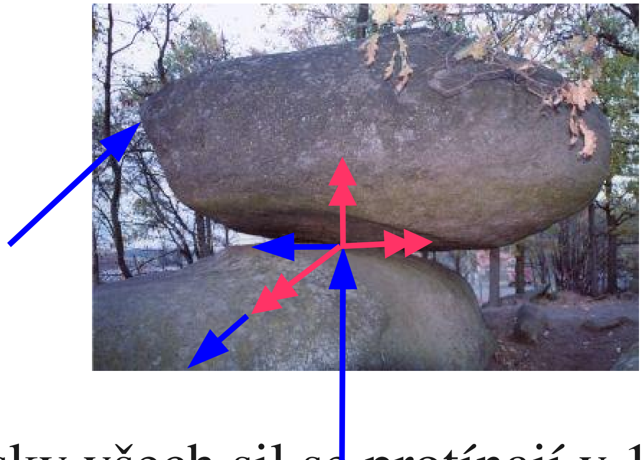
Obecná soustava sil a momentů v prostoru

- Zcela obecné zatížení silami a momenty na těleso v prostoru (vede na 6 rovnic)

Snaha o převrácení (akce)

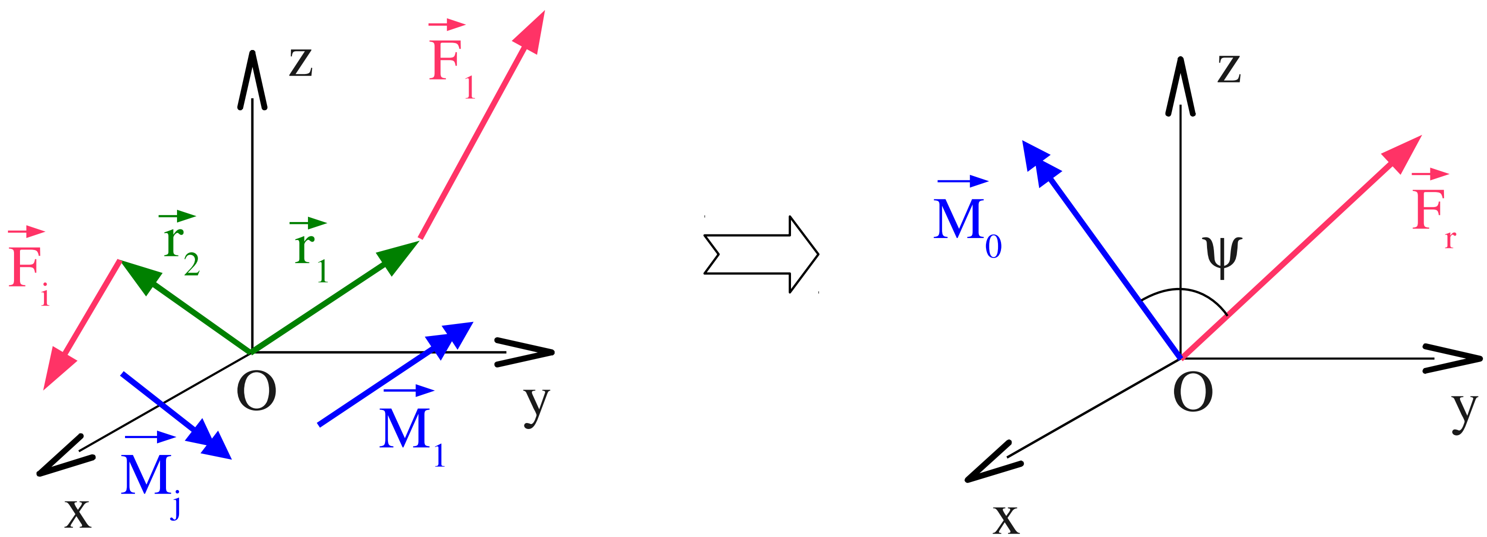


Viklan u obce Kadov, ~30 t

- Specifické případy
  - **Svazek sil** - paprsky všech sil se protínají v 1 bodě (3 rovnice)
  - **Soustava rovnoběžných sil** - paprsky sil jsou rovnoběžné (3 rovnice)
  - **Rovinná soustava sil a momentů** - síly v jedné rovině a momenty jsou kolmé (3 rovnice)
    - Rovinný svazek sil (2 rovnice)
    - Rovinná soustava rovnoběžných sil (2 rovnice)

Výsledný účinek soustavy sil a momentů v prostoru

- Před řešením úlohy rovnováhy či ekvivalence provedeme redukci známých sil $\vec{F}_i$ a momentů $\vec{M}_j$ k danému bodu, obvykle počátku O. Tím obdržíme jedinou výslednici $\vec{F}_r$ a jediný moment $\vec{M}_O$ k danému bodu (počátku)



$\vec{F}_r$ a $\vec{M}_O$ - **bivektor**

$$\vec{F}_r = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{OFi} + \sum_{j=1}^{m} \vec{M}_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) + \sum_{j=1}^{m} \vec{M}_j$$

- Bivektorem lze nahradit jakoukoli soustavu sil a momentů

- Složky sil

$$F_{rx}=\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=F_i\cos\alpha_i$$

$$F_{ry}=\sum_{i=1}^{n} F_{iy}=F_i\cos\beta_i$$

$$F_{rz}=\sum_{i=1}^{n} F_{iz}=F_i\cos\gamma_i$$

- Složky momentů

$$M_{Ox}=\sum_{i=1}^{n}\left(r_{iy}F_{iz}-r_{iz}F_{iy}\right)+\sum_{j=1}^{m} M_{jx}$$

$$M_{Oy}=\sum_{i=1}^{n}\left(r_{iz}F_{ix}-r_{ix}F_{iz}\right)+\sum_{j=1}^{m} M_{jy}$$

$$M_{Oz}=\sum_{i=1}^{n}\left(r_{ix}F_{iy}-r_{iy}F_{ix}\right)+\sum_{j=1}^{m} M_{jz}$$

- Velikost síly

$$F_r=\sqrt{F_{rx}^2+F_{ry}^2+F_{rz}^2}$$

- Velikost momentu

$$M_O=\sqrt{M_{Ox}^2+M_{Oy}^2+M_{Oz}^2}$$

- Úhly

$$\cos\alpha_r=\frac{F_{rx}}{F_r},\quad \cos\beta_r=\frac{F_{ry}}{F_r},\quad \cos\gamma_r=\frac{F_{rz}}{F_r}$$

