

Úlohy rovnováhy staticky určitých konstrukcí

Úloha:

- Posoudit statickou určitost či navrhnout podepření konstrukce
- Určit síly v reakcích a ve vnitřních vazbách

Předpoklady:

- Konstrukce je idealizována soustavou hmotných bodů, tuhých desek a tuhých těles
- Konstrukce je ve statické rovnováze (nedochází k pohybu konstrukce ani dílčích částí)

Metoda:

- Konstrukci rozdělíme na jednotlivé části (hmotné body, tuhé desky či tělesa)
- Uvolníme vazby a nahradíme je reakcemi
- Velikosti reakcí určíme z podmínek rovnováhy konstrukce

Copyright (c) 2007-2008 Vít Šmilauer

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Mechanics, Czech Republic

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License" found at <http://www.gnu.org/licenses/>

Princip superpozice

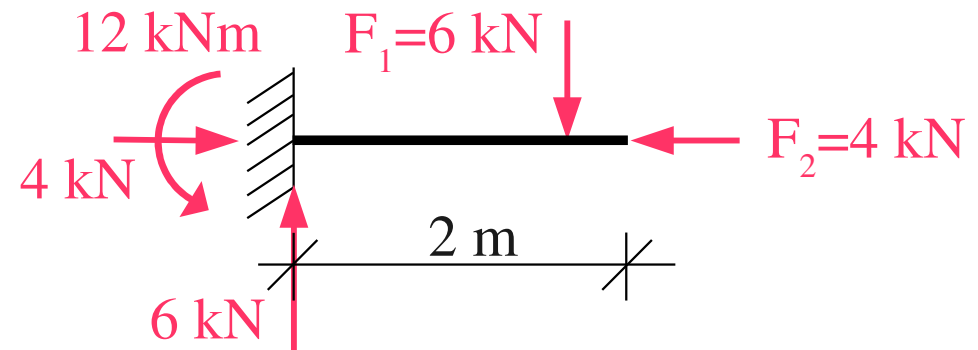
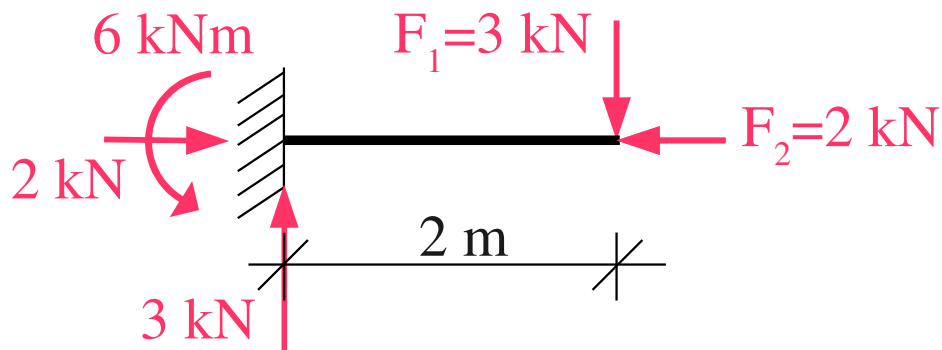
- Nechť H je lineární operátor. Pak pro libovolný lineární systém platí princip škálování a superpozice

$$y = H(x), \quad \underbrace{H(ax) = aH(x) = ay}_{\text{škálování}}$$

$$\underbrace{H(ax_1 + bx_2) = H(ax_1) + H(bx_2) = aH(x_1) + bH(x_2)}_{\text{superpozice}}$$

