

Vybrané metody řešení soustavy rovnic

- Podmínky rovnováhy či ekvivalence vedou často na soustavu rovnic, např.

$$\curvearrowright_0): 4 + 2R_1 + 1R_2 + 0,8R_3 = 0$$

$$\rightarrow : -8 + 0R_1 - 1R_2 + 0,8R_3 = 0$$

$$\uparrow : -2 + 1R_1 + 2R_2 + 0R_3 = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0,8 \\ 0 & -1 & 0,8 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{A}^{-1} \text{ je inverzní matice}$$

Copyright (c) 2007-2008 Vít Šmilauer

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Mechanics, Czech Republic

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License" found at <http://www.gnu.org/licenses/>

1. **Výpočet A^{-1}** - excel, openoffice, gnumeric, matlab, lepší kalkulačka

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -0,5 & 0,5 & 1 \\ -0,625 & 1,875 & 1,25 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 8 \\ 20 \end{pmatrix}$$

2. **Gaussova eliminace** - cílem je horní trojúhelníková matice

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0,8 & -4 \\ 0 & -1 & 0,8 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right] \approx \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} \text{ prohodit 2. a 3. řádek}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0,8 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0,8 & 8 \end{array} \right] \begin{matrix} +(-\frac{1}{2} \cdot 1. \check{r}) \\ +(-\frac{0}{2} \cdot 1. \check{r}) \end{matrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0,8 & -4 \\ 0 & 1,5 & -0,4 & 4 \\ 0 & -1 & 0,8 & 8 \end{array} \right] \begin{matrix} \\ +(\frac{1}{1,5} \cdot 2. \check{r}) \end{matrix} =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0,8 & -4 \\ 0 & 1,5 & -0,4 & 4 \\ 0 & 0 & 0,5333 & 10,666 \end{array} \right]$$

• výpočtem a dosazováním odspodu obdržíme postupně řešení neznámých

3. Cramerovo pravidlo (výhodné pro soustavy do 3 neznámých včetně)

$$x_i = D_i / D$$

- Kde x_i je neznámá, D determinant matice \mathbf{A} , D_i determinant matice \mathbf{A} po nahrazení jejího i -tého sloupce vektorem \mathbf{b}

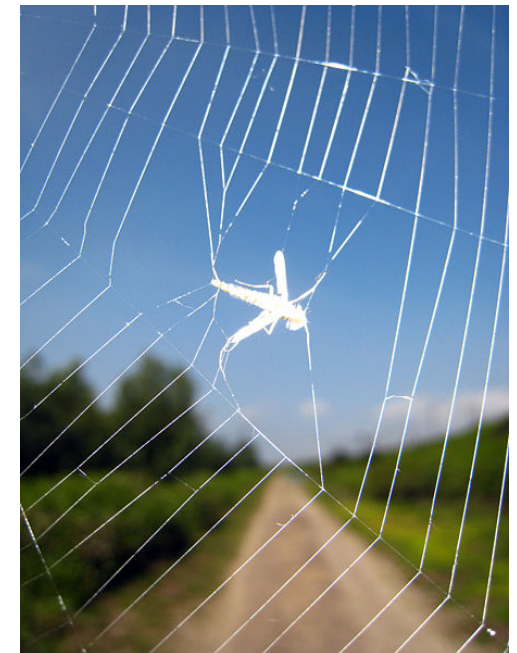
$$R_1 = \begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 1 & 0,8 & 2 & 1 & 0,8 \\ 8 & -1 & 0,8 & 0 & -1 & 0,8 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] = \end{array}$$

$$\begin{aligned} & \left[(-4) \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0,8 \cdot 2 + 0,8 \cdot 8 \cdot 2 - (-4) \cdot 0,8 \cdot 2 - 1 \cdot 8 \cdot 0 - 0,8 \cdot (-1) \cdot 2 \right] / \\ & \left[2 \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0,8 \cdot 1 + 0,8 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 0,8 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 0,8 \cdot (-1) \cdot 1 \right] = \\ & 22,4 / (-1,6) = -14 \text{ kN} \end{aligned}$$

4. Metoda dosazovací - často chyby ve výpočtu, přenos chyb při dosazování

Obecná soustava sil v rovině

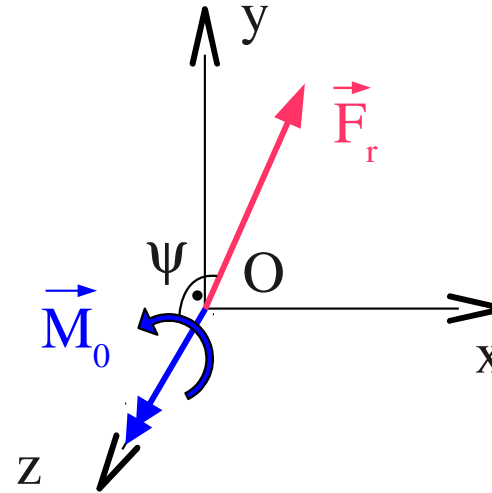
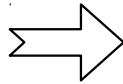
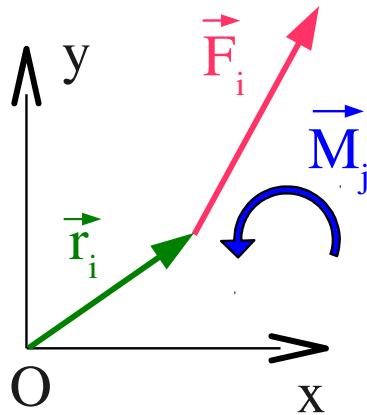
- Soustavou rozumíme určitou skupinu sil (síly od zatížení, reakce, vybrané síly...)
- Všechny síly soustavy leží v jedné rovině
- Všechny momenty jsou kolmé na tuto rovinu (moment lze nahradit dvojicí sil)
- Často volíme souřadný systém x - y , totožný s rovinou sil
- Platí všechny podmínky pro prostor (výslednice, rovnováha, ekvivalence)
- Složky F_z , M_y a M_z jsou nulové - zjednodušení výpočtu



Zavěšený most přes Odru na D47, foto W. Ullmann

Výsledný účinek soustavy sil a momentů v rovině

- Před řešením úlohy rovnováhy či ekvivalence provedeme redukci známých sil \vec{F}_i a momentů \vec{M}_j k danému bodu, obvykle počátku O. Tím obdržíme jedinou výslednici \vec{F}_r a jediný moment \vec{M}_O k danému bodu (počátku)



\vec{F}_r a \vec{M}_O - bivektor, $\psi=90^\circ$

$$\vec{F}_r = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_i}^F + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \vec{M}_j$$

