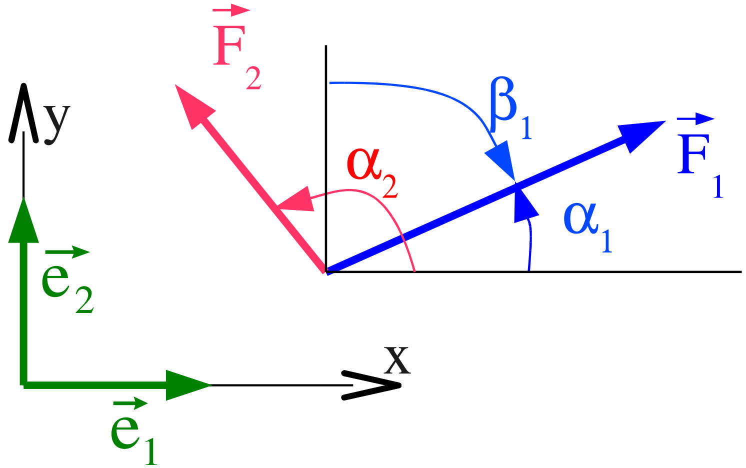
Rovinný svazek sil

- Lze odvodit z obecného prostorového svazku sil vyloučením jedné dimenze



$$F_{ix} = F_i \cos\alpha_i$$

$$\cos\beta_i = \sin\alpha_i$$

$$F_{iy} = F_i \cos\beta_i = F_i \sin\alpha_i$$

$$\vec{F}_i = F_{ix}\vec{e}_1 + F_{iy}\vec{e}_2$$

- Určení výslednice $\vec{F}_r$

$$\vec{F}_r = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

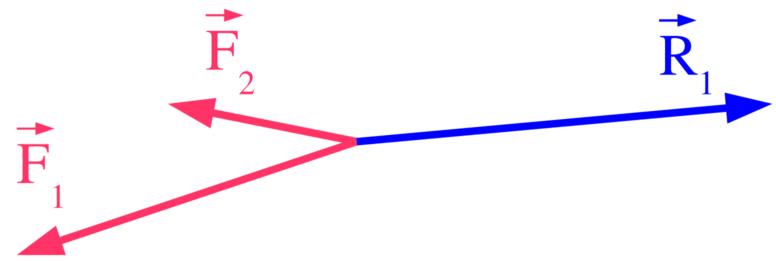
$$F_{rx}\vec{e}_1 + F_{ry}\vec{e}_2 = (F_{1x} + F_{2x} + \ldots)\vec{e}_1 + (F_{1y} + F_{2y} + \ldots)\vec{e}_2$$

$$\overset{x}{\rightarrow}: \quad F_{rx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cos\alpha_i$$

$$_{y}\uparrow: \quad F_{ry} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = \sum_{i=1}^{n} F_i \sin\alpha_i$$

Úloha rovnováhy a ekvivalence

- Stejné jako v prostoru, pouze **dvě** skalární statické podmínky (rovina xy)
- Rovnováha

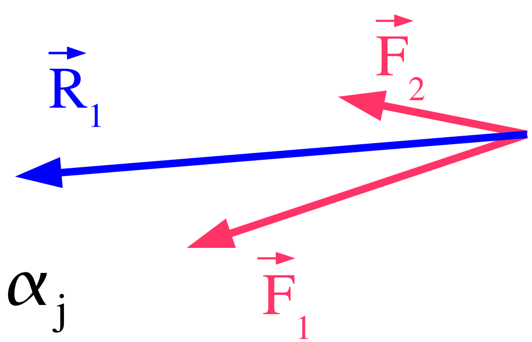


$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{m} \vec{R}_j = \vec{0}$$

$$\overset{x}{\rightarrow}: \quad \sum_i F_{ix} + \sum_j R_{jx} = \sum_i F_i \cos\alpha_i + \sum_j R_j \cos\alpha_j = 0$$

$$_{y}\uparrow: \quad \sum_i F_{iy} + \sum_j R_{jy} = \sum_i F_i \sin\alpha_i + \sum_j R_j \sin\alpha_j = 0$$

- Ekvivalence



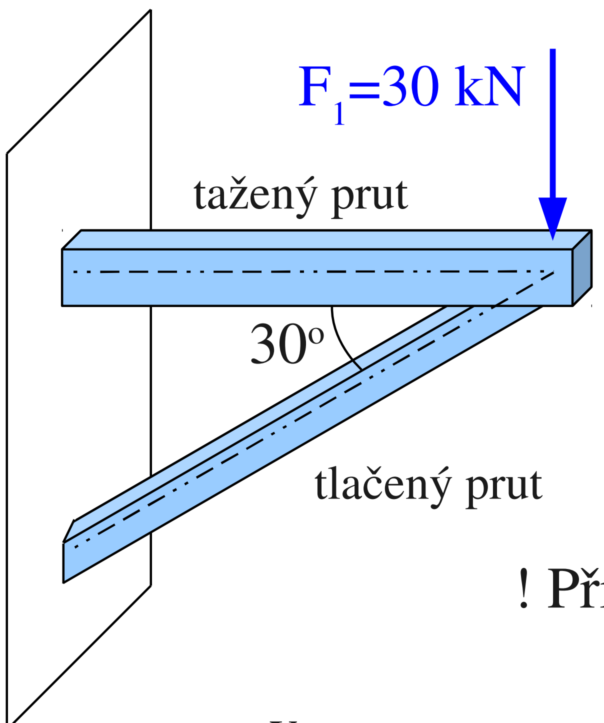
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{j=1}^{m} \vec{R}_j$$

$$\overset{x}{\rightarrow}: \quad \sum_i F_{ix} = \sum_j R_{jx}, \quad \sum_i F_i \cos\alpha_i = \sum_j R_j \cos\alpha_j$$

$$_{y}\uparrow: \quad \sum_i F_{iy} = \sum_j R_{jy}, \quad \sum_i F_i \sin\alpha_i = \sum_j R_j \sin\alpha_j$$

Příklad - rovnováha

- Určete osové síly v prutech (zanedbejte ohyb)



$$_{y}\uparrow:\quad \sum_i F_{iy} + \sum_j R_{jy} = 30\sin 270^\circ + \underbrace{R_1 \sin 180^\circ}_{0} + R_2 \sin 210^\circ = 0$$

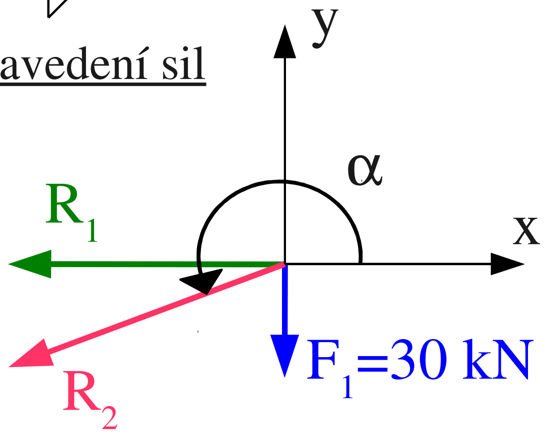
$$-30 - 0{,}5\,R_2 = 0,\quad \mathbf{R_2 = -60\ kN}\ (\text{opačný směr než zavedený})$$

$$\overset{x}{\rightarrow}:\quad \sum_i F_{ix} + \sum_j R_{jx} = \underbrace{30\cos 270^\circ}_{0} + R_1 \cos 180^\circ + R_2 \cos 210^\circ = 0$$

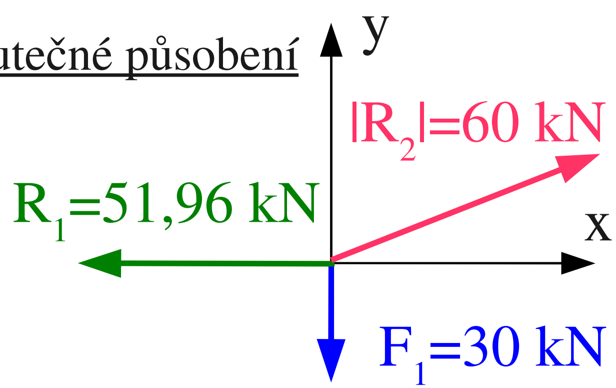
$$0 - R_1 + \tfrac{-\sqrt{3}}{2}(-60) = 0,\quad \mathbf{R_1 = 51{,}96\ kN}$$

! Při otočení statických podmínek řešíme soustavu 2 rovnic !