- Úhly

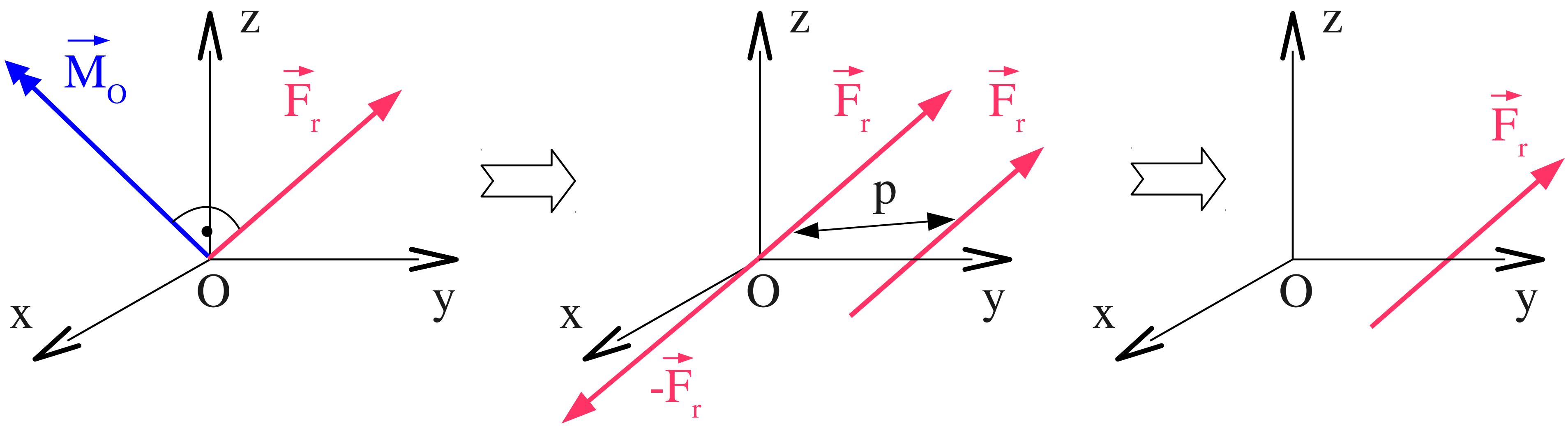
$$\cos\lambda=\frac{M_{Ox}}{M_O},\quad \cos\mu=\frac{M_{Oy}}{M_O},\quad \cos\nu=\frac{M_{Oz}}{M_O}$$

- Úhel ψ: $\vec{F}_r\cdot\vec{M}_O=F_r M_O\cos\psi\,,\quad \cos\psi=\frac{F_{rx}M_{Ox}+F_{ry}M_{Oy}+F_{rz}M_{Oz}}{F_r M_O}=$

$$=\cos\alpha_r\cos\lambda+\cos\beta_r\cos\mu+\cos\gamma_r\cos\nu$$

• Kromě obecných případů redukce k O mohou nastat tyto čtyři specifické

1. $\vec{F}_r \perp \vec{M}_O$, $\vec{F}_r \cdot \vec{M}_O = 0$, soustavu lze nahradit jedinou silou $\vec{F}_r$, která vytváří rovněž moment $\vec{M}_O$ (rotací souřadné soustavy kolmé na $\vec{M}_O$ přechází na rovinný případ)



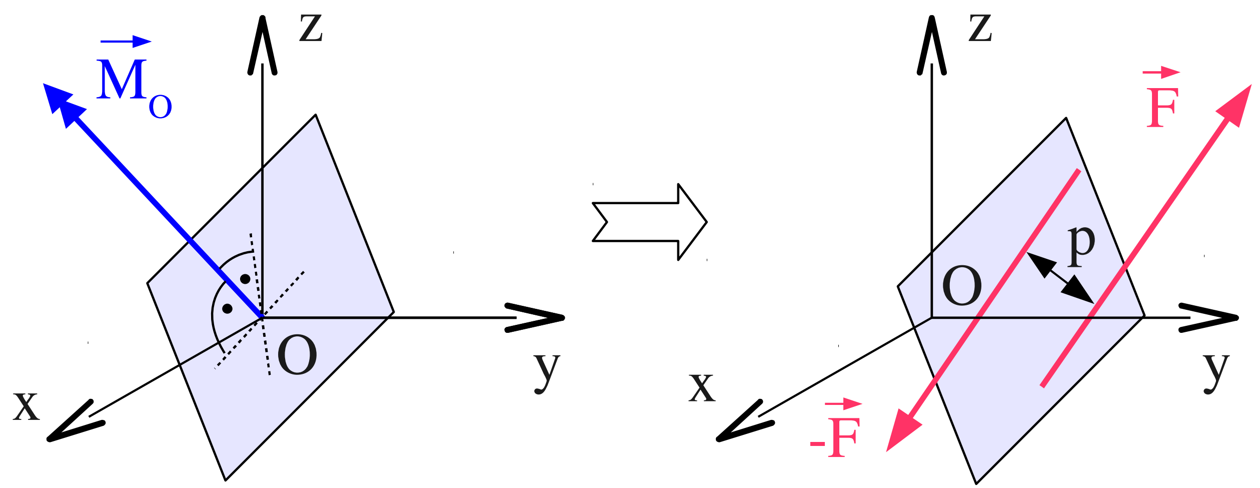
Výpočet paprsku síly z definice složek momentu

$$M_{Ox} = y\,F_{rz} - z\,F_{ry}\,,\ M_{Oy} = z\,F_{rx} - x\,F_{rz}\,,\ M_{Oz} = x\,F_{ry} - y\,F_{rx}$$

<u>pozn.</u> Tyto tři rovnice jsou lineárně závislé, k určení bodu na paprsku výslednice stačí libovolné dvě

2. $\vec{F}_r \neq \vec{0} \wedge \vec{M}_O = \vec{0}$ výsledkem je jediná síla působící v počátku

3. $\vec{F}_r = \vec{0} \wedge \vec{M}_O \neq \vec{0}$ výsledkem je moment (volný vektor), který může být nahrazen dvojicí sil v jakékoli rovině kolmé na moment



4. $\vec{F}_r = \vec{0} \wedge \vec{M}_O = \vec{0}$ soustava je v rovnováze (princip výpočtu rovnováhy)

• Určete výslednou sílu, výsledný moment a úhel ψ soustavy sil k bodu O

$$\vec{F}_r = \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_i = (3;4;5)\,\mathrm{kN}$$

$$F_r = \sqrt{3^2+4^2+5^2} = 7{,}071\,\mathrm{kN}$$

$$M_{Ox} = 0\,F_1 - 7\,F_2 + 7{,}2\,F_3 = 8\,\mathrm{kNm}$$

$$M_{Oy} = 0\,F_1 + 0 - 1{,}2\,F_3 = -6\,\mathrm{kNm}$$

$$M_{Oz} = 0\,F_1 + 0\,F_2 + 0 = 0\,\mathrm{kNm}$$

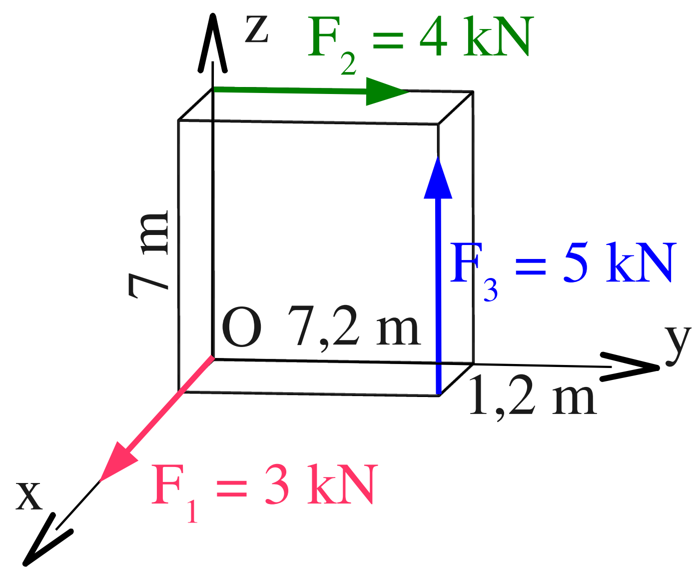
$$M_O = \sqrt{8^2+(-6)^2} = 10\,\mathrm{kNm}$$