- Bivektorem lze nahradit jakoukoli soustavu sil a momentů

- Složky sil

$$F_{rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = F_i \cos \alpha_i$$

$$F_{ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = F_i \cos \beta_i$$

~~$$F_{rz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} = F_i \cos \gamma_i$$~~ **identita**

- Velikost síly

$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2 + \cancel{F_{rz}^2}}$$

- Úhly

$$\cos \alpha_r = \frac{F_{rx}}{F_r}, \quad \cos \beta_r = \sin \alpha_r = \frac{F_{ry}}{F_r}$$

~~$$\cos \gamma_r = \frac{F_{rz}}{F_r}$$~~ **0**

- Úhel ψ :
$$\cos \psi = \frac{F_{rx} \cancel{M_{Ox}} + F_{ry} \cancel{M_{Oy}} + \cancel{F_{rz}} M_{Oz}}{F_r M_O} = 0$$

- Složky momentů

~~$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^n (r_{iy} F_{iz} - r_{iz} F_{iy}) + \sum_{j=1}^m M_{jx}$$~~ **identita**

~~$$M_{Oy} = \sum_{i=1}^n (r_{iz} F_{ix} - r_{ix} F_{iz}) + \sum_{j=1}^m M_{jy}$$~~ **identita**

$$M_{Oz} = \sum_{i=1}^n (r_{ix} F_{iy} - r_{iy} F_{ix}) + \sum_{j=1}^m M_{jz}$$

- Velikost momentu

$$M_O = \sqrt{\cancel{M_{Ox}^2} + \cancel{M_{Oy}^2} + M_{Oz}^2} = M_{Oz}$$

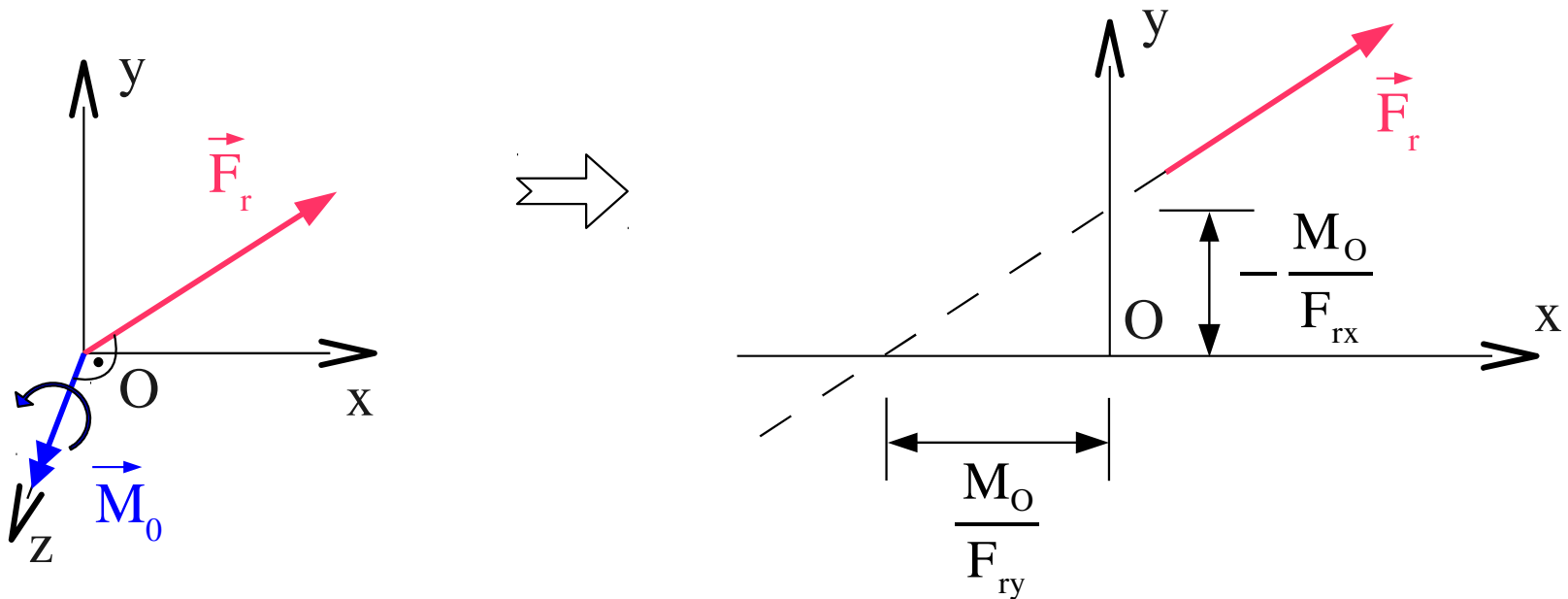
- Úhly

$$\cos \lambda = \frac{\cancel{M_{Ox}}}{M_O}, \quad \cos \mu = \frac{\cancel{M_{Oy}}}{M_O}, \quad \cos \nu = \frac{M_{Oz}}{M_O} \quad \mathbf{1}$$

Nahrazení rovinné soustavy jedinou silou

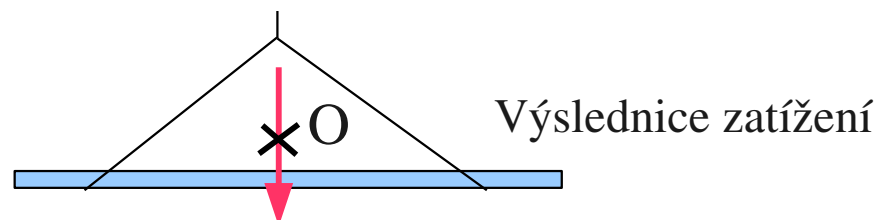
- Každý bivektor a každou soustavu sil v rovině lze nahradit jedinou silou (může být nulová - rovnováha, čistý otáčivý účinek soustavy)
- Při řešení v prostoru by taková rovinná soustava odpovídala šroubu, kde $M_C = 0$
- Rovnice paprsku výslednice

$$M_{O(z)} = x F_{ry} - y F_{rx} \quad y = \frac{F_{ry}}{F_{rx}} x - \frac{M_O}{F_{rx}}$$