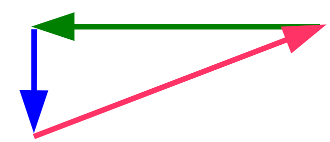
zavedení sil



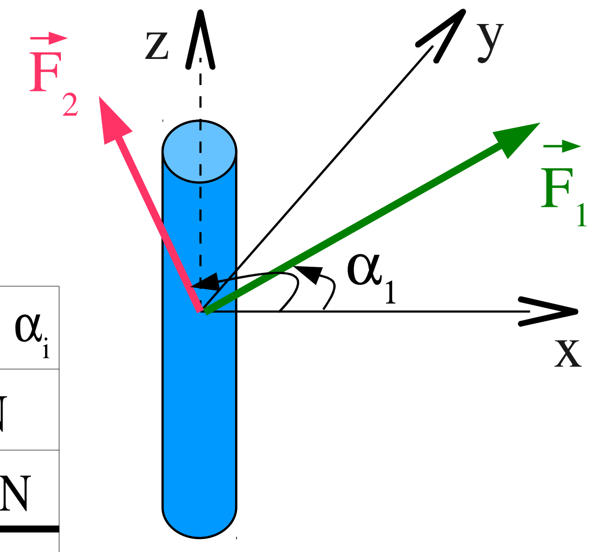
skutečné působení



grafická kontrola



Příklad - ekvivalence



- Určete početně výsledné namáhání čepu (rovina xy), proveďte kontrolu graficky

		α_i	$\cos\alpha_i$	$\cos\beta_i=\sin\alpha_i$	$F_{ix}=F_i\cos\alpha_i$	$F_{iy}=F_i\sin\alpha_i$
F_1	$F_1=10$ kN	30°	0,866	0,5	8,66 kN	5,0 kN
F_2	$F_2=6$ kN	130°	-0,643	0,766	-3,858 kN	4,596 kN
$\mathbf{F_r}$	$F_r=10{,}73$ kN	**63,41°**			**4,802 kN**	**9,596 kN**

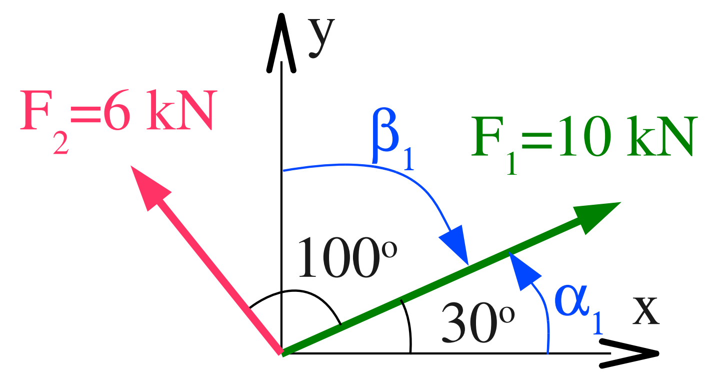
$$F_r=\sqrt{4{,}802^2+9{,}596^2}=10{,}73\ \text{kN}$$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{4{,}802}{10{,}73}\right)=63{,}41^{\circ}\text{(nebo arcsin, arctan)}$$

! restrikce funkcí !

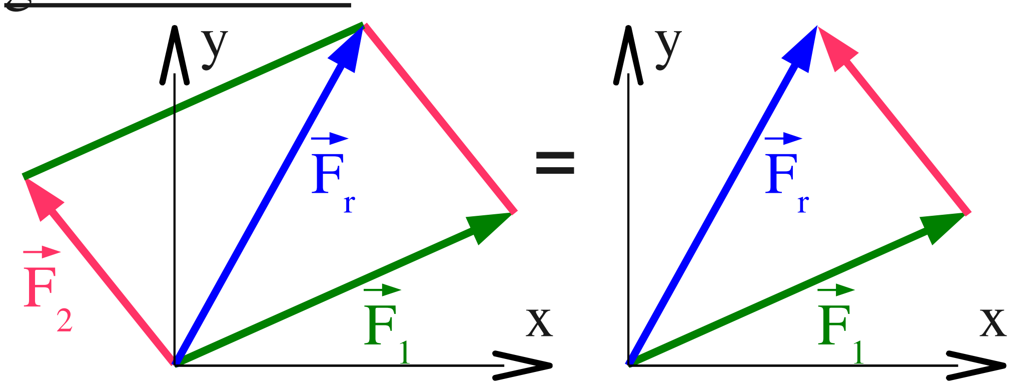
$$\arcsin\langle -90;90\rangle,\ \arccos\langle 0;180\rangle,\ \arctan\langle -90;90\rangle$$