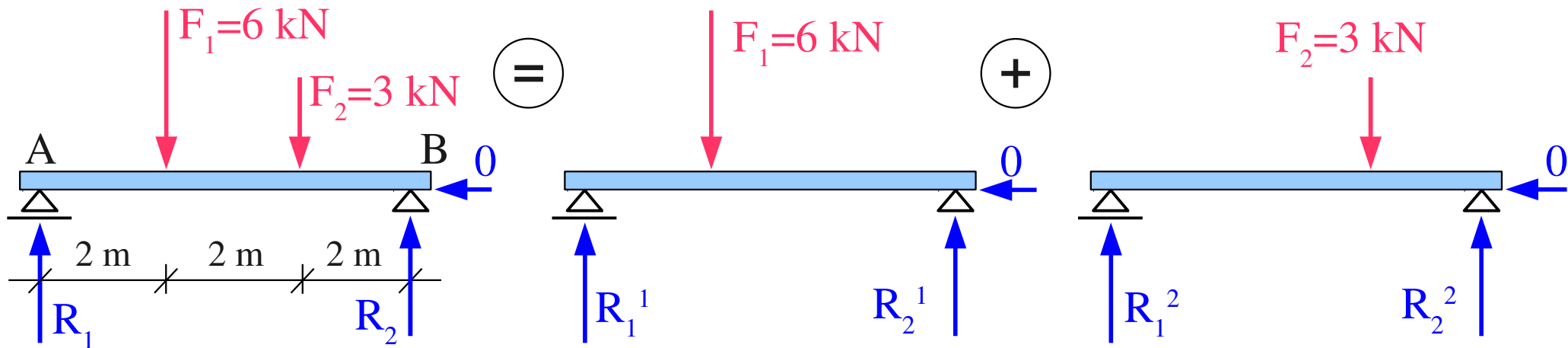
- Příklady lineárních systémů

- Výpočet reakcí u tuhých těles - dvojnásobné zvětšení veškerého zatížení systému x , vyvolá dvojnásobné zvětšení veškerých reakcí systému y (škálování $a=2$)



- Varignonova věta - výsledný moment je součet dílčích momentů (superpozice)
- Rozklad zatížení do více zatěžovacích stavů - výsledné reakce se získají součtem reakcí jednotlivých stavů (superpozice dvou zatěžovacích stavů neboli systémů x_1 a x_2)

Určete reakce na prostém nosníku užitím superpozice



Evidentně platí
 $a \cdot 2 \cdot 6 = a \cdot 6 R_2^1$, $a \neq 0$
 tato rovnice popisuje
 lineární systém

$$\curvearrowleft_A : 2 \cdot 6 - 6 R_2^1 = 0$$

$$\curvearrowright_B : 4 \cdot 6 - 6 R_1^1 = 0$$

$$R_2^1 = 2 \text{ kN}$$

$$R_1^1 = 4 \text{ kN}$$

$$\curvearrowleft_A : 4 \cdot 3 - 6 R_2^2 = 0$$

$$\curvearrowright_B : 2 \cdot 3 - 6 R_1^2 = 0$$

$$R_2^2 = 2 \text{ kN}$$

$$R_1^2 = 1 \text{ kN}$$

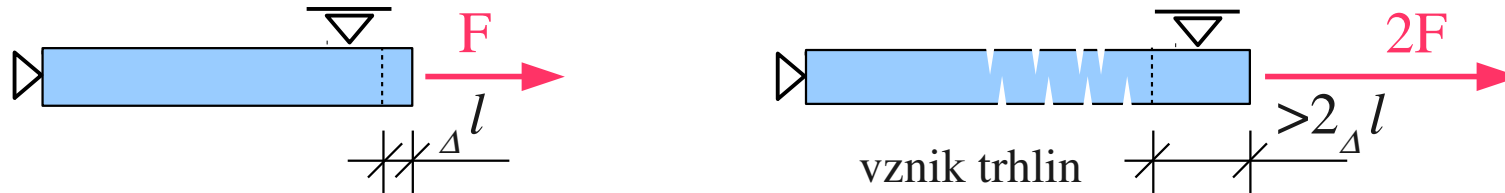
$$R_2 = R_2^1 + R_2^2 = 2 + 2 = 4 \text{ kN}$$

$$R_1 = R_1^1 + R_1^2 = 4 + 1 = 5 \text{ kN}$$

Pozn. V superpozici lze i odčítat. Pokud $F_1^1 = F_2^1 = 6 \text{ kN}$, pak $F_1^1 = 0$ a $F_2^2 = -3 \text{ kN}$

- Příklady nelineárních systémů (nelze uplatnit škálování a superpozici)

- Přetížená konstrukce - dvojnásobné zvětšení zatížení může způsobit více jak dvojnásobné zvětšení posunů (skutečnost je příliš vzdálena od modelu tuhého tělesa)



- Vzpěr prutů - při nadkritické síle může dojít k vybočení, neplatí předpoklad tuhého objektu (po výpočtu rovnováhy sil se zpravidla ověří že síla na prvku nezpůsobí jeho vybočení)