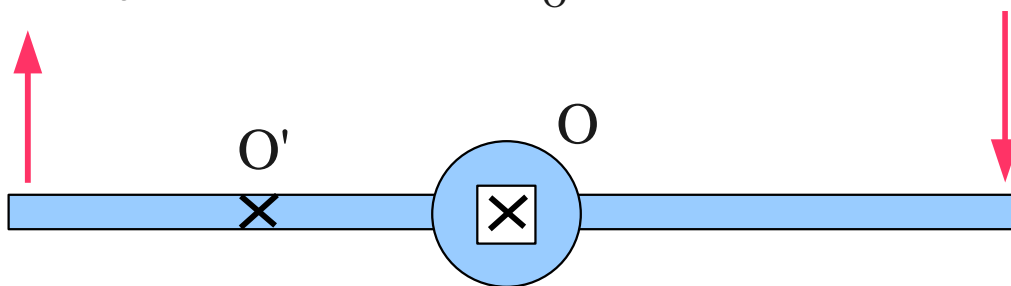


• Kromě obecných případů redukce soustavy k O mohou nastat tři specifické

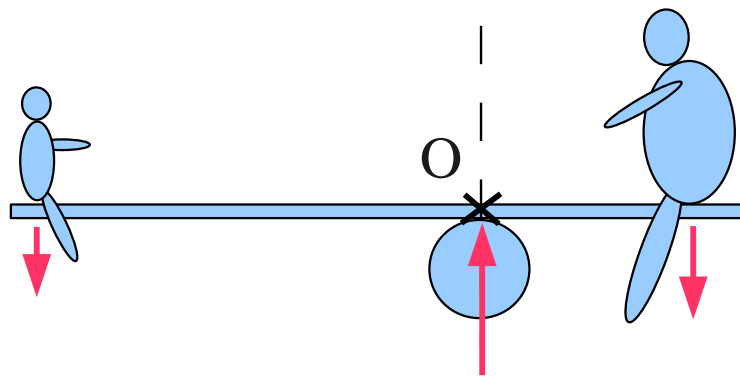
1. $\vec{F}_r \neq \vec{0}$, $M_O = 0$ výsledným účinkem je síla \vec{F}_r působící na paprsku procházející počátkem O



2. $\vec{F}_r = \vec{0}$, $M_O \neq 0$ výsledným účinkem je dvojice sil v rovině x-y otáčející momentem M_O



3. $\vec{F}_r = \vec{0}$, $M_O = 0$ soustava sil a momentů je v rovnováze



Obecná soustava sil v rovině - úloha rovnováhy

- Prostorová soustava sil $\{\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n\}$ a momentů $\{\vec{M}_1, \dots, \vec{M}_m\}$ je v **rovnováze** se silami $\{\vec{R}_1, \dots, \vec{R}_o\}$ je-li výsledný účinek všech sil a všech momentů nulový

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{j=1}^o \vec{R}_j = \vec{0}$$

silové (směrové) podmínky

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_i}^F + \sum_{j=1}^o \vec{M}_{O_j}^R + \sum_{k=1}^m \vec{M}_k = \vec{0}$$

momentové podmínky

$$\rightarrow : \sum F_{ix} + \sum R_{jx} = 0$$

$$\uparrow : \sum F_{iy} + \sum R_{jy} = 0$$

~~$$\swarrow : \sum F_{iz} + \sum R_{jz} = 0$$~~

~~$$\rightarrow : \sum M_{O_{ix}}^F + \sum M_{O_{jx}}^R + \sum M_{kx} = 0$$~~

~~$$\uparrow : \sum M_{O_{iy}}^F + \sum M_{O_{jy}}^R + \sum M_{ky} = 0$$~~

$$\curvearrowright : \sum M_{O_{iz}}^F + \sum M_{O_{jz}}^R + \sum M_{kz} = 0$$



$$\curvearrowright : \sum (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) + \sum (x_j R_{jy} - y_j R_{jx}) + \sum M_{kz} = 0$$

- Celkem k dispozici 3 statické podmínky = 3 neznámé, jednoznačné řešení pokud determinant soustavy $\neq 0$
- Momentové podmínky rovnováhy lze volit k libovolnému bodu
- Pro úlohu **ekvivalence** postačí vložit “-” před neznámé členy \vec{R} a \vec{M}^R a tím je převést na pravou stranu všech rovnic
- Předpokládejme, že $M_A = 0$ i $M_B = 0$

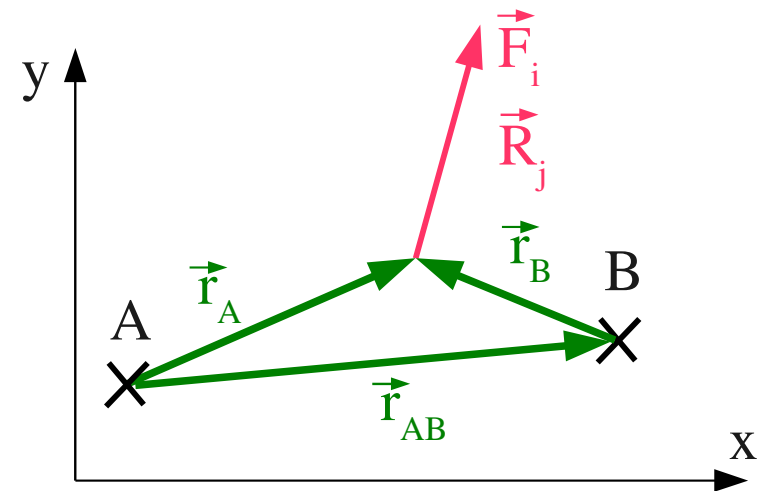
$$M_A = \sum \vec{r}_{Ai} \times \vec{F}_i + \sum \vec{r}_{Aj} \times \vec{R}_j = 0$$

$$\vec{r}_{AB} + \vec{r}_B = \vec{r}_A, \quad \vec{r}_B = \vec{r}_A - \vec{r}_{AB}$$

$$M_B = \sum (\vec{r}_{Ai} - \vec{r}_{AB}) \times \vec{F}_i + \sum (\vec{r}_{Aj} - \vec{r}_{AB}) \times \vec{R}_j = 0$$

$$M_B = \underbrace{M_A}_0 - \underbrace{\vec{r}_{AB}}_0 \times \underbrace{\left(\sum \vec{F}_i + \sum \vec{R}_j \right)}_{\text{silová podmínka rovnováhy}} = 0$$

obecně splněno pouze pokud $\vec{r}_{AB} \perp \left(\sum \vec{F}_i + \sum \vec{R}_j \right)$



- **Dvě momentové** podmínky k bodu A a B tedy nahrazují **jednu silovou** v kolmém směru k úsečce AB