půdorys



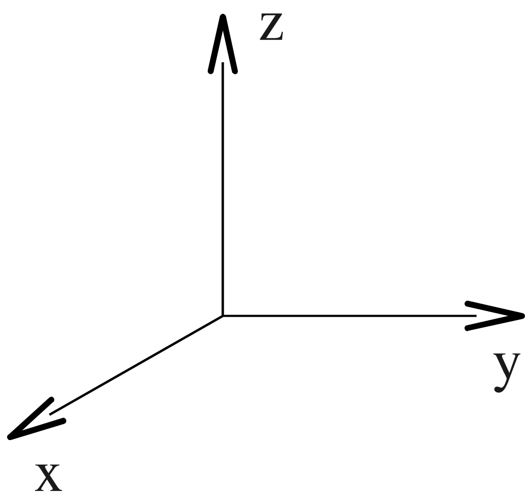
$$\cos\beta=\sin\alpha$$

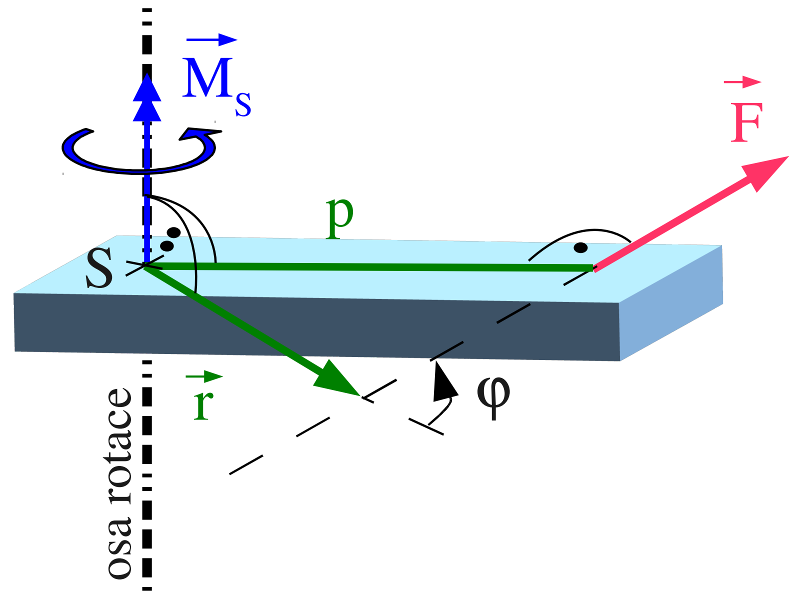
grafické řešení



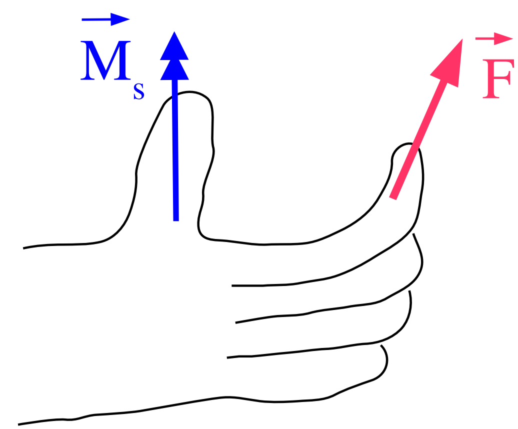
Moment síly k bodu S

- Síla kromě posunu tělesa způsobuje jeho rotaci okolo osy - moment [Nm]





Pravidlo pravé ruky



- $\vec{M}_S$ je vždy kolmý na rovinu $\vec{r}\,\vec{F}$ (S $\vec{F}$), zde $\vec{M}_S = M_{Sz} = |r||F|\sin\varphi = \underbrace{\pm p}_{\text{rameno}}\ F$

- Obecně výpočtem determinantu (vektorový součin)

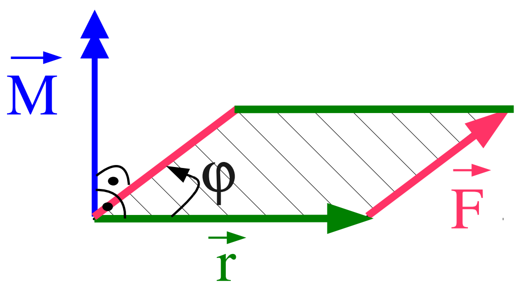
Jednotkové vektory souřadnicových os

$$\vec{M}_S = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \underbrace{(r_y F_z - r_z F_y)}_{M_{Sx}} \vec{e}_1 + \underbrace{(r_z F_x - r_x F_z)}_{M_{Sy}} \vec{e}_2 + \underbrace{(r_x F_y - r_y F_x)}_{M_{Sz}} \vec{e}_3 =$$

$$= M_{Sx}\vec{e}_1 + M_{Sy}\vec{e}_2 + M_{Sz}\vec{e}_3 = (M_{Sx}; M_{Sy}; M_{Sz})$$

Vektorový součin

- Vektorovým součinem $\vec{r}$ x $\vec{F}$ je vektor $\vec{M}_S$
  - Velikost M = r F sin φ (plocha rovnoběžníku)
  - Vektor $\vec{M}$ je kolmý k vektorům $\vec{r}$ a $\vec{F}$
  - Vektory $\vec{r}$, $\vec{F}$, $\vec{M}$ tvoří pravotočivou soustavu



- Vlastnosti

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=-\vec{F}\times\vec{r}$$
$$s\,\vec{M}=s(\vec{r}\times\vec{F})=(s\,\vec{r})\times\vec{F}=\vec{r}\times(s\,\vec{F})$$
$$\underbrace{(\vec{r}_0+\vec{r}_1)}_{\vec{r}}\times\vec{F}=\vec{r}_0\times\vec{F}+\vec{r}_1\times\vec{F}$$

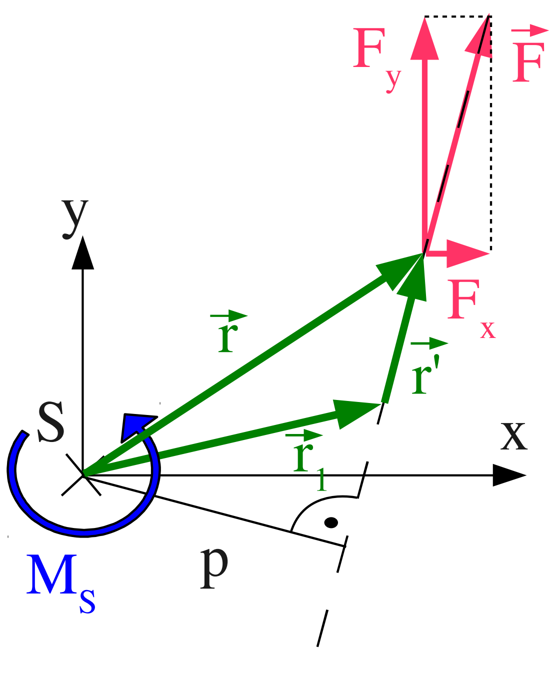
Moment síly k bodu S

- Moment je vektorová veličina $\vec{M}_S = (M_{Sx}; M_{Sy}; M_{Sz})$
- Moment síly ležící v rovině xy

$$\vec{M}_S = \underbrace{(r_y F_z - r_z F_y)}_{0}\vec{e}_1 + \underbrace{(r_z F_x - r_x F_z)}_{0}\vec{e}_2 + \underbrace{(r_x F_y - r_y F_x)}_{M_{Sz}}\vec{e}_3$$