$$\cos\lambda = \frac{M_{Ox}}{M_O} = 0{,}8$$

$$\cos\mu = \frac{M_{Oy}}{M_O} = -0{,}6, \quad \cos\nu = 0$$

$$\cos\psi = \frac{3\cdot 8 + 4\cdot(-6) + 5\cdot 0}{7{,}071\cdot 10} = 0$$

Soustavu lze nahradit jedinou silou, která působí na paprsku

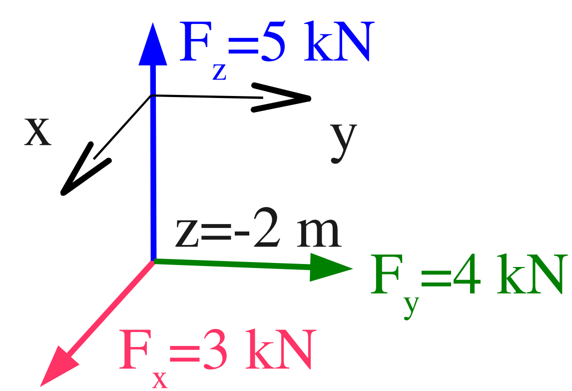


$$5y - 4z = 8 \wedge 3z - 5x = -6 \wedge 4x - 3y = 0$$

∞ řešení, z prvních dvou rovnic

$-5x + 5y - z = 2$ např. bod $[0;0;-2]$

paprsek má směr síly $\vec{F}_r$



Obecná soustava sil v prostoru - úloha rovnováhy

- Prostorová soustava sil $\{\vec{F}_1, ..., \vec{F}_n\}$ a momentů $\{\vec{M}_1, ..., \vec{M}_m\}$ je v **rovnováze** se silami $\{\vec{R}_1, ..., \vec{R}_o\}$ je-li výsledný účinek všech sil a všech momentů nulový

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{o} \vec{R}_j = \vec{0} \qquad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{Oi}^{F} + \sum_{j=1}^{o} \vec{M}_{Oj}^{R} + \sum_{k=1}^{m} \vec{M}_k = \vec{0}$$

silové (směrové) podmínky momentové podmínky

$$\swarrow : \sum F_{ix} + \sum R_{jx} = 0 \qquad \swarrow : \sum M_{Oix}^{F} + \sum M_{Ojx}^{R} + \sum M_{kx} = 0$$

$$\rightarrow : \sum F_{iy} + \sum R_{jy} = 0 \qquad \twoheadrightarrow : \sum M_{Oiy}^{F} + \sum M_{Ojy}^{R} + \sum M_{ky} = 0$$

$$\uparrow : \sum F_{iz} + \sum R_{jz} = 0 \qquad \uparrow : \sum M_{Oiz}^{F} + \sum M_{Ojz}^{R} + \sum M_{kz} = 0$$

- Celkem k dispozici 6 statických podmínek rovnováhy = 6 neznámých, jednoznačné řešení pokud determinant soustavy ≠ 0
- Momentové podmínky rovnováhy lze volit k libovolnému bodu (obvykle k O)

- Každý moment je volný vektor a lze ho nahradit dvojicí sil na rameni
- Pro úlohu **ekvivalence** postačí vložit “-” před neznámé členy $\vec{R}$ a $\vec{M}^R$ a tím je převést na pravou stranu všech rovnic
- Až tři silové podmínky lze nahradit podmínkami momentovými, maximálně 6 momentových podmínek rovnováhy (ekvivalence), osy nesmí být nulovými přímkami
- Nulové přímky soustavy - přímky ke kterým je statický moment soustavy nulový (vede na momentovou podmínku 0=0)
- Pro výpočet reakcí tuhého tělesa v prostoru je k dispozici 6 podmínek rovnováhy. Pro výpočet více reakcí je obecně třeba doplnit další podmínky, např. podmínky přetvárné.

Příklad - rovnováha

- Určete síly a momenty v uchycení chrliče dle schématu zatížení a reakcí

sv. Vít v Praze

$$M_z + 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0 \quad \Rightarrow M_z = -0{,}3\ \mathrm{kNm}$$

$$-0{,}6\,R_2 - 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0 \quad \Rightarrow R_2 = -0{,}25\ \mathrm{kN}$$

$$R_x - R_2 - 0{,}5 = 0 \quad \Rightarrow R_x = 0{,}25\ \mathrm{kN}$$

$$0{,}6\,R_1 - 0{,}6 \cdot 5 - 1{,}2 \cdot 0{,}2 = 0 \quad \Rightarrow R_1 = 5{,}4\ \mathrm{kN}$$

$$R_y - R_1 = 0 \quad \Rightarrow R_y = 5{,}4\ \mathrm{kN}$$

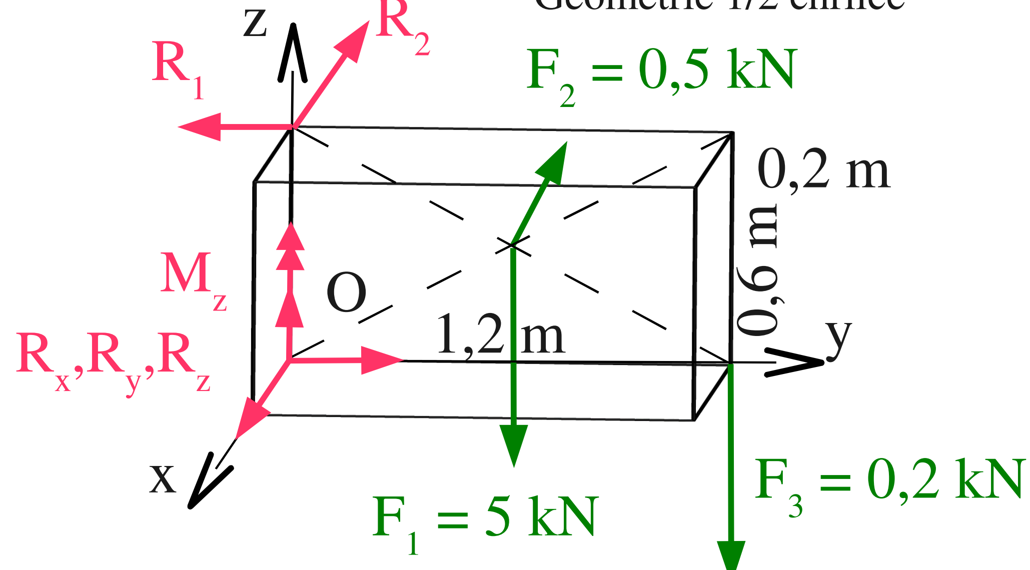
$$R_z - 5 - 0{,}2 = 0 \quad \Rightarrow R_z = 5{,}2\ \mathrm{kN}$$