- Alternativní formulace podmínek rovnováhy v rovině

- 1 silová a 2 momentové

$$\rightarrow : \sum F_{ix} + \sum R_{jx} = 0$$

$$\curvearrowright_A : \sum M_{Ai}^F + \sum M_{Aj}^R + \sum M_k = 0$$

$$\curvearrowright_B : \sum M_{Bi}^F + \sum M_{Bj}^R + \sum M_k = 0$$

} Směr nesmí být kolmý na AB

- 3 momentové

$$\curvearrowright_A : \sum M_{Ai}^F + \sum M_{Aj}^R + \sum M_k = 0$$

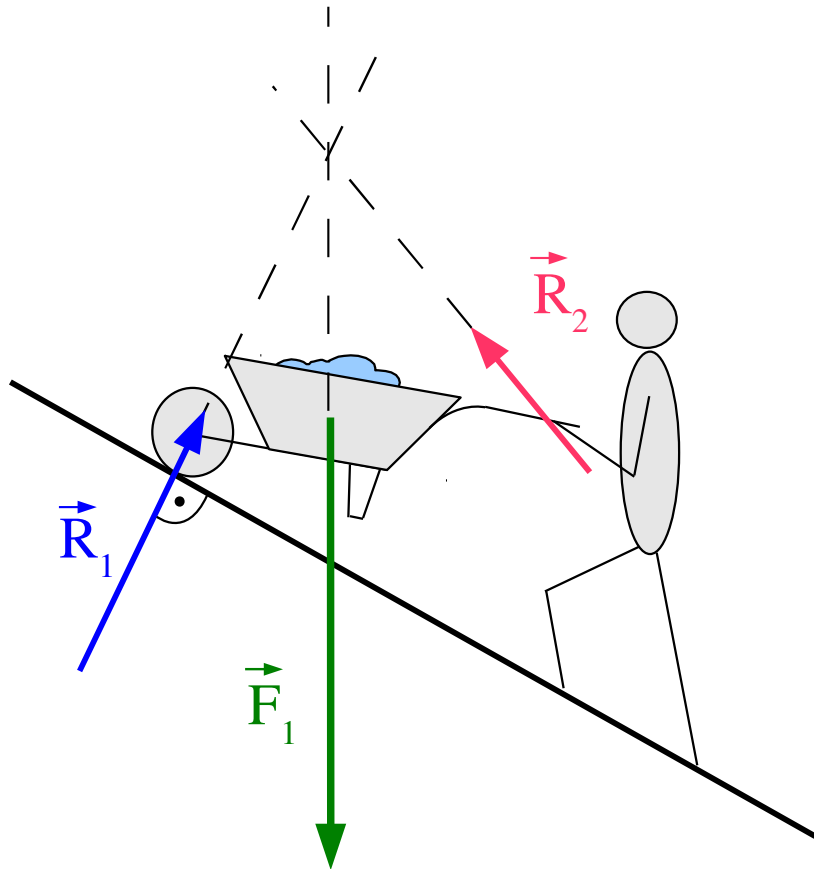
$$\curvearrowright_B : \sum M_{Bi}^F + \sum M_{Bj}^R + \sum M_k = 0$$

$$\curvearrowright_C : \sum M_{Ci}^F + \sum M_{Cj}^R + \sum M_k = 0$$

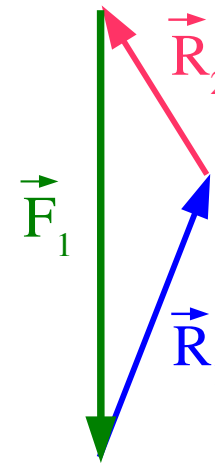
} Body ABC nesmí ležet na přímce

Věta o rovnováze třech sil

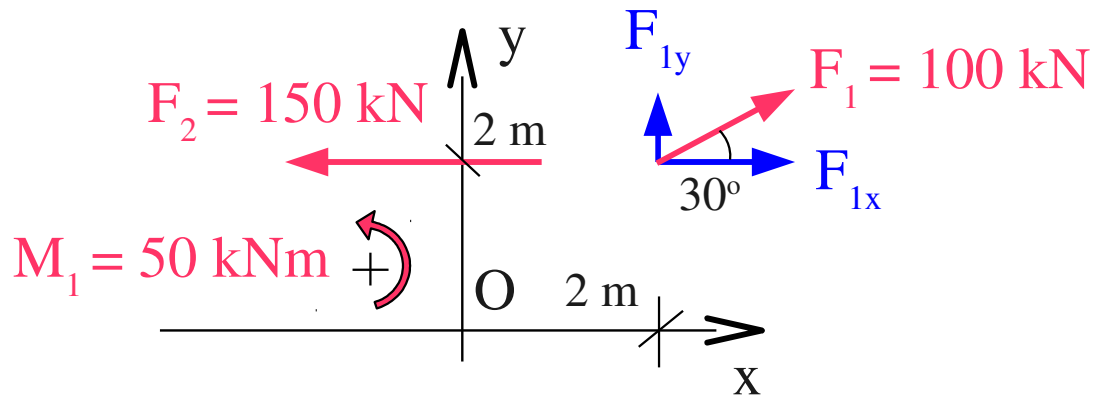
- Tři síly mohou být v rovnováze jen tehdy, tvoří-li rovinný svazek sil (průsečík v bodě nebo v nekonečnu)
- Pouze tehdy mohou splnit momentovou podmínku rovnováhy
- Kterákoli z nich je výslednicí ostatních dvou s opačnou orientací
- Zde pro zadanou reakci \vec{R}_1 a zatížení \vec{F}_1 vyplývá reakce \vec{R}_2



Složkový obrazec sil



Zredukujte soustavu sil k počátku a nahrad'te jedinou silou



$$F_{1x} = F_1 \cos 30^\circ = 86,6 \text{ kN}$$

$$F_{1y} = F_1 \sin 30^\circ = 50 \text{ kN}$$

$$K: \sqrt{86,6^2 + 50^2} = 100 \text{ kN O.K.}$$

$$\rightarrow : F_{rx} = F_{1x} + F_{2x} = 86,6 - 150 = -64,3 \text{ kN}$$

$$\uparrow : F_{ry} = F_{1y} + F_{2y} = 50 + 0 = 50 \text{ kN}$$

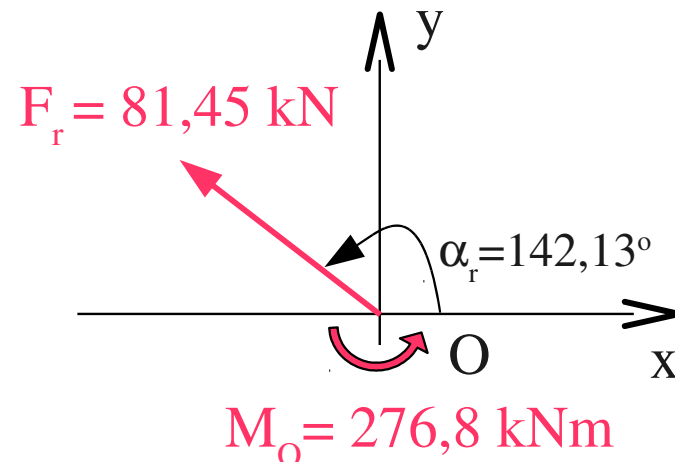
$$\curvearrow \text{O} : M_O = M_1^F + M_2^F + M_1 = (2 \cdot 50 - 2 \cdot 86,6) + 2 \cdot 150 + 50 = 276,8 \text{ kNm}$$