$$M_S = (r_x F_y - r_y F_x) = \pm p F$$

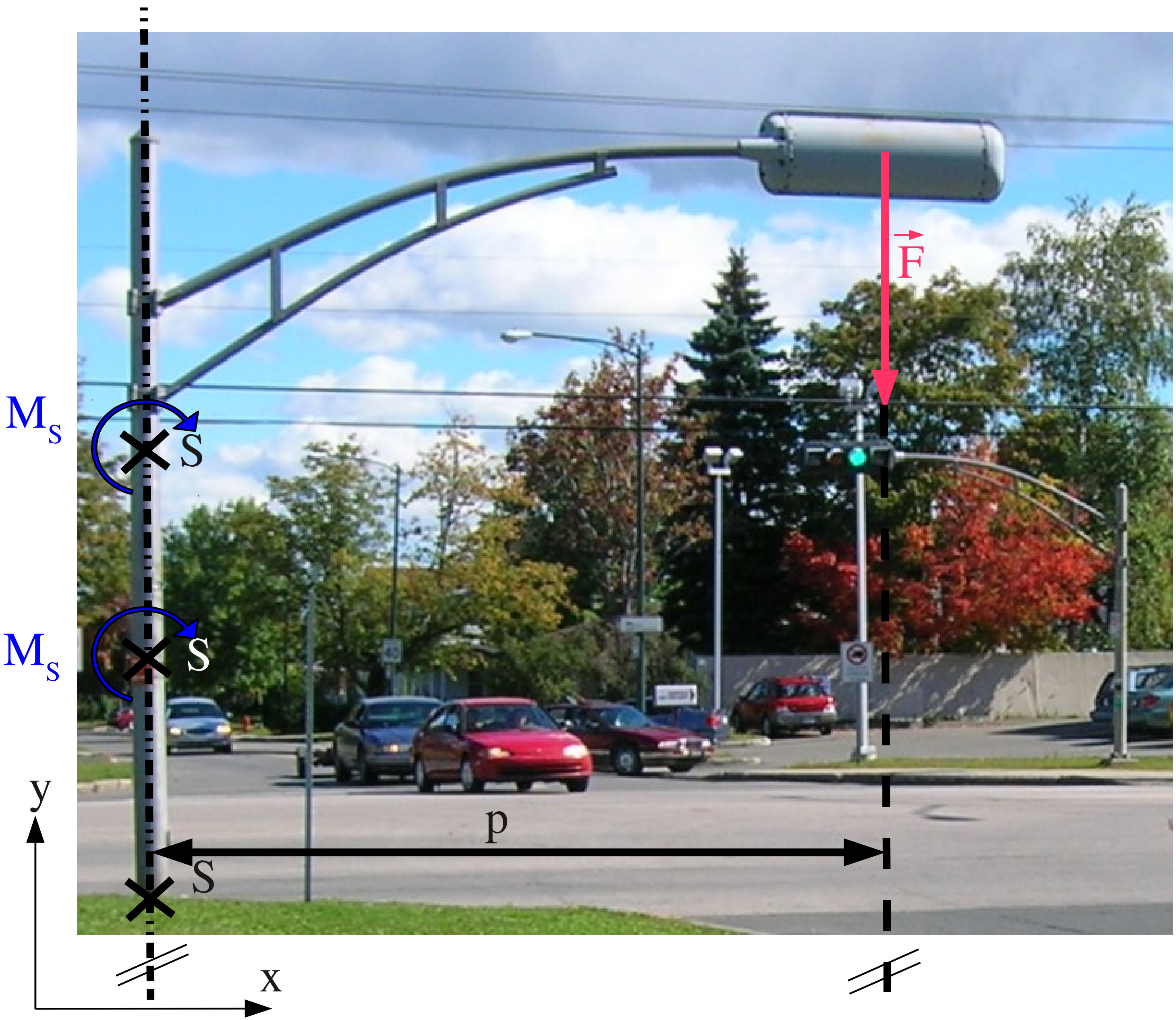
- Polohový vektor $\vec{r}$ lze volit libovolně, nejlépe jako kolmé rameno p ($\sin\varphi = 1$)



$$\vec{M}_S = \vec{r} \times \vec{F} = (\vec{r}_1 + \vec{r}') \times \vec{F} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \underbrace{\vec{r}' \times \vec{F}}_{\| = 0} = \vec{r}_1 \times \vec{F}$$

Poučky o momentu

- Moment se nemění pokud bod S leží na rovnoběžné přímce s paprskem síly



<u>Důsledek</u>
Spodní část sloupu je namáhána konstantním ohybovým momentem

<u>Pozn. ke konstrukci</u>
Pokud bod S posouváme po rameni semaforu od paprsku $\vec{F}$, zvětšuje se moment lineárně. Výztuha ramene tvoří s ramenem semaforu dvojici sil, která musí lineárně narůstat (ramena mají lineárně proměnnou vzdálenost až ke sloupu) aby byla v rovnováze s momentem

Varignonova věta

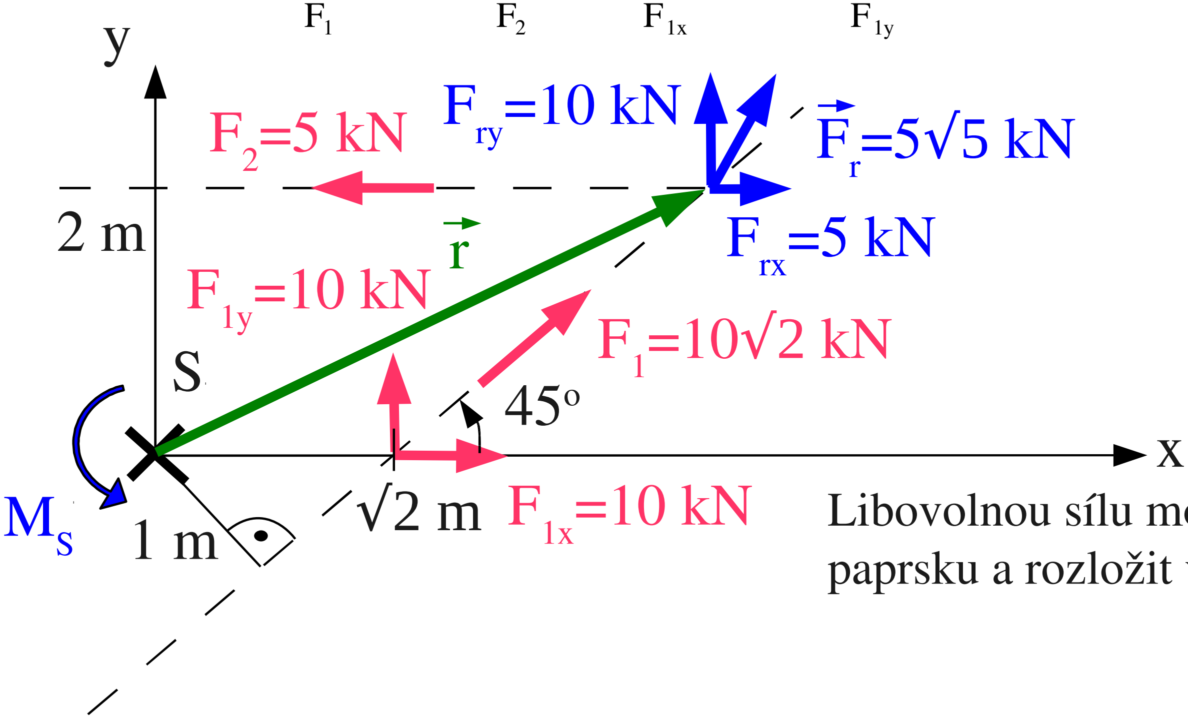
- Moment výslednice k určitému bodu je roven součtu momentů jednotlivých sil k témuž bodu

$$\vec{M}_S = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Si}$$

- Odvození ze svazku sil (přidání další síly k výslednici svazku tvoří opět svazek)

$$\vec{M}_S = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Si} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r} \times \vec{F}_i = \vec{r} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{r} \times \vec{F}_r$$