- jiné podmínky (výpočet, kontrola)

$$-0{,}6\,R_x + 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0$$

$$0{,}6\,R_y - 0{,}6 \cdot 5 - 1{,}2 \cdot 0{,}2 = 0$$

Geometrie 1/2 chrliče



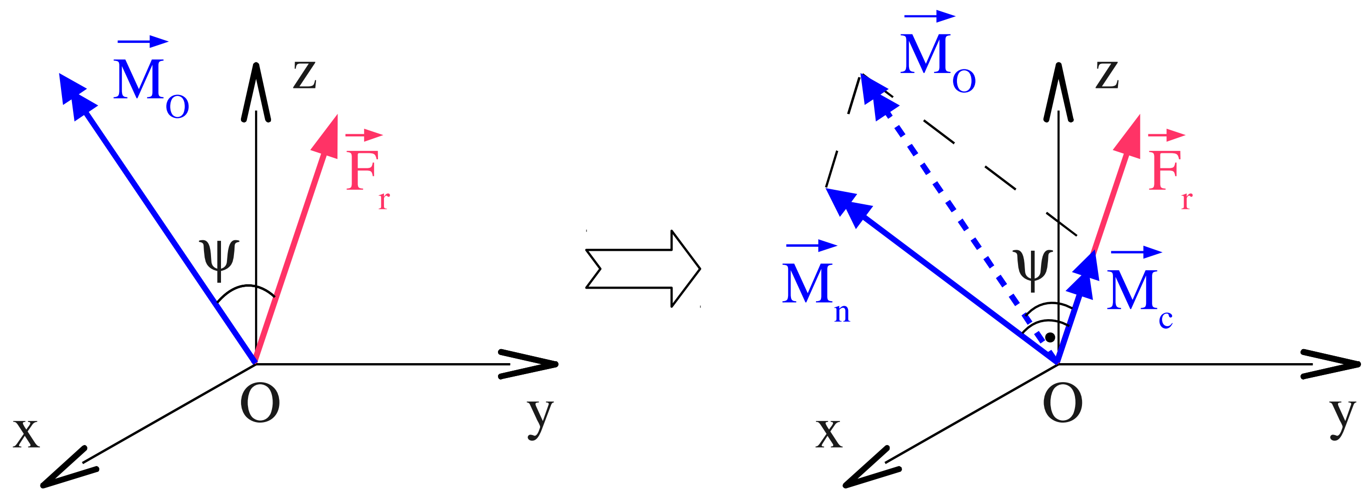
Ekvivalentní nahrazení soustavy šroubem

- Soustavu sil a momentů jsme zredukovali do bivektoru $\vec{F}_r$ a $\vec{M}_O$ v počátku O
- Moment $\vec{M}_O$ rozložíme do $\vec{M}_n$ a $\vec{M}_c$ ($\vec{M}_c$ je koaxiální s $\vec{F}_r$ a $\vec{M}_n$ je kolmý na $\vec{M}_c$ a zároveň v rovině s $\vec{M}_O$)

$$M_c = M_O \cos\psi\,, \quad M_n = M_O \sin\psi$$

$$M_{cx} = M_c \cos\alpha_r\,, M_{cy} = M_c \cos\beta_r\,, M_{cz} = M_c \cos\gamma_r$$

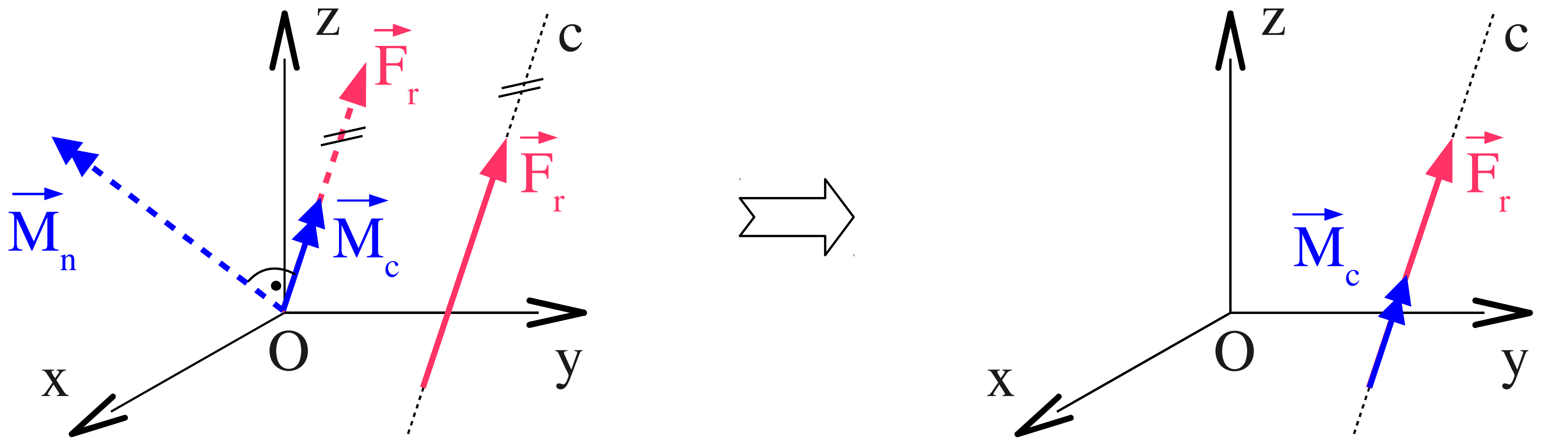
$$\vec{M}_n = \vec{M}_0 - \vec{M}_c$$



Ekvivalentní nahrazení soustavy šroubem

- Sílu $\vec{F}_r$ posuneme tak, aby zároveň nahrazovala účinek momentu $\vec{M}_n$
- Moment $\vec{M}_c$ posuneme do centrální osy c, určenou rovnicemi (k výpočtu postačují pouze libovolné dvě rovnice)

