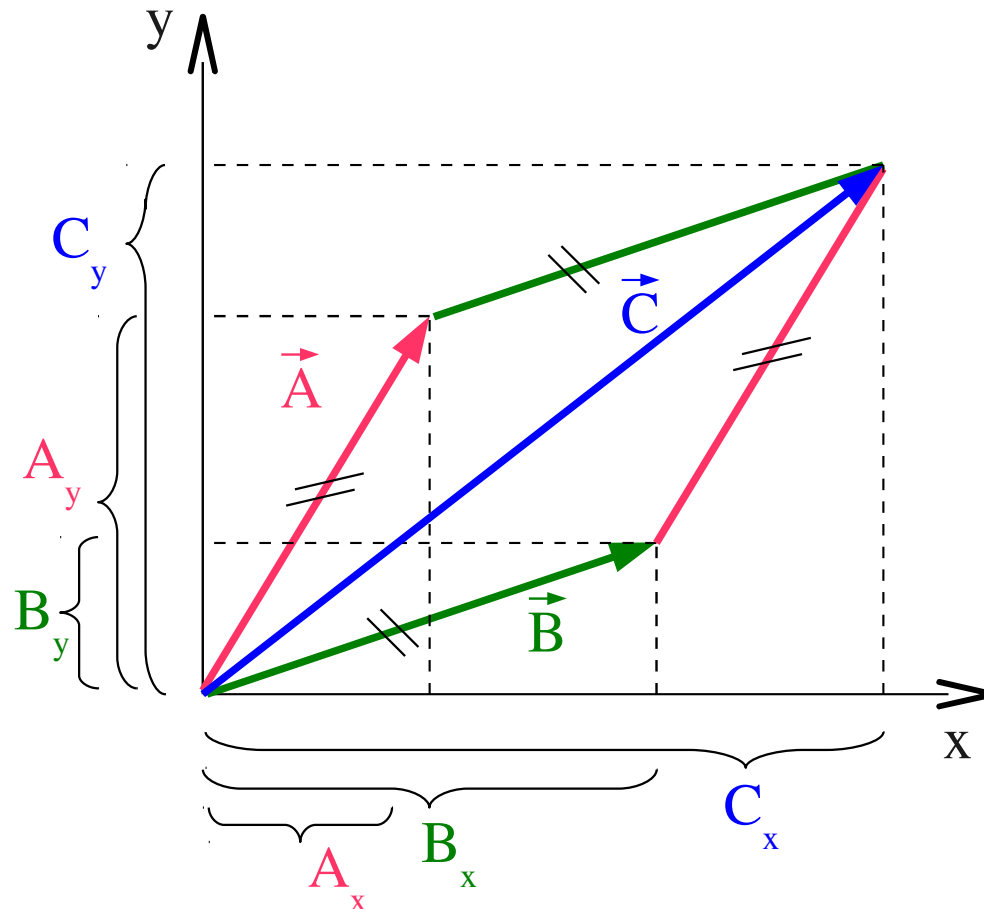
- složky vektoru \vec{C} (ve 3D)