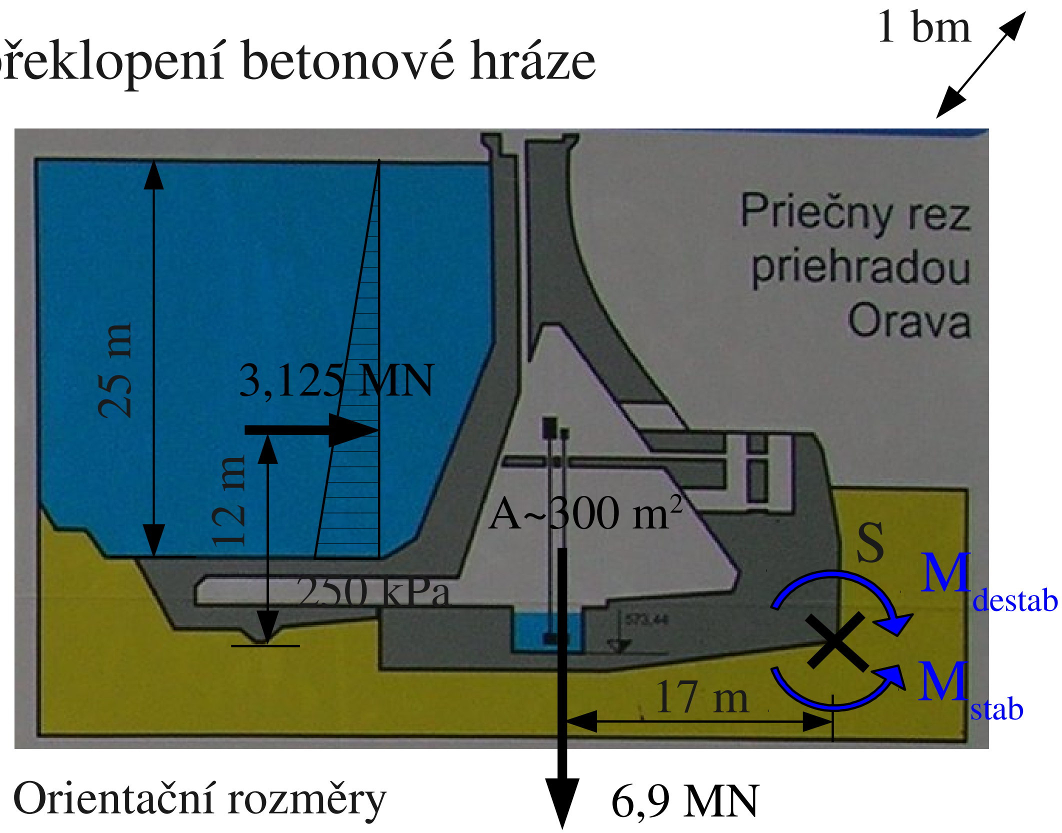
$$M_S = 1 \cdot \underbrace{10\sqrt{2}}_{F_1} + 2 \cdot \underbrace{5}_{F_2} = 0 \cdot \underbrace{10}_{F_{1x}} + \sqrt{2} \cdot \underbrace{10}_{F_{1y}} + 2 \cdot 5 = (2+\sqrt{2}) \cdot \underbrace{10}_{F_{ry}} - 2 \cdot \underbrace{5}_{F_{rx}} = 10(1+\sqrt{2})\,\mathrm{kNm}$$



Libovolnou sílu možno posouvat libovolně po paprsku a rozložit v kterémkoli bodě na paprsku

Příklad - přehrada Orava

- Stanovte stupeň bezpečnosti proti překlopení betonové hráze



Orientační rozměry

$$M_{destab} = 12 \cdot 3{,}125 = 37{,}5\ \mathrm{MNm}$$

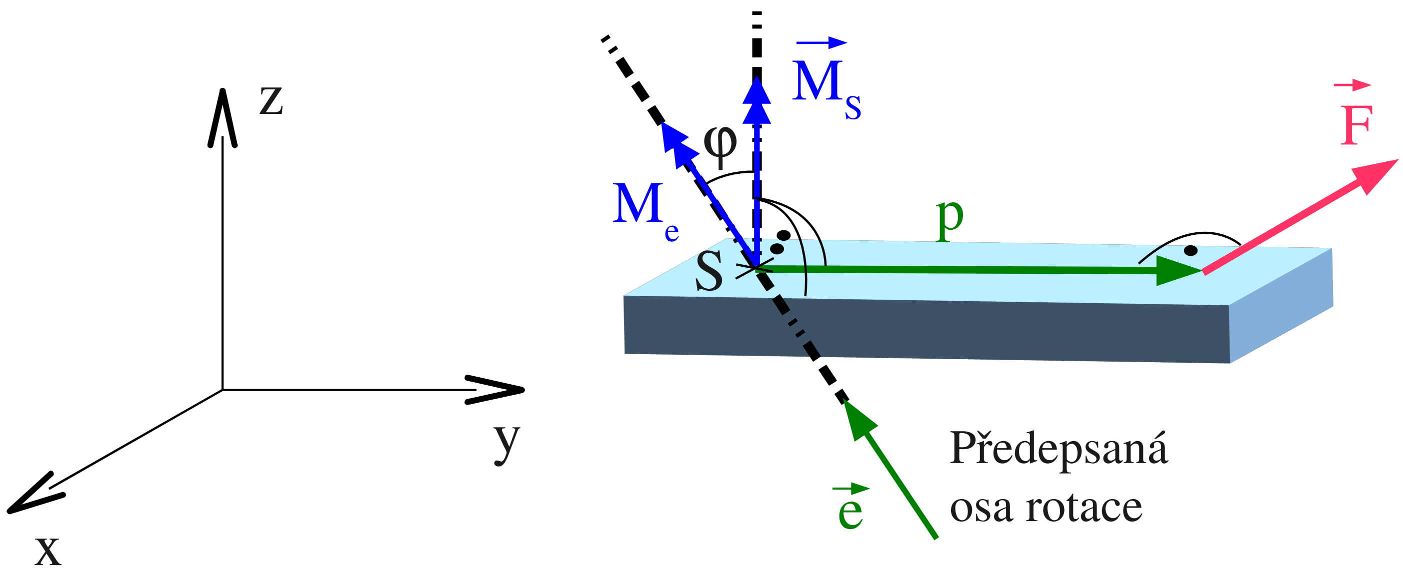
$$M_{stab} = 17 \cdot 6{,}9 = 117{,}3\ \mathrm{MNm}$$

$$s = \frac{M_{stab}}{M_{destab}} = 3{,}128$$

Moment síly M_e k předepsané ose

- Osa rotace může být libovolně orientovaná, moment k bodu S je třeba rozložit do směru předepsané osy, M_e je skalár jako výsledek skalárního součinu

$$M_e = \vec{e} \cdot \vec{M}_s = |\vec{e}||\vec{M}_s| \cos\varphi = |\vec{M}_s| \cos\varphi$$



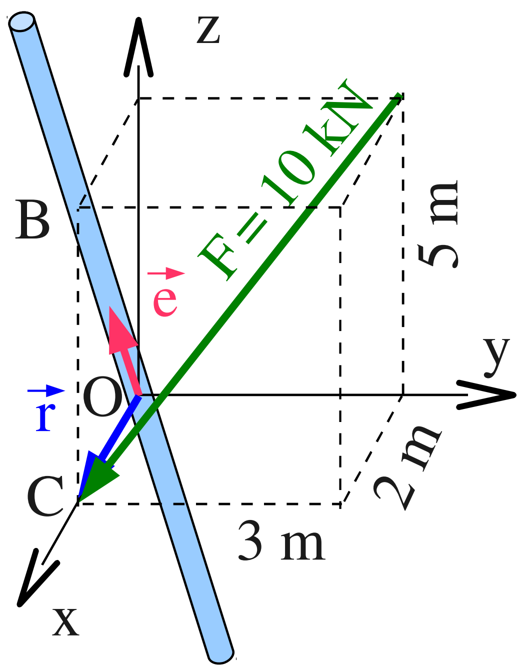
- Protíná-li paprsek síly osu rotace (p=0), či je-li s ní rovnoběžný $(\vec{e} \perp \vec{M}_s, \vec{e} \cdot \vec{M}_s = 0)$ je statický moment síly k předepsané ose nulový

Složky vektoru $\vec{e}$

$$M_e = \vec{e} \cdot \underbrace{(\vec{r} \times \vec{F})}_{\vec{M}_s} = \begin{vmatrix} \boxed{e_x \quad e_y \quad e_z} \\ r_x \quad r_y \quad r_z \\ F_x \quad F_y \quad F_z \end{vmatrix} = M_{Sx} e_x + M_{Sy} e_y + M_{Sz} e_z$$