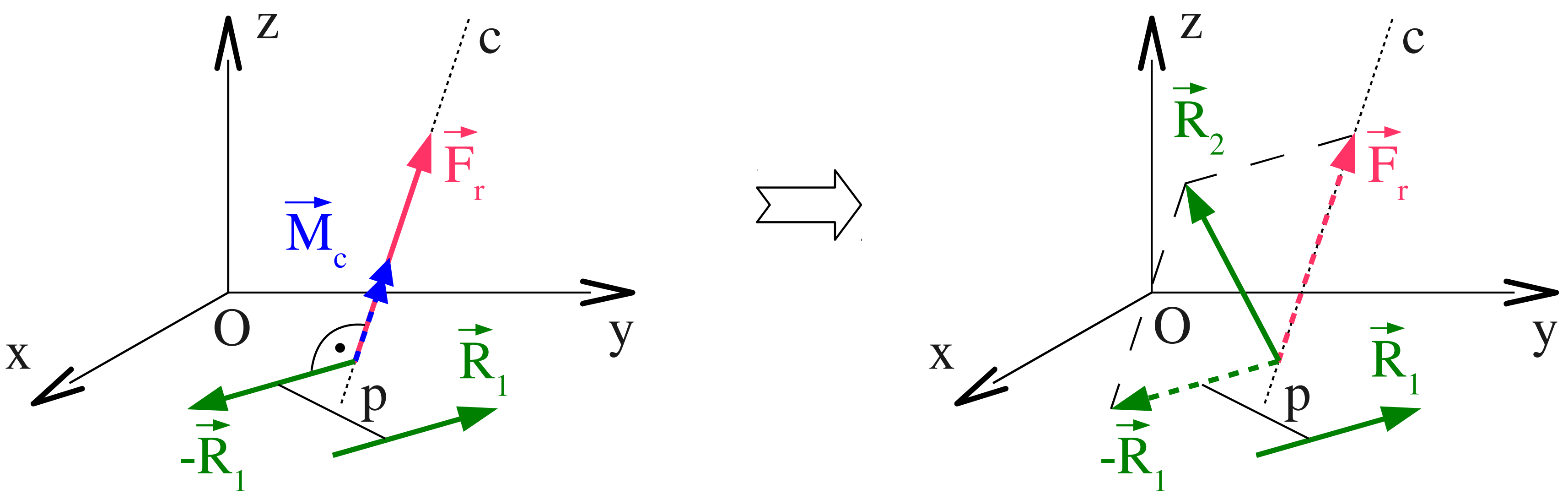
$$M_{cx} = y\,F_{rz} - z\,F_{ry}\,,\; M_{cy} = z\,F_{rx} - x\,F_{rz}\,,\; M_{cz} = x\,F_{ry} - y\,F_{rx}$$



- Výsledný účinek na těleso je posuvný a otáčivý podél, resp. okolo osy c (šroub)
- Síla $\vec{F}_r$ a kolineární moment $\vec{M}_c$ tvoří tzv. invarianty soustavy sil

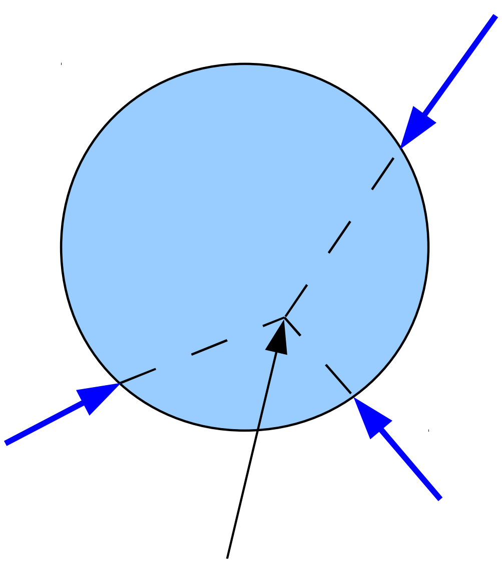
Ekvivalentní nahrazení soustavy dvěma mimoběžnými silami

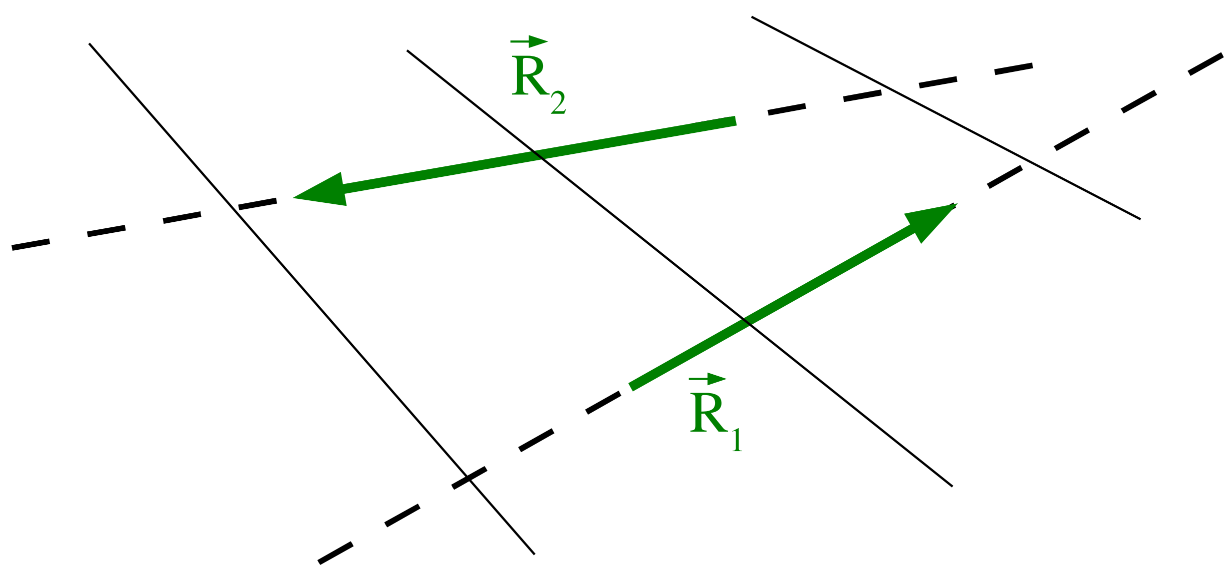
- Moment $\vec{M}_c$ nahraďme dvojicí sil $\vec{R}_1$ na libovolném rameni p dle obrázku. Součtem síly $-\vec{R}_1$ a $\vec{F}_r$ je síla $\vec{R}_2$
- Soustavu obecných sil (a momentů) jsme nahradili dvěma mimoběžnými silami $\vec{R}_1$ a $\vec{R}_2$ (silový kříž)