$$\vec{C} = (A_x + B_x; A_y + B_y; A_z + B_z)$$

- komutativnost

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

- geometrický význam



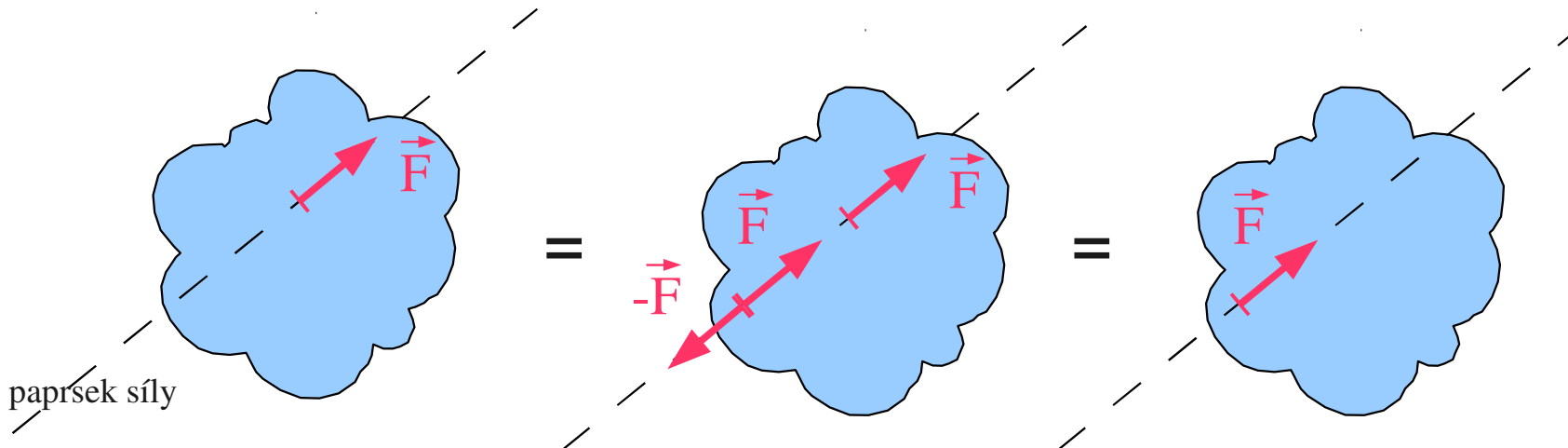
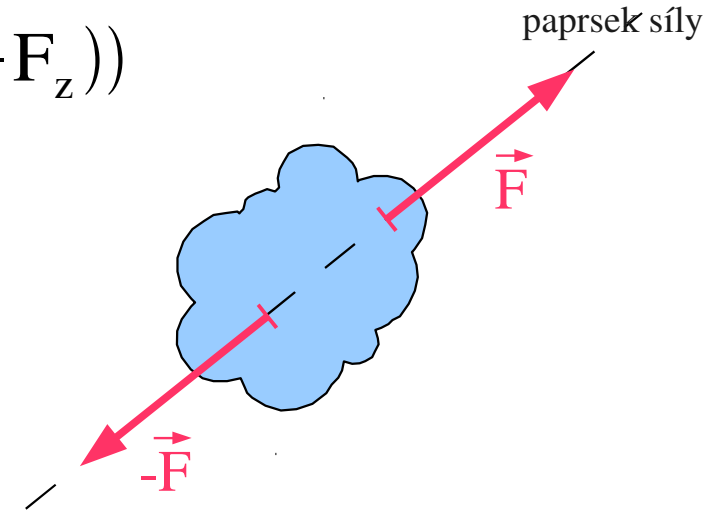
Axiom o rovnováze sil [A1]

- Dvě síly \vec{F} a $-\vec{F}$, které působí na tuhé těleso v jenom paprsku, mají stejnou velikost a opačnou orientaci se navzájem ruší (jsou v rovnováze)

$$\begin{aligned}\vec{F} + (-\vec{F}) &= (F_x + (-F_x); F_y + (-F_y); F_z + (-F_z)) \\ &= (0; 0; 0) = \vec{0}\end{aligned}$$

- důsledky

- přidání (odebrání) rovnovážné soustavy sil nemění pohybový stav tuhého tělesa
- účinek síly na tuhé těleso se nezmění, posune-li se její působíště po paprsku, v němž síla působí



Axiom o rovnoběžníku sil (sčítání sil) [A2]

- účinek dvou sil \vec{F}_1 a \vec{F}_2 , které působí v jednom bodě se rovná účinku síly \vec{F}_r , jejíž vektor je tvořen úhlopříčkou rovnoběžníku sil \vec{F}_1 a \vec{F}_2

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1 = (F_{1x} + F_{2x}; F_{1y} + F_{2y})$$

- velikost **výslednice** z kosinové věty

$$F_r = |\vec{F}_r| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos(\pi - \varphi)}$$