Příklad - moment k předepsané ose

- Jak velký kroutící moment způsobuje síla $\vec{F}$ na tyč ?



$$\vec{F}=10\left(\frac{2}{\sqrt{2^2+3^2+5^2}};\frac{-3}{\sqrt{2^2+3^2+5^2}};\frac{-5}{\sqrt{2^2+3^2+5^2}}\right)=(3{,}24;-4{,}87;-8{,}11)\,\mathrm{kN}$$

$$\vec{e}=\left(\frac{2}{\sqrt{2^2+5^2}};0;\frac{5}{\sqrt{2^2+5^2}}\right)=\underbrace{(0{,}371;0;0{,}928)}_{\text{jedn. vektor}}$$

$$\vec{r}=(2;0;0)\,\mathrm{m}$$

$$M_e=\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0{,}371 & 0 & 0{,}928 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3{,}24 & -4{,}87 & -8{,}11 \end{vmatrix}=$$

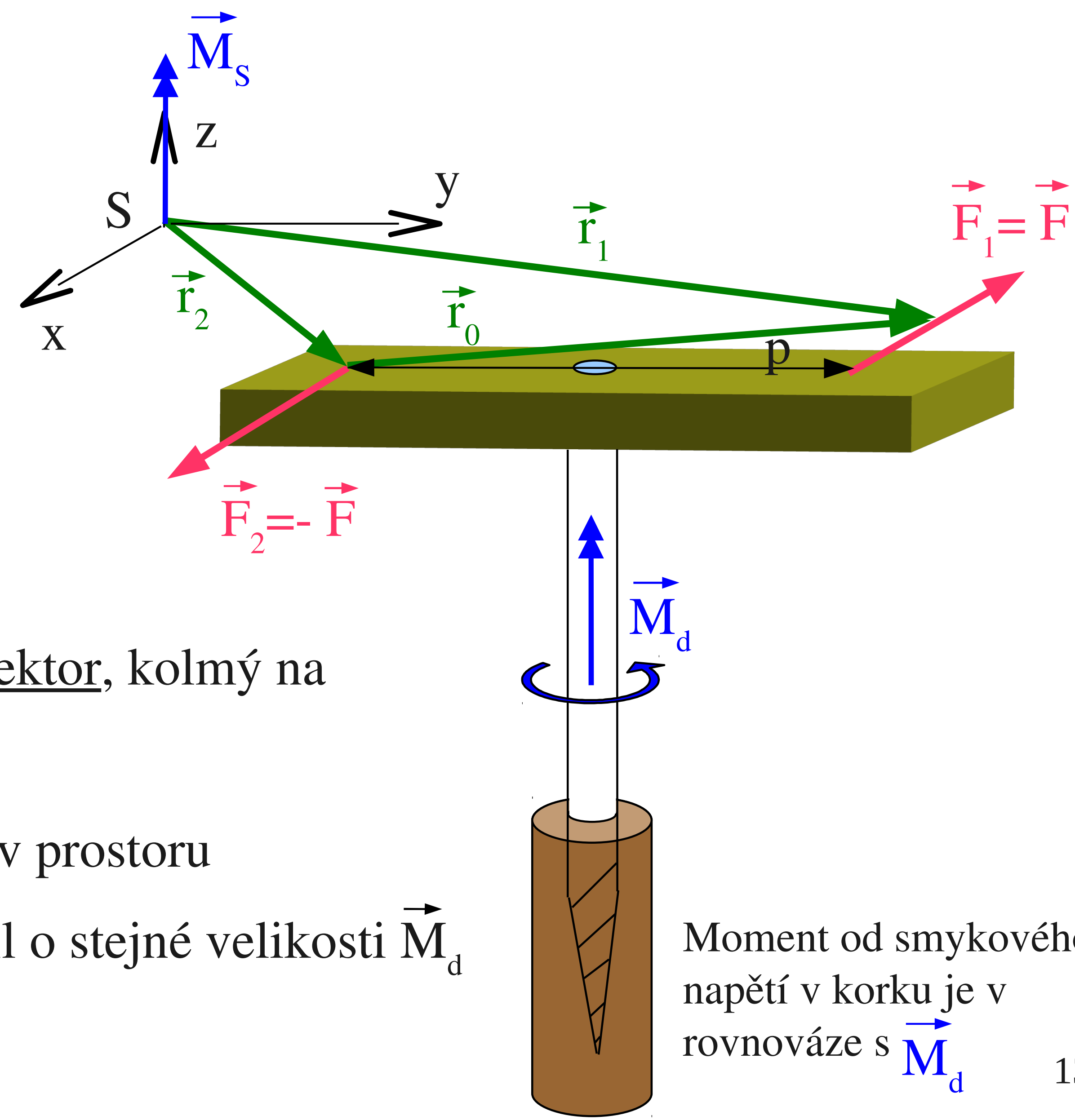
$$\underbrace{0}_{M_{0x}}\cdot 0{,}371+\underbrace{16{,}22}_{M_{0y}}\cdot 0+\underbrace{-9{,}74}_{M_{0z}}\cdot 0{,}928=-9{,}04\,\mathrm{kNm}$$

Pozn. Polohový vektor $\vec{r}$ lze volit libovolně od osy OB k paprsku síly F. Složky momentu M_S jsou určeny vždy k počátku vektoru $\vec{r}$. Při volbě vektoru $\vec{r} = \overrightarrow{BC}$ vyjdou však obecně i jinak složky M_S. V tomto případě bude např. $M_{oy} = -M_{By}$

Moment dvojice sil k bodu

- Dvojice sil = stejně velké dvě síly $\vec{F}$ opačně orientované
- Moment dvojice sil k bodu S

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{r}_0$$
$$\vec{M}_S = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$
$$\vec{M}_S = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 =$$
$$(\vec{r}_2 + \vec{r}_0) \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) =$$
$$\vec{r}_0 \times \vec{F} = \vec{M}_d$$
$$M_d = \pm pF$$