$$F_r = \sqrt{(-64,3)^2 + 50^2} = 81,45 \text{ kN}$$

$$\cos \alpha_r = \frac{F_{rx}}{F_r} = \frac{-64,3}{81,45} = -0,78944$$

$$\sin \alpha_r = \frac{F_{ry}}{F_r} = \frac{50}{81,45} = 0,61387$$

$$\alpha = 142,13^\circ$$



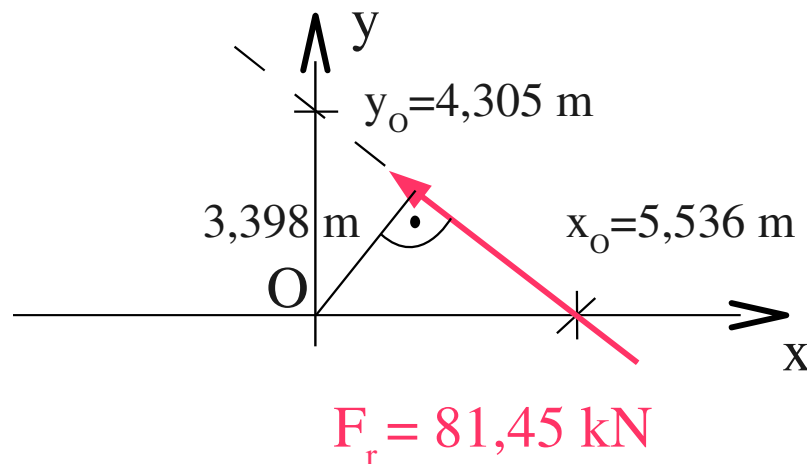
- Náhrada jedinou silou

$$M_O = x F_{ry} - y F_{rx}$$

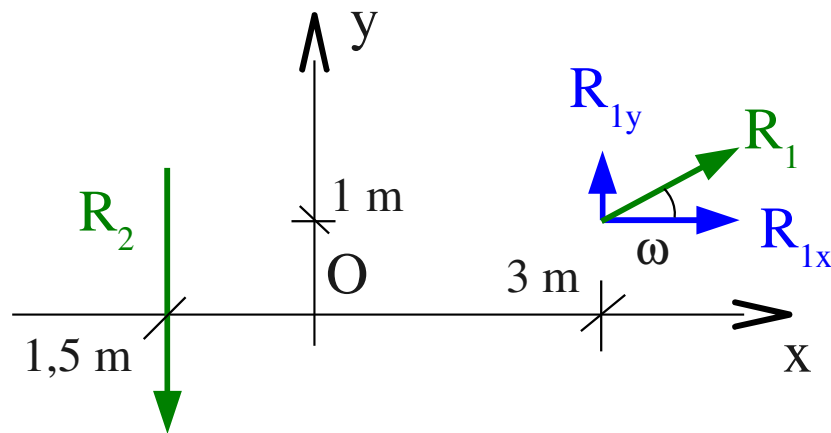
$$y = \frac{F_{ry}}{F_{rx}} x - \frac{M_O}{F_{rx}} = \frac{50}{-64,3} x - \frac{276,8}{-64,3} = -0,7776 x + 4,305$$

$$x=0 \Rightarrow y_0 = 4,305 \text{ m}$$

$$y=0 \Rightarrow x_0 = \frac{4,305}{0,7776} = 5,536 \text{ m}$$



Uved'te předchozí soustavu do rovnováhy reakcemi R_1 a R_2



známé

$$\rightarrow : F_{rx} + R_{1x} + R_{2x} = 0 \Rightarrow -64,3 + R_{1x} + 0 = 0 \Rightarrow R_{1x} = 64,3 \text{ kN}$$

$$\uparrow : F_{ry} + R_{1y} + R_{2y} = 0 \Rightarrow 50 + R_{1y} - R_2 = 0$$

$$\curvearrow O : M_O + M_1^R + M_2^R = 0 \Rightarrow 276,8 + (3 \cdot R_{1y} - 1 \cdot R_{1x}) + 1,5 \cdot R_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1,5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 64,3 \\ -50 \\ -276,8 \end{Bmatrix}$$

řešení: $R_{1x} = 64,3 \text{ kN}$, $R_{1y} = -63,89 \text{ kN}$, $R_2 = -13,89 \text{ kN}$

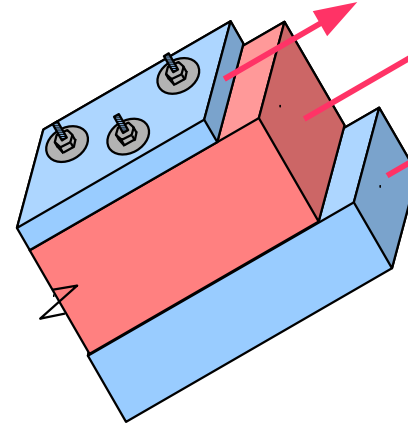
$$R_1 = \sqrt{(-64,3)^2 + (-63,89)^2} = 90,64 \text{ kN}, \quad \omega = 315,18^\circ$$

Rovinná soustava rovnoběžných sil

- Paprsky všech sil jsou rovnoběžné
- Násobky jednotkového vektoru \vec{f}

$$\vec{F}_i = F_i \vec{f}$$

$$\vec{f} = 1 \cdot (\cos \alpha; \sin \alpha)$$



Zesílení trámu příložkami

- Výslednice

$$\rightarrow : F_{rx} = \sum F_{ix} = \sum F_i \cos \alpha = \cos \alpha \sum F_i = F_r \cos \alpha$$