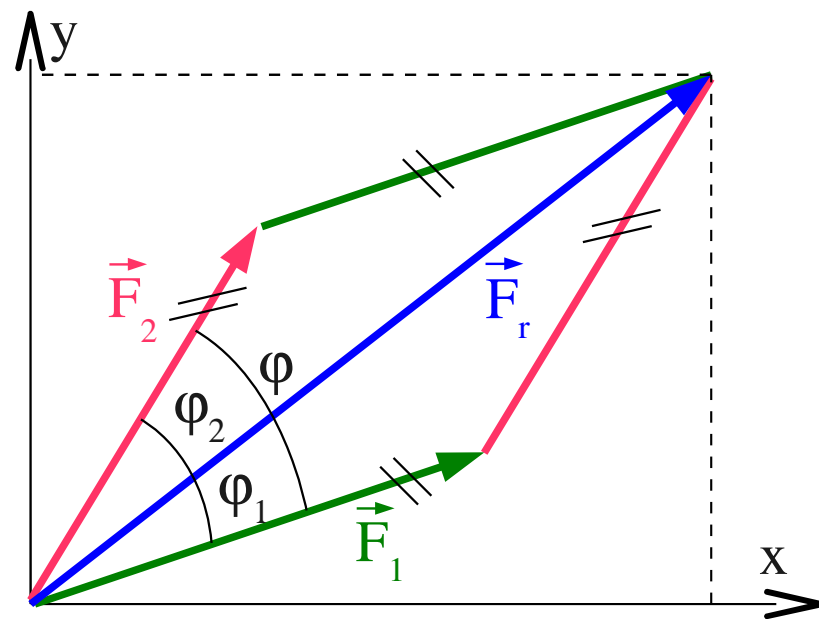
$$\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$$

$$F_r = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos \varphi}$$

- směry ze sinové věty

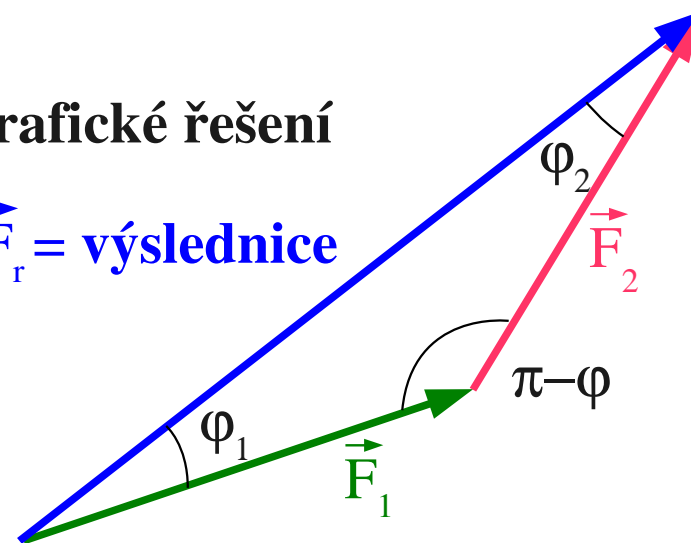
$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{F_2}{F_r}$$

$$\frac{\sin \varphi_2}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{F_1}{F_r}$$



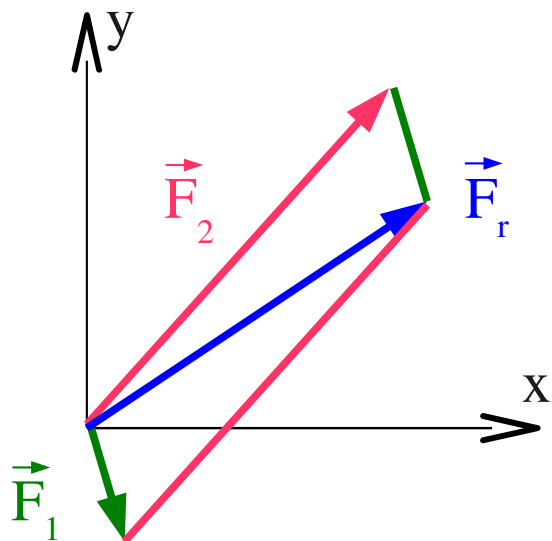
grafické řešení

$\vec{F}_r =$ výslednice

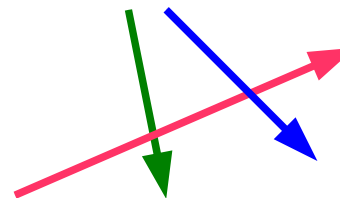


Důsledky axiomu o rovnoběžníku sil [A2]