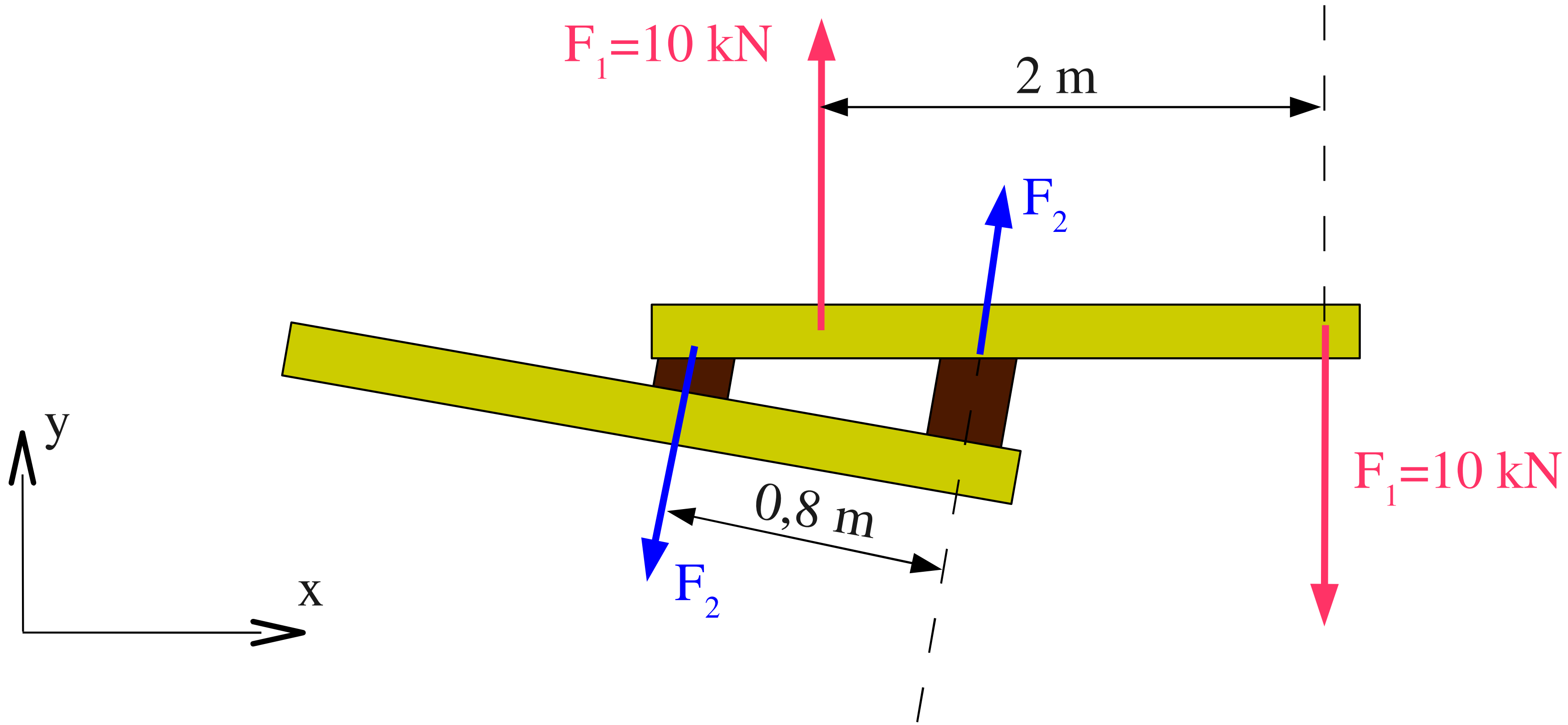


Moment od smykového napětí v korku je v rovnováze s $\vec{M}_d$

- Moment dvojice sil je <u>volný vektor</u>, kolmý na rovinu dvou sil, a proto ho
  - Lze libovolně posouvat v prostoru
  - Nahradit jinou dvojicí sil o stejné velikosti $\vec{M}_d$

Příklad - rovnováha momentu dvojice sil

- Určete síly ve spoji nastavovaného trámu



$$M_{d1} + M_{d2} = 0$$

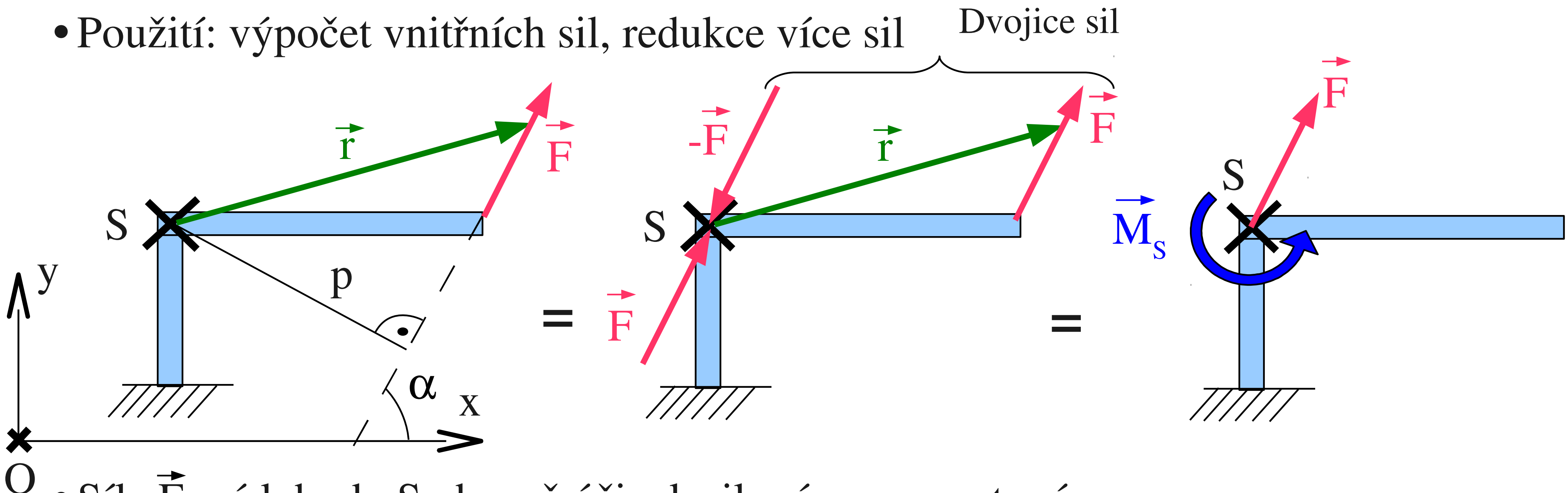
$$-2 \cdot F_1 + 0{,}8 \cdot F_2 = 0$$

$$-2 \cdot 10 + 0{,}8\,F_2 = 0$$

$$F_2 = 25\ \text{kN}$$

Redukce síly k bodu S

- Vyjádření statického účinku síly $\vec{F}$ k bodu tělesa S (úloha ekvivalence)
- Použití: výpočet vnitřních sil, redukce více sil



- Síla $\vec{F}$ má k bodu S obecně účinek <u>silový</u> a <u>momentový</u>

$$\overrightarrow{M_S} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad M_S = \pm pF$$

- Síla $\vec{F}$ a moment $\vec{M}_S$ jsou navzájem kolmé $\vec{F} \cdot \overrightarrow{M_S} = \vec{F} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = 0$

- Redukce k počátku rovinné souřadné soustavy v rovině xy (S=O)

$$\vec{F} = F\cos\alpha\,\vec{e}_1 + F\sin\alpha\,\vec{e}_2 = (F\cos\alpha\,; F\sin\alpha)$$

$$\overrightarrow{M_S} = \overrightarrow{M_O} = \vec{r}_0 \times \vec{F} = M_O\,\vec{e}_3, \quad M_O = x\,F_y - y\,F_x$$