Nulové přímky soustavy

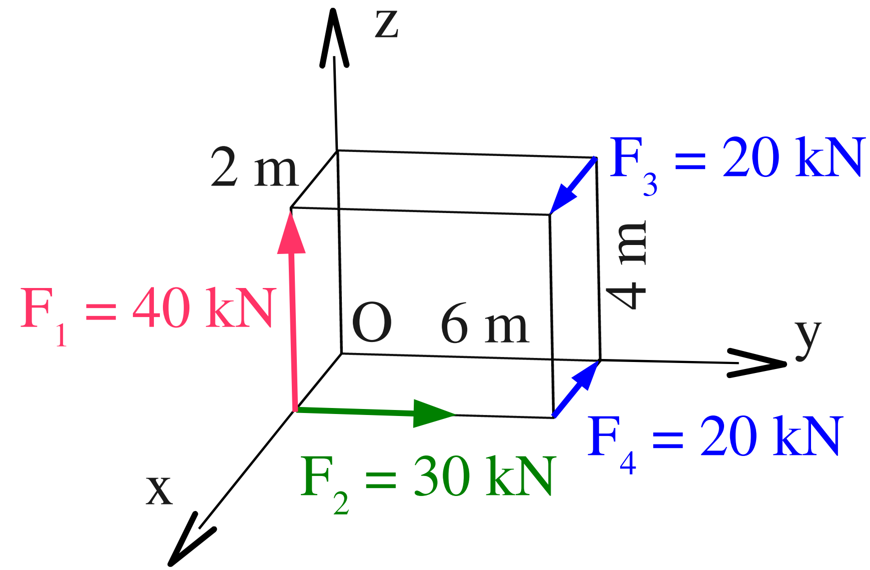
- Každá přímka protínající paprsky sil $\vec{R}_1$ a $\vec{R}_2$ tvoří nulovou přímku soustavy (moment k nim je nulový)
- Pro bivektor je to každá přímka protínající $\vec{F}_r$ a kolmá k $\vec{M}_O$
- K nulovým přímkám nemá smysl provádět momentové podmínky (výsledkem je nulový moment)
- Pokud není soustava v rovnováze, pak existuje buď $F_r \neq 0$ či $M_O \neq 0$ a existují nulové přímky. Rotaci tělesa okolo nulových přímek není bráněno





Tímto bodem prochází nulová přímka, např. kolmá k rovině (reakce nebrání rotaci-vyjímkový případ podepření)

Nahraďte soustavu šroubem a silovým křížem



$\swarrow : F_{rx} = 0 \qquad \swarrow : M_{Ox} = 0$

$\rightarrow : F_{ry} = 30\,\text{kN} \qquad \twoheadrightarrow : M_{Oy} = 4\,F_3 - 2\,F_1 = 0$

$\uparrow : F_{rz} = 40\,\text{kN} \qquad \uparrow : M_{Oz} = 2\,F_2 = 60\,\text{kNm}$

$F_r = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\,\text{kN}, \quad M_O = 60\,\text{kNm}$

$\cos\alpha_r = 0, \quad \cos\beta_r = 0{,}6, \quad \cos\gamma_r = 0{,}8$

$\cos\lambda = 0, \quad \cos\mu = 0{,}6, \quad \cos\nu = 0{,}8, \quad \cos\psi = \frac{40\cdot 60}{50\cdot 60} = 0{,}8, \quad \sin\psi = 0{,}6$

$M_c = M_0 \cos\psi = 48\,\text{kNm}, \quad M_n = M_0 \sin\psi = 36\,\text{kNm}$

$\vec{M}_c = (0\,;28{,}8\,;38{,}4)\,\text{kNm}, \ \vec{M}_n = \vec{M}_O - \vec{M}_c = (0\,;-28{,}8\,;21{,}6)\,\text{kNm}$

$40y - 30z = 0 = M_{nx} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{4}{3}y$

$-40x = -28{,}8 = M_{ny} \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}72\,\text{m}$

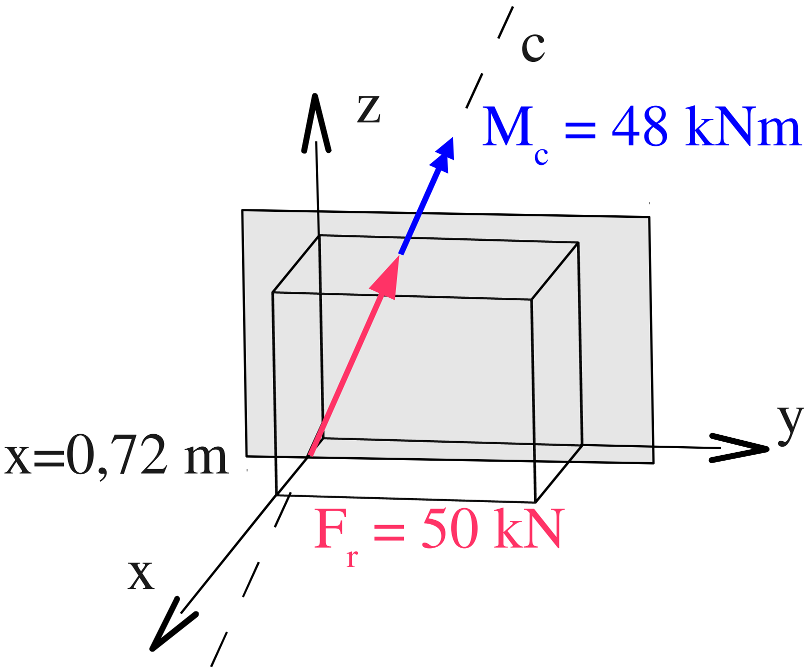
kolmý vektor na $\vec{c}=(0;30;40)$ např. $(0;4;-3)$, protože $(0;30;40)\cdot(0;4;-3)=0$

pro rameno 5 m kolmé k $\vec{c}$ je $R_1=\frac{48}{5}=9{,}6\ \mathrm{kN}$, $\vec{R}_1=(-9{,}6;0;0)\ \mathrm{kN}$

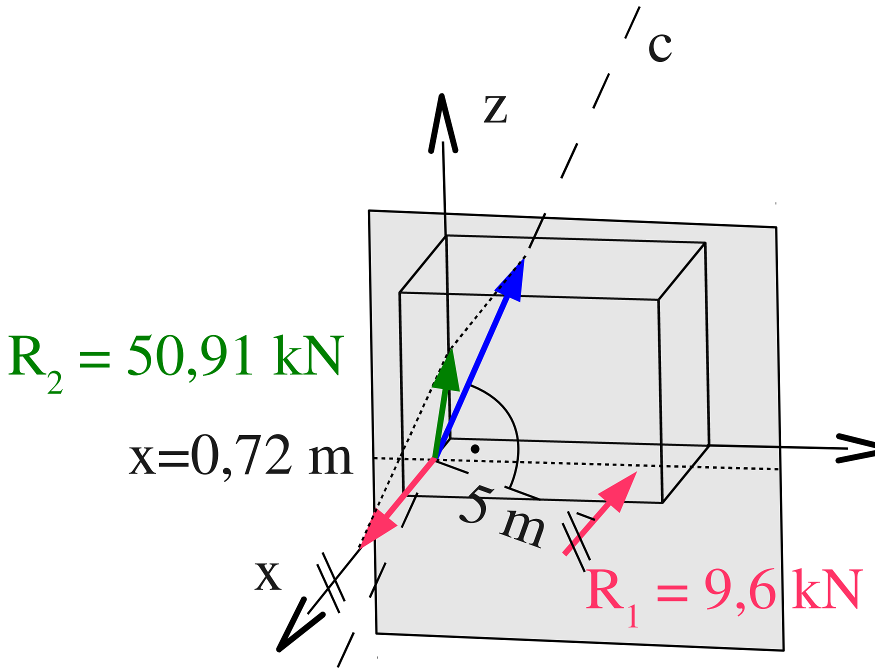
$\vec{R}_2=-\vec{R}_1+\vec{F}_r=(9{,}6;0;0)+(0;30;40)=(9{,}6;30;40)\ \mathrm{kN}$