- sčítání více sil je možné v libovolném pořadí
- libovolnou sílu \vec{F}_r lze nahradit dvěma silami \vec{F}_1 a \vec{F}_2 , pokud se jejich paprsky protínají na paprsku síly \vec{F}_r a platí $\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (rozklad síly)

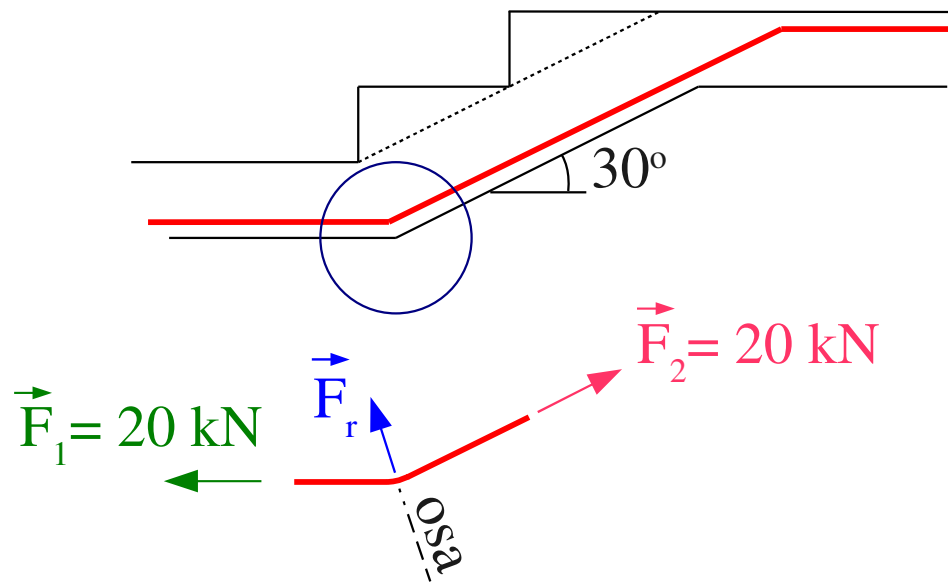


- **svazek sil** = paprsky sil se protínají v jednom bodě (rovinný, prostorový svazek)
- **soustava sil** = paprsky se neprotínají v jednom bodě

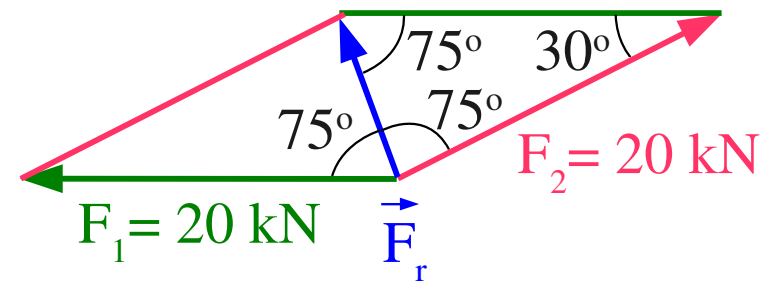


Výslednice sil v rovině

- Určete sílu otláčení výztuže v zalomení železobetonové desky schodiště



Rovnoběžník sil



$$F_r = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 F_1 F_2 \cos(75^\circ + 75^\circ)} = \sqrt{20^2 + 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 20 \cos(150^\circ)} = \sqrt{400 + 400 - 692,82} = 10,35 \text{ kN}$$