Redukce síly k bodu

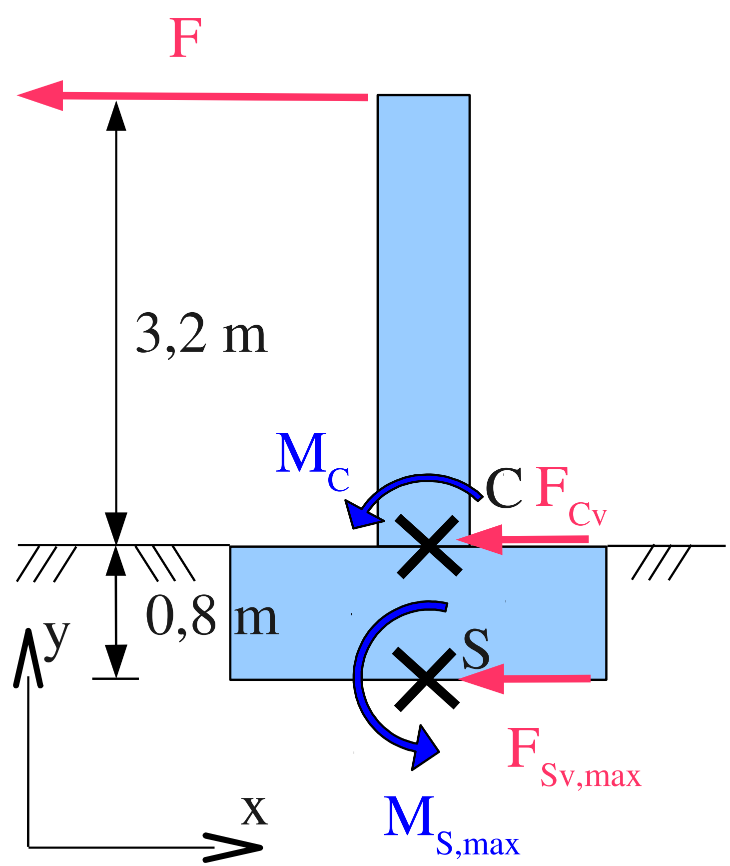
- Inverzní úloha - nalezení ekvivalentní síly z daného momentu a síly v bodě
- Jak velké vodorovné zatížení ve výšce 3,2 m nad terénem můžeme připustit na základové patce, pokud

$$F_{Sv,max} = 20\,\mathrm{kN}\,,\; M_{S,max} = 40\,\mathrm{kNm}$$

$$F_{Sv} = F\,,\; M_S = 4\,F$$

$$F \leq 20\,\mathrm{kN} \wedge F \leq \frac{40}{4}\,\mathrm{kN} \Rightarrow F_{max} = 10\,\mathrm{kN}$$

  - rozhoduje moment



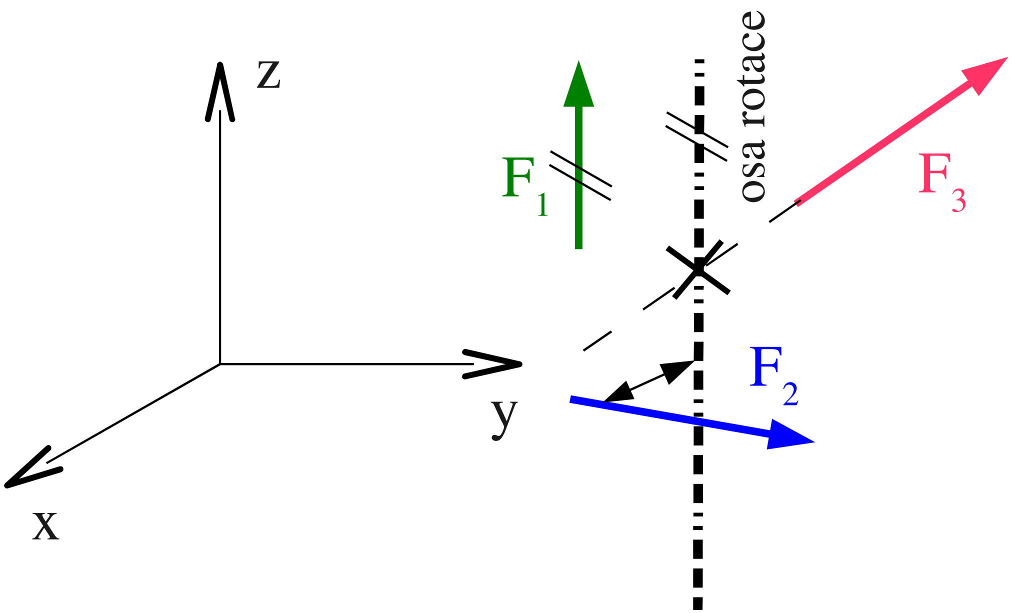
- Jaké posouvající síle a momentu musí vzdorovat průžez procházející bodem C

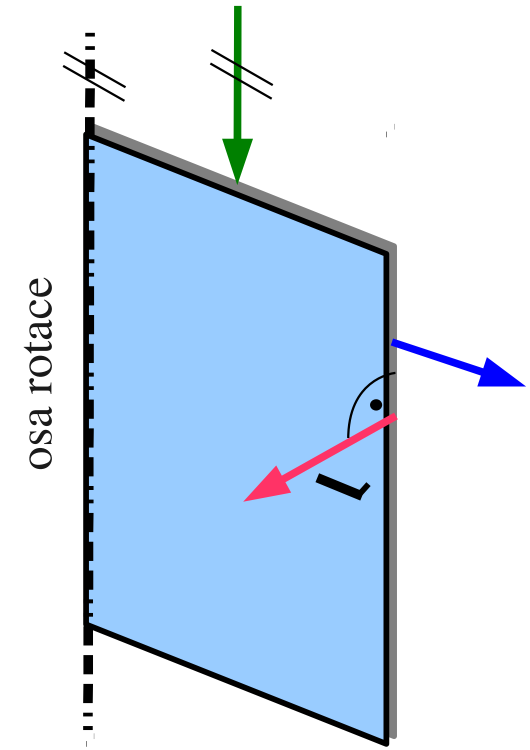
$$\leftarrow\; F_{Cv} = F = 10\,\mathrm{kN}$$

$$\circlearrowleft_C\; M_C = 3{,}2\,F = 32\,\mathrm{kNm}$$

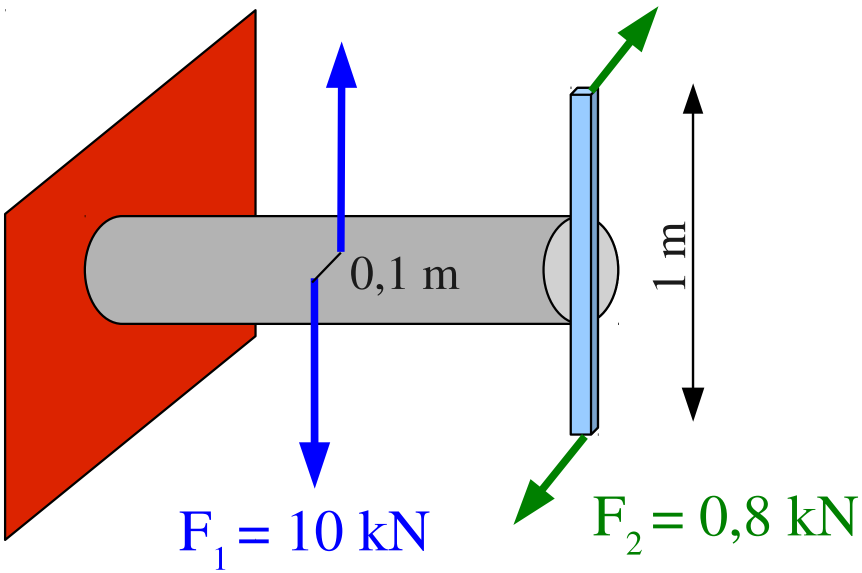
Otázky

- Které síly mají nulový moment k ose rotace?





- Která dvojice sil způsobuje větší namáhání trubky v kroucení ?



Přednášky z předmětu SM1, Stavební fakulta ČVUT v Praze

Autor Vít Šmilauer

Náměty, připomínky, úpravy, vylepšení zasílejte prosím na

vit.smilauer@fsv.cvut.cz

Created 10/2007 in OpenOffice 2.3, ubuntu linux 6.06

Last update Feb 21, 2011