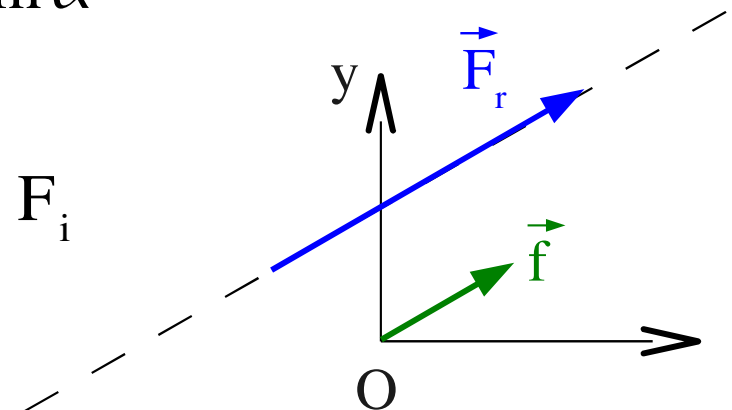
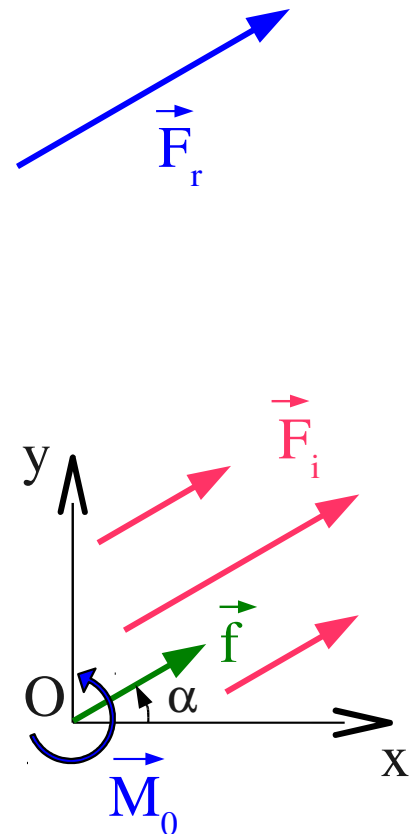
$$\uparrow : F_{ry} = \sum F_{iy} = \sum F_i \sin \alpha = \sin \alpha \sum F_i = F_r \sin \alpha$$

$$\curvearrow : M_O = \sum M_{O_i} = F_i (x_i \sin \alpha - y_i \cos \alpha)$$

$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2} = \sqrt{(\sum F_i)^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} = \sum F_i$$

- Náhrada jednou silou, její paprsek určen

$$M_O = x F_{ry} - y F_{rx}$$

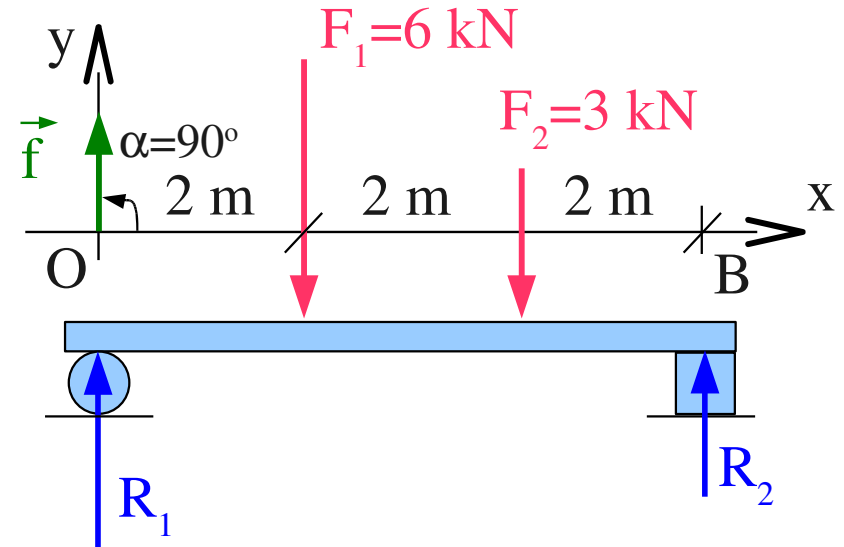


Určete reakce na soustavě rovnoběžných sil

$$\cos 90^\circ = 0, \quad \sin 90^\circ = 1$$

$$\vec{f} = (0; 1)$$

- Možno použít podmínky rovnováhy pro \uparrow a \curvearrowright . Lépe je však použít \curvearrowright_O a \curvearrowright_B , tím je automaticky splněna i kolmá silová podmínka \uparrow . Nemusíme řešit soustavu 2 rovnic.



$$\curvearrowright_O : 2 F_1 + 4 F_2 - 6 R_2 = 0$$

$$2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 - 6 R_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2 = 4 \text{ kN}$$

$$\curvearrowright_B : 2 F_2 + 4 F_1 - 6 R_1 = 0$$

$$2 \cdot 3 + 4 \cdot 6 - 6 R_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_1 = 5 \text{ kN}$$

$$\uparrow K : R_1 + R_2 - F_1 - F_2 = 5 + 4 - 6 - 3 = 0 \quad \text{O.K.}$$

Statický střed rovinné soustavy rovnoběžných sil (těžiště)

- Bod C kterým prochází výslednice této soustavy při libovolném natočení \vec{f} o α
- Velikost výslednice je stejná při libovolném natočení
- Aby byla splněna momentová podmínka rovnováhy, musí výslednice také procházet bodem $C[x_C; y_C]$, který leží někde na paprsku výslednice

$$\curvearrowright O: M_O = x_C \underbrace{F_r \sin \alpha}_{F_{ry}} - y_C \underbrace{F_r \cos \alpha}_{F_{rx}} = \sum (x_i \underbrace{F_i \sin \alpha}_{F_{iy}} - y_i \underbrace{F_i \cos \alpha}_{F_{ix}})$$

$$\sin \alpha (x_C F_r - \sum x_i F_i) = \cos \alpha (y_C F_r - \sum y_i F_i)$$

$$\sin \alpha (x_C F_r - \sum x_i F_i) - \cos \alpha (y_C F_r - \sum y_i F_i) = 0$$