Úlohy rovnováhy a ekvivalence svazku sil

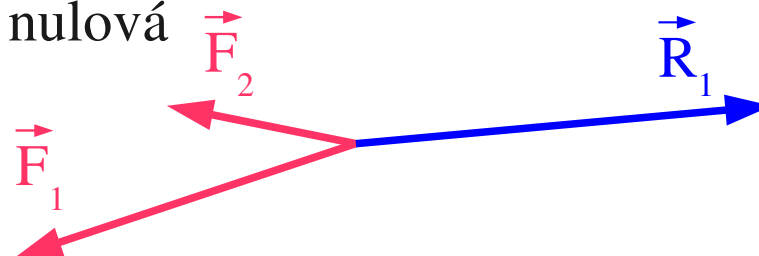
- Dva (prostorové) svazky sil $\{\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n\}$ a $\{\vec{R}_1, \dots, \vec{R}_m\}$ tvoří **rovnovážnou soustavu**, jestliže je celková výslednice svazku nulová

statická podmínka rovnováhy

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{R}_j = \vec{0}$$

při formulaci pomocí
bázových vektorů se soustava
rozpadne na složky

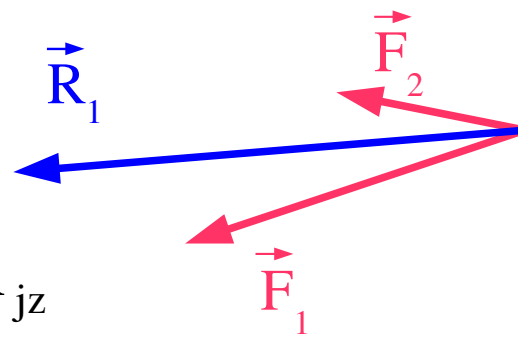
$$\sum_i F_{ix} + \sum_j R_{jx} = 0, \quad \sum_i F_{iy} + \sum_j R_{jy} = 0, \quad \sum_i F_{iz} + \sum_j R_{jz} = 0$$



- Dva (prostorové) svazky sil $\{\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n\}$ a $\{\vec{R}_1, \dots, \vec{R}_m\}$ jsou **ekvivalentní**, jsou-li jejich výslednice shodné

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{j=1}^m \vec{R}_j$$

$$\sum_i F_{ix} = \sum_j R_{jx}, \quad \sum_i F_{iy} = \sum_j R_{jy}, \quad \sum_i F_{iz} = \sum_j R_{jz}$$



- úlohy rovnováhy a ekvivalence jsou totožné, pokud změníme orientaci sil jednoho svazku, v rovině k dispozici 2 rovnice, v prostoru 3 rovnice

Příklad - ekvivalence

Určete výsledný účinek svazku sil \vec{F}_1 a \vec{F}_2

$$\sum_{i=1}^2 \vec{F}_i = \sum_{j=1}^1 \vec{R}_j = \vec{R}$$

ve složkách $\sum_i F_{ix} = \sum_i F_i \cos \alpha_i = R_x$ atd.

$$\cos \alpha_1 = \frac{5}{\sqrt{5^2+5^2+5^2}} = 0,577, \cos \beta_1 = 0,577, \cos \gamma_1 = 0,577$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{5}{\sqrt{5^2+5^2}} = 0,707, \cos \beta_2 = 0,707, \cos \gamma_2 = 0$$

$$\vec{F}_1 = 10 \{ 0,577; 0,577; 0,577 \} = \{ 5,77; 5,77; 5,77 \} \text{ kN}$$

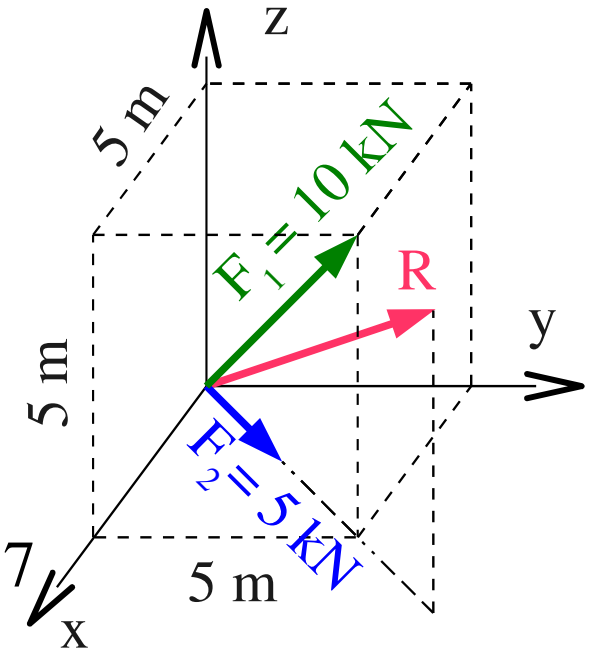
$$\vec{F}_2 = 5 \{ 0,707; 0,707; 0 \} = \{ 3,535; 3,535; 0 \} \text{ kN}$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \{ 9,305; 9,305; 5,77 \} \text{ kN}$$