$R_2=50{,}91\ \mathrm{kN}$

- Výsledný účinek šroubu



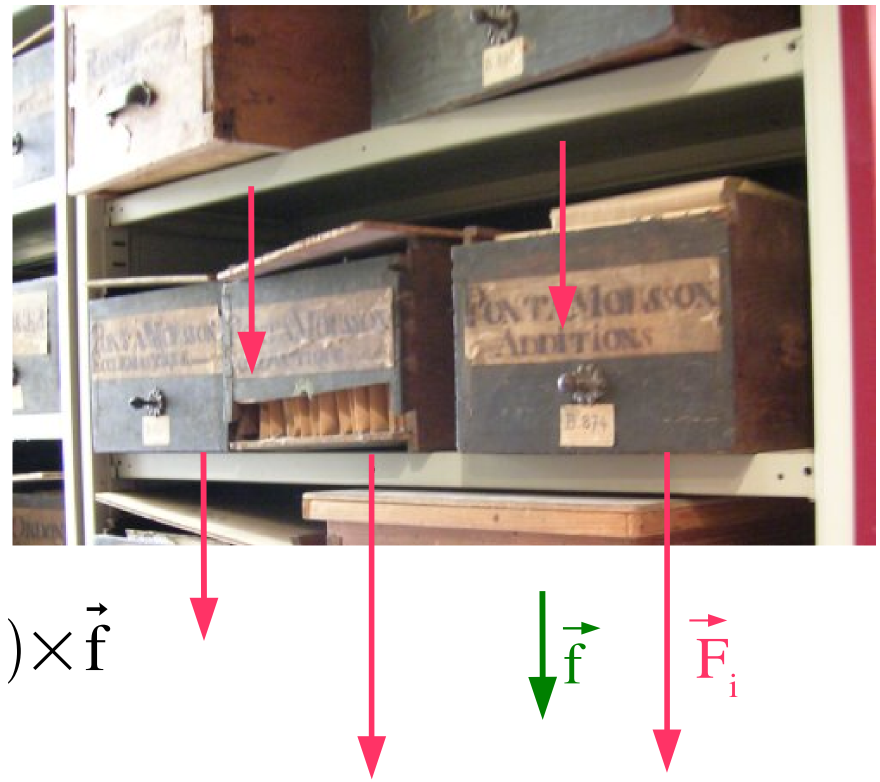
- Výsledný účinek mimoběžných sil R_1 a R_2



Prostorová soustava rovnoběžných sil

- Paprsky všech sil jsou rovnoběžné
- Násobky jednotkového vektoru $\vec{f}$

$$\vec{F}_i = F_i\,\vec{f}$$



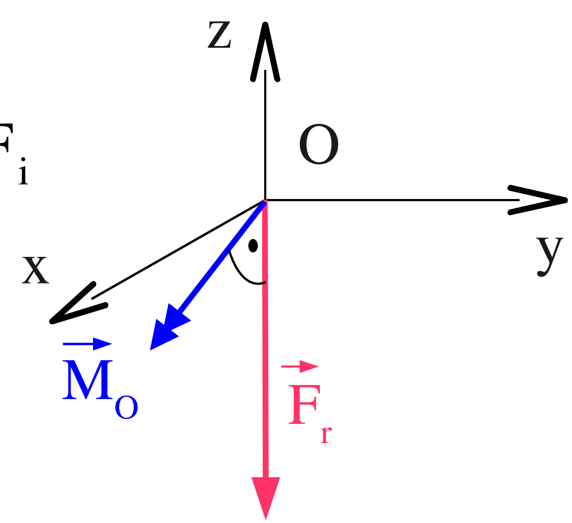
- Výsledný účinek k počátku O

$$\vec{F}_r = \sum \vec{F}_i = \sum F_i\,\vec{f} = \vec{f}\,F_r$$

$$\vec{M}_O^F = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \times F_i\,\vec{f} = \sum (\vec{r}_i F_i) \times \vec{f}$$

$$\vec{F}_r \cdot \vec{M}_O^F = \vec{f}\,F_r \cdot \sum \underbrace{(\vec{r}_i F_i) \times \vec{f}}_{\perp \vec{f}} = 0$$

$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2 + F_{rz}^2} = \sqrt{\left(\sum F_i\right)^2 (f_x^2 + f_y^2 + f_z^2)} = \sum F_i$$



Soustava rovnoběžných svislých sil

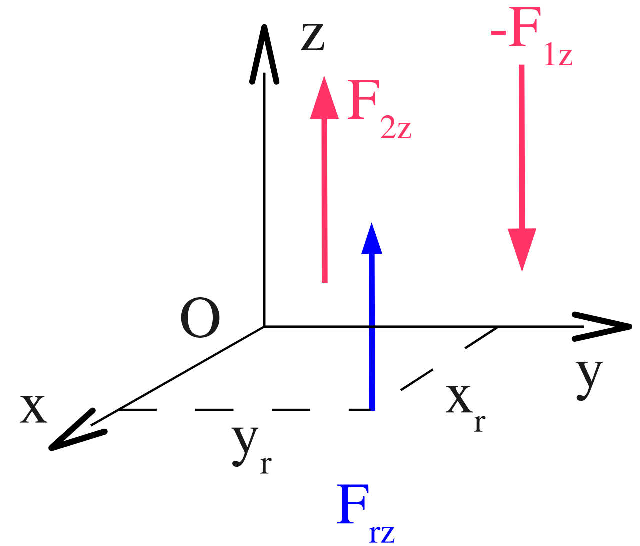
- Obvykle rovnoběžné svislé síly, redukce šesti na tři podmínky rovnováhy