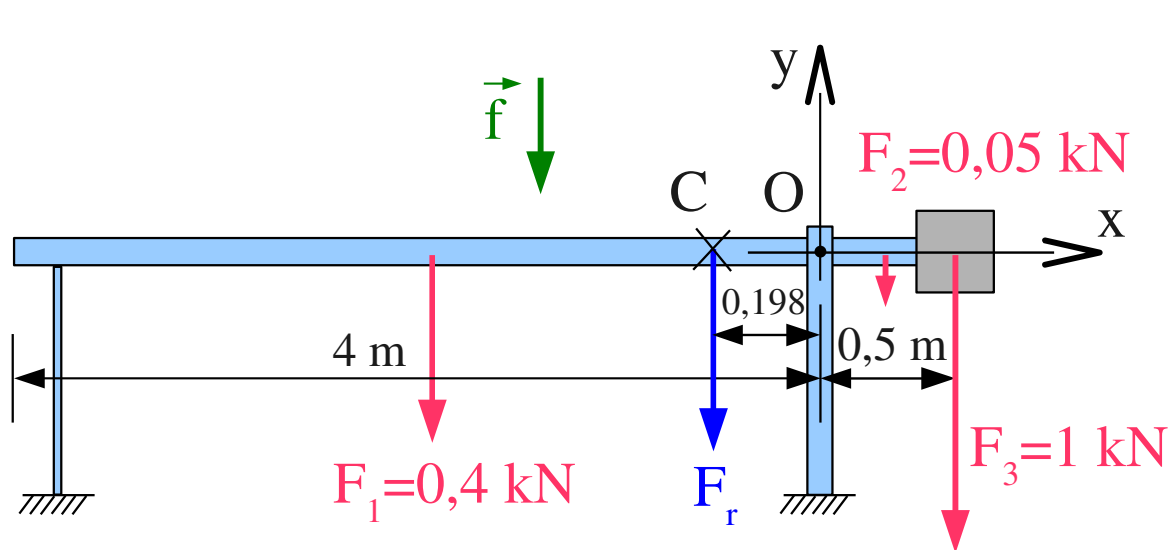
- Rovnice bude splněna pro libovolný úhel α , pokud závorky budou 0
- Výslednice tedy prochází stejným bodem $C[x_C; y_C]$ při lib. natočení soustavy

$$x_C F_r - \sum x_i F_i = 0 \quad \Rightarrow \quad x_C = \frac{\sum x_i F_i}{F_r}$$

$$y_C F_r - \sum y_i F_i = 0 \quad \Rightarrow \quad y_C = \frac{\sum y_i F_i}{F_r}$$

$$F_r = \sum F_i$$

Určete vzdálenost statického středu (těžiště) od čepu závory

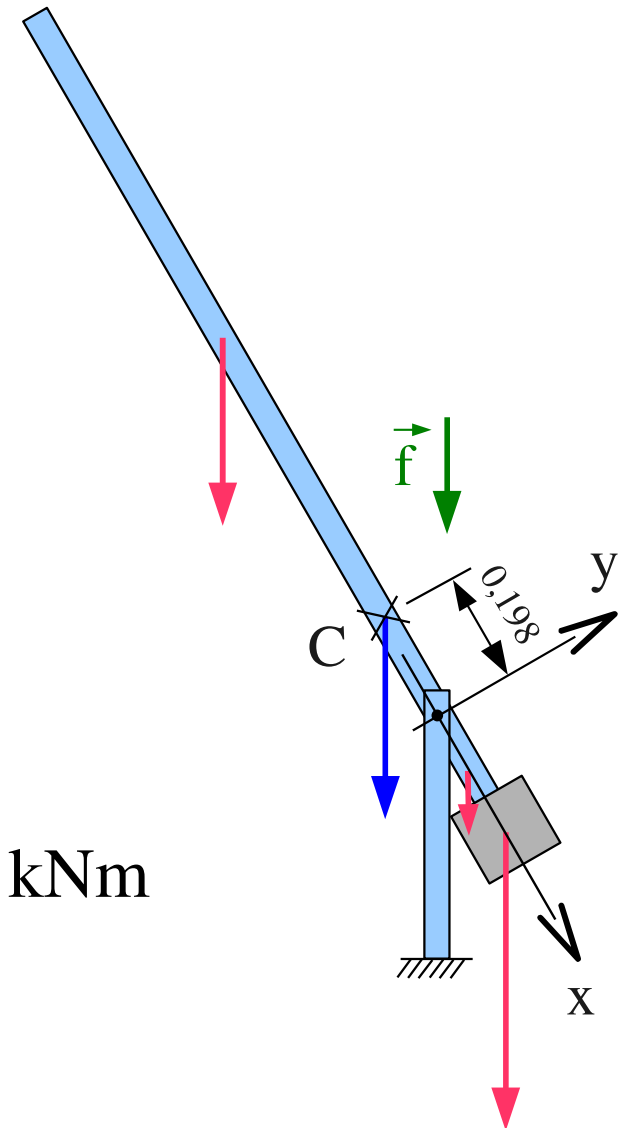


- Velikost výslednice

$$F_r = \sum F_i = 0,4 + 0,05 + 1 = 1,45 \text{ kN}$$

$$\curvearrowleft O : M_O = 2 \cdot 0,4 - 0,25 \cdot 0,05 - 0,5 \cdot 1 = 0,2875 \text{ kNm}$$

$$x_C = \frac{\sum x_i F_i}{F_r} = \frac{-M_O}{F_r} = \frac{-0,2875}{1,45} = -0,198 \text{ m}$$