$$R = \sqrt{9,305^2 + 9,305^2 + 5,77^2} = 14,369 \text{ kN}$$

$$\vec{R} = 14,369 \{ 0,648; 0,648; 0,402 \} \text{ kN}$$

Kontrola: $0,648^2 + 0,648^2 + 0,402^2 = 1$, rotace souřadného systému



Příklad - rovnováha

Uvedte síly \vec{F}_1 a \vec{F}_2 z minulého příkladu do rovnováhy silami \vec{R}_1 , \vec{R}_2 , \vec{R}_3

- protože známe výslednici sil \vec{F}_1 a \vec{F}_2 , použijeme ji přímo

$$\sum_{i=1}^2 \vec{F}_i + \sum_{j=1}^3 \vec{R}_j = \{9,305; 9,305; 5,77\} + \sum_{j=1}^3 \vec{R}_j = \vec{0}$$

$$\vec{R}_1 = R_1 \{0; 0; 1\} \text{ kN}$$

$$\vec{R}_2 = R_2 \{1; 0; 0\} \text{ kN}$$

$$\vec{R}_3 = R_3 \{0,707; 0,707; 0\} \text{ kN}$$

$$\swarrow x: 9,305 + 0R_1 + 1R_2 + 0,707R_3 = 0$$

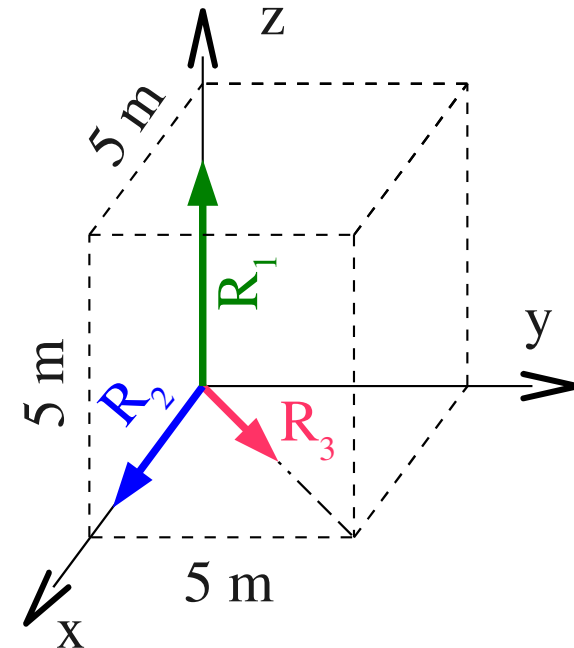
$$\rightarrow y: 9,305 + 0R_1 + 0R_2 + 0,707R_3 = 0 \Rightarrow R_3 = -13,161 \text{ kN}$$

$$\uparrow z: 5,77 + 1R_1 + 0R_2 + 0R_3 = 0 \Rightarrow R_1 = -5,77 \text{ kN}$$

$$R_2 = 0 \text{ kN}$$

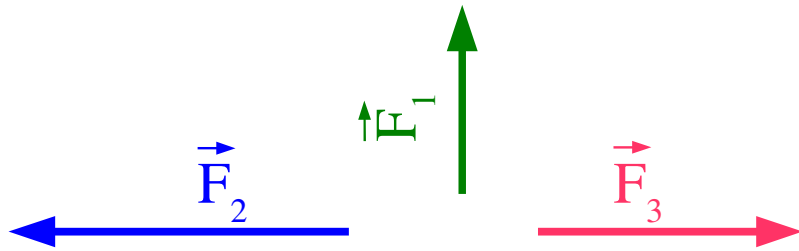
Kontrola:

$$\underbrace{\{9,305; 9,305; 5,77\}}_{\sum_{i=1}^2 \vec{F}_i} + \underbrace{\{0; 0; -5,77\}}_{\vec{R}_1} + \underbrace{\{0; 0; 0\}}_{\vec{R}_2} + \underbrace{\{-9,305; -9,305; 0\}}_{\vec{R}_3} = \vec{0}$$