$$F_{ix}=0,\quad F_{iy}=0,\quad M_{iz}=0,\quad F_{iz}\neq 0$$

$$\uparrow:\quad F_{rz}=\sum F_{iz}$$

$$\swarrow:\quad M_x=\sum M_{ix}=\sum F_{iz}\,y_i=F_{rz}\,y_r$$

$$\twoheadrightarrow:\quad M_y=\sum M_{iy}=\sum -F_{iz}\,x_i=-F_{rz}\,x_r$$



- Průsečík výslednice s rovinou xy

$$x_r=\frac{-M_y}{F_{rz}}=\frac{\sum F_{iz}x_i}{F_{rz}}$$

$$y_r=\frac{M_x}{F_{rz}}=\frac{\sum F_{iz}y_i}{F_{rz}}$$

Určete výslednici rovnoběžných svislých sil

- Podmínky ekvivalence

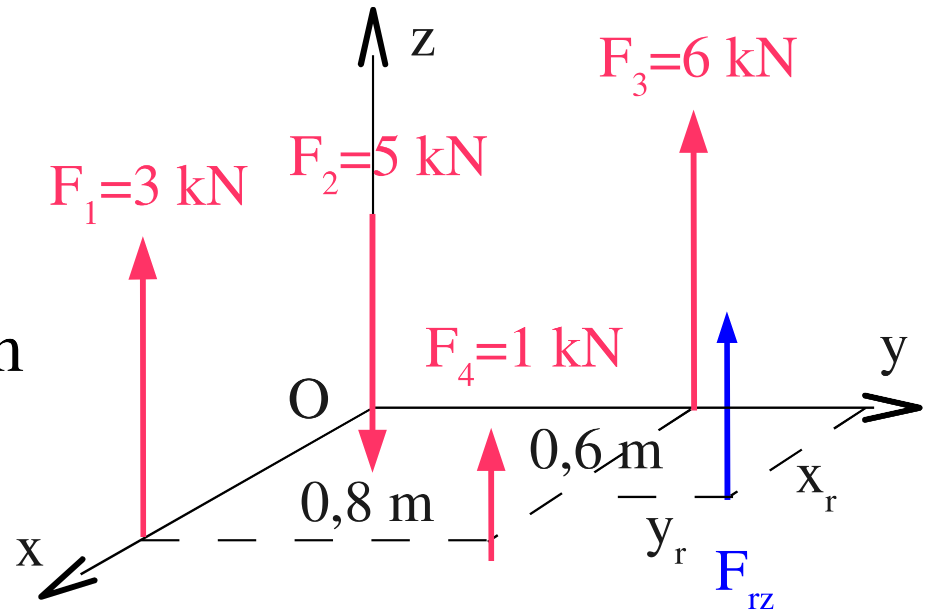
$$\uparrow: \quad F_{rz} = 3 - 5 + 6 + 1 = 5\,\mathrm{kN}$$

$$\swarrow: \quad M_x = F_3 y_3 + F_4 y_4 = 6 \cdot 0{,}8 + 1 \cdot 0{,}8 = 5{,}6\,\mathrm{kNm}$$

$$\twoheadrightarrow: \quad M_y = -F_1 x_1 - F_4 x_4 = -3 \cdot 0{,}6 - 1 \cdot 0{,}6 = -2{,}4\,\mathrm{kNm}$$

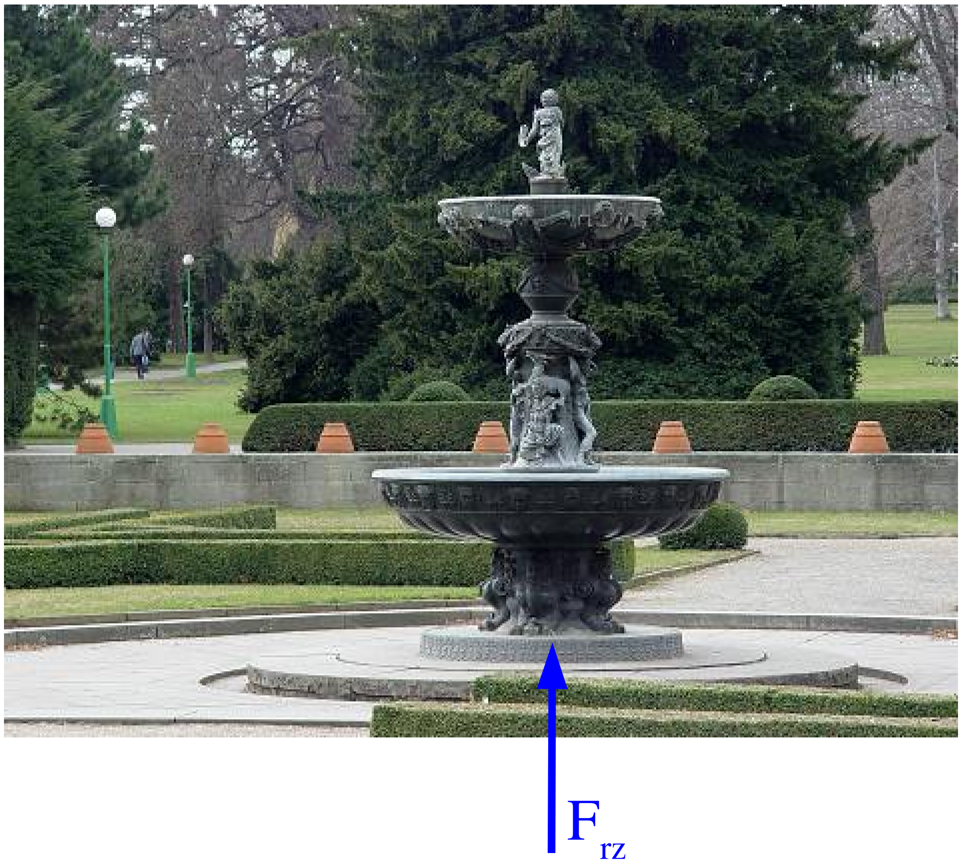
$$x_r = \frac{-M_y}{F_{rz}} = \frac{2{,}4}{5} = 0{,}48\,\mathrm{m}$$

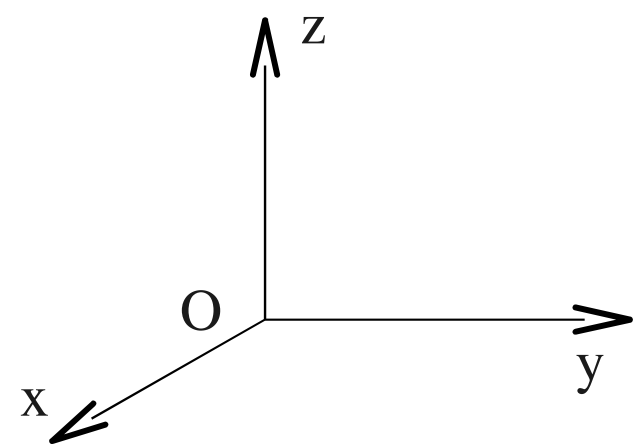
$$y_r = \frac{M_x}{F_{rz}} = \frac{5{,}6}{5} = 1{,}12\,\mathrm{m}$$



Otázky

- Jaké budou reakce v patě zpívající fontány při zatížení vlastní tíhou?





Letohrádek královny Anny, Praha

Obecně tři silové a tři momentové, díky symetrii jsou tíhy jednotlivých částí prakticky na ose symetrie (soustava svislých sil v ose), výsledkem je převážně svislá reakce v patě.

Přednášky z předmětu SM1, Stavební fakulta ČVUT v Praze

Autor Vít Šmilauer

Náměty, připomínky, úpravy, vylepšení zasílejte prosím na

vit.smilauer@fsv.cvut.cz

Created 10/2007 in OpenOffice 2.3, ubuntu linux 6.06

Last update Feb 21, 2011