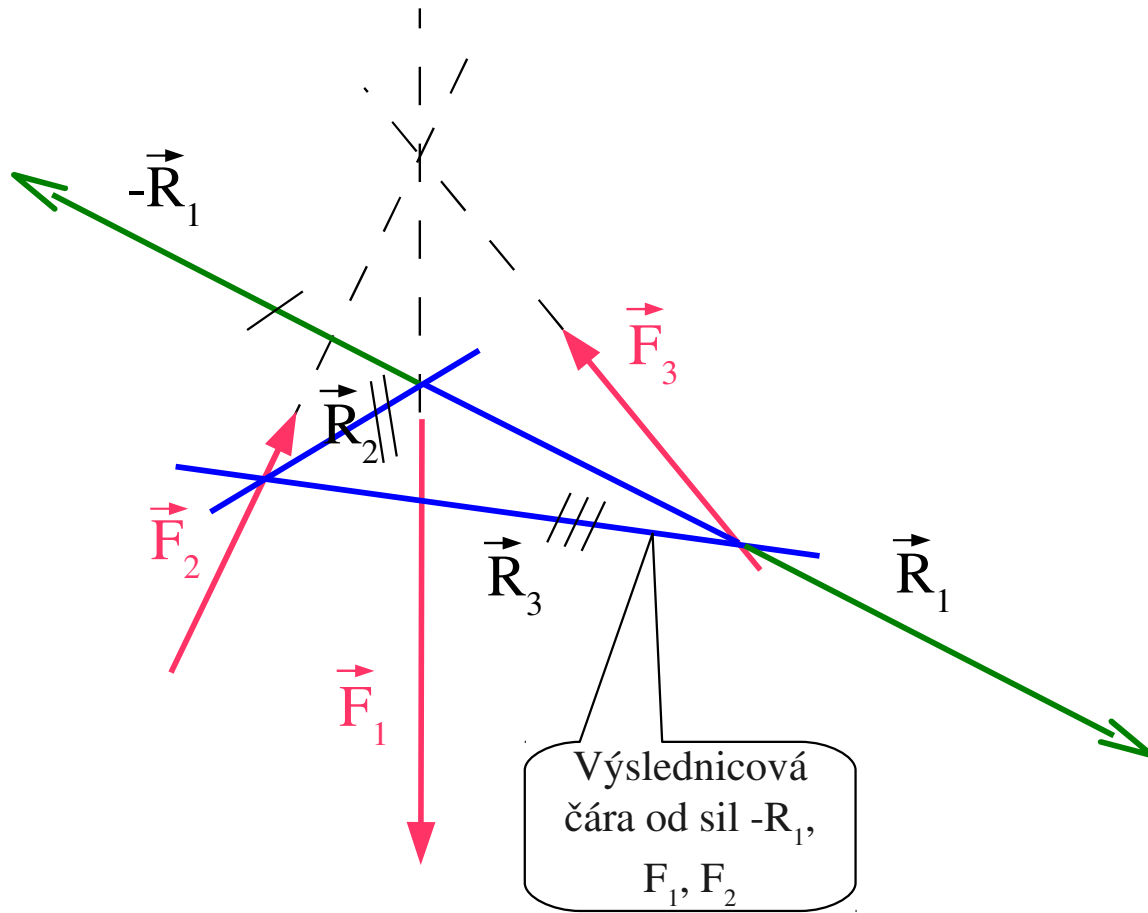


Pozn. statický střed ve směru y leží na ose symetrie závory

Grafická kontrola řešení soustavy sil

- V historii často používaná metoda (L. Cremona, C. Culmann)
- **Silové** podmínky rovnováhy znamenají uzavřený vektorový obrazec sil
- **Momentová** podmínka rovnováhy znamená uzavřenou výslednicovou čáru
- Postup řešení
 - K soustavě připojíme libovolnou dvojici sil $-\vec{R}_1$ a \vec{R}_1
 - Zvolit lib. pól vektorového obrazce O, konstrukce vektorového obrazce sil
 - Konstrukce výslednicové čáry. Složíme sílu $-\vec{R}_1$ s další silou z vektorového obrazce. V obrazci výslednicových čar zjistíme jejich průsečík. Směr a velikost výslednice je dána z vektorového obrazce.
 - Tuto výslednici skládáme s dalšími silami z vektorového obrazce. Nakonec přičteme sílu \vec{R}_1

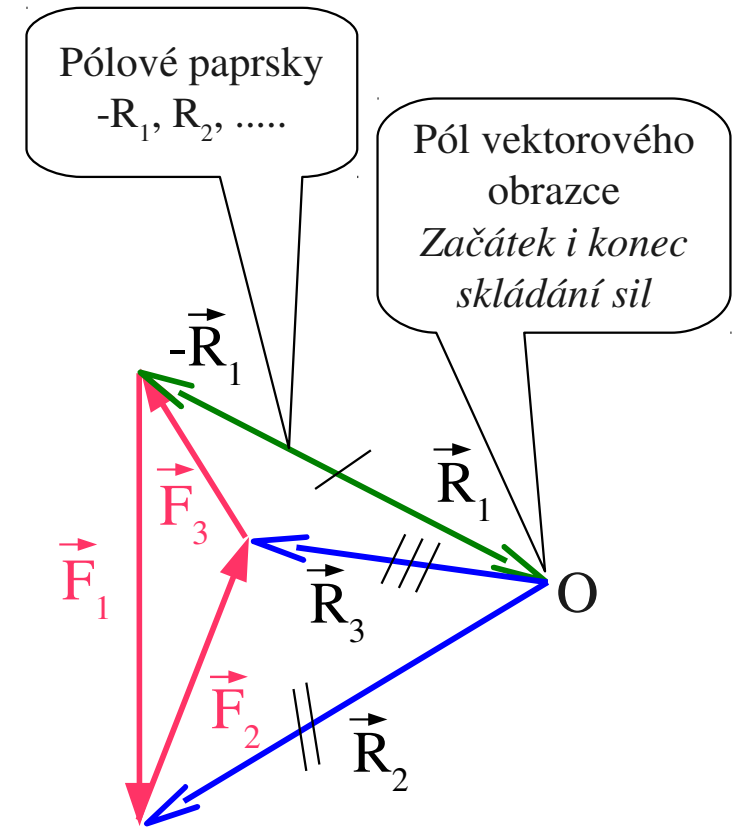
Př. Ověřte graficky rovnováhu sil $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$



Zadaná soustava sil - obrazec výslednicových čar
(vláknový obrazec)

Rovnováha momentů

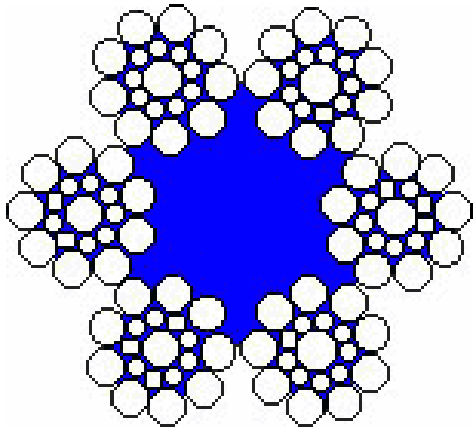
\vec{R}_2 je výslednice $-\vec{R}_1$ a \vec{F}_1 . Velikost je určena ve složkovém obrazci sil, působiště na paprsku v obrazci výslednicových čar



Složkový obrazec sil
Rovnováha sil

Otázky

- Přenesená síla je úměrná ploše drátu. Jaké budou výsledné síly v pramenu a v laně a kde budou jejich působiště ?



Řez šestipramenným lanem 6 x 19 drátů, propylenová duše

- Kolikrát se zmenší nosnost lana, přeručí-li se jeden pramen ? Kam se posune výslednice lana ?

Přednášky z předmětu SM1, Stavební fakulta ČVUT v Praze

Autor Vít Šmilauer

Náměty, připomínky, úpravy, vylepšení zasílejte prosím na

vit.smilauer@fsv.cvut.cz

Created 10/2007 in OpenOffice 2.3, ubuntu linux 6.06

Last update Feb 21, 2011