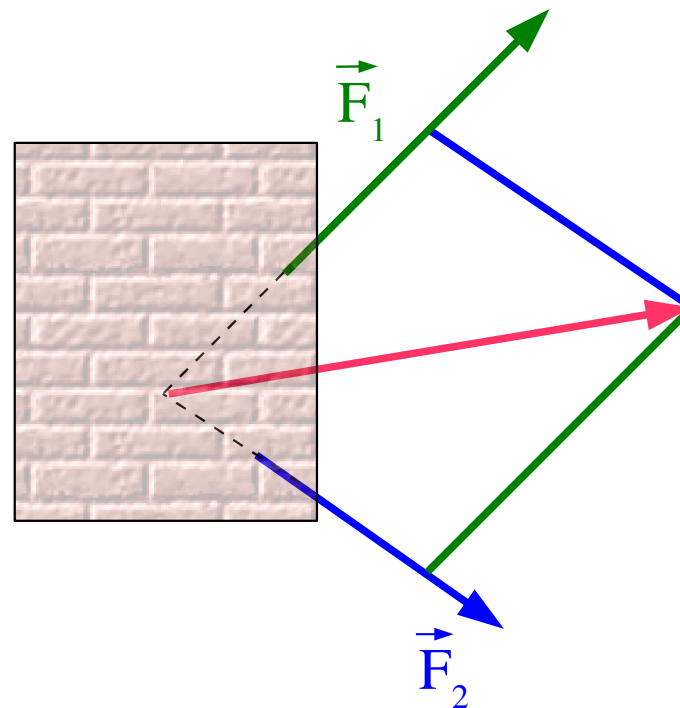
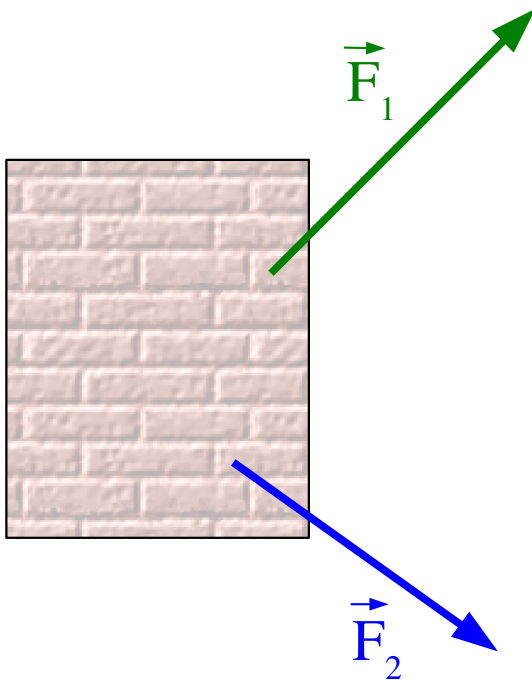
Otázky

- Která ze třech sil musí být nulová, mají-li být v rovnováze, které budou stejné velikosti?



F_1 je nulová, svislá podmínka rovnováhy
 $\vec{F}_2 = -\vec{F}_3$

- Kde působí na zeď výslednice dvou sil, jaký má směr a velikost?



Zatěžovací zkouška piloty dálničního mostu u Trmic na D8

- Zatlačování piloty Z1 (průměr 1500 mm, délka 22 m, z toho 11 m vetknutá do slínovců)
- Zatížení do síly 7,5 MN (sednutí 4 mm), svazek sil



Foto: Ing. L. Štěrba



Přednášky z předmětu SM1, Stavební fakulta ČVUT v Praze

Autor Vít Šmilauer

Náměty, připomínky, úpravy, vylepšení zasílejte prosím na

vit.smilauer@fsv.cvut.cz

Created 09/2007 in OpenOffice 2.3, ubuntu linux 6.06

Last update 02/2008