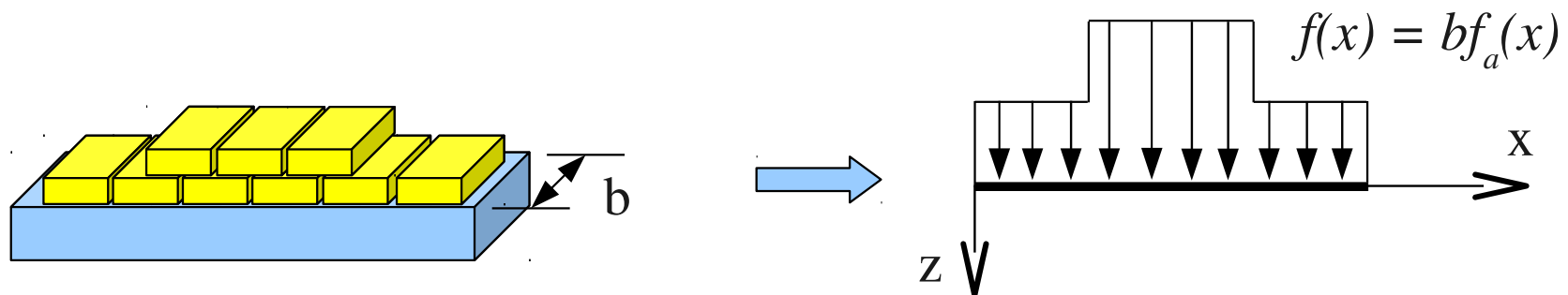
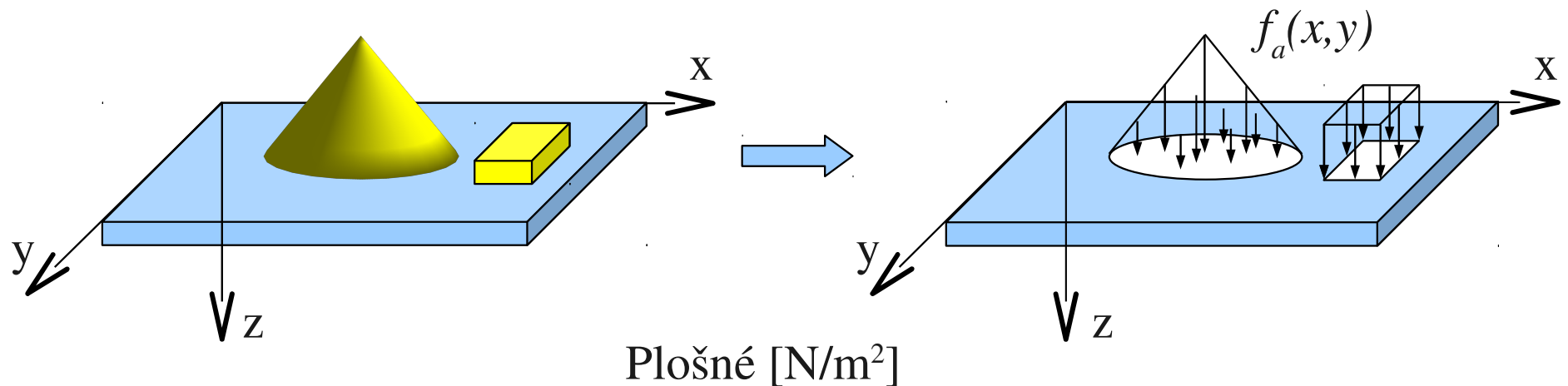
- Výpočet plochy kruhu z poloměru - dvojnásobné zvětšení poloměru je čtyřnásobná plocha

$$y = \pi x^2, \quad \pi (ax)^2 = \pi a^2 x^2 = a^2 y \neq ay$$

- Změna velikosti konstrukce - tíha konstrukce roste s třetí mocninou rozměru x , pevnost v tlaku pouze s druhou mocninou rozměru x (mravenec ve velikosti člověka se neudrží na nohou). Dvakrát větší konstrukce potřebuje více jak dvojnásobnou nosnou plochu sloupů (známo ze stavby mrakodrapů jako daň z výšky - premium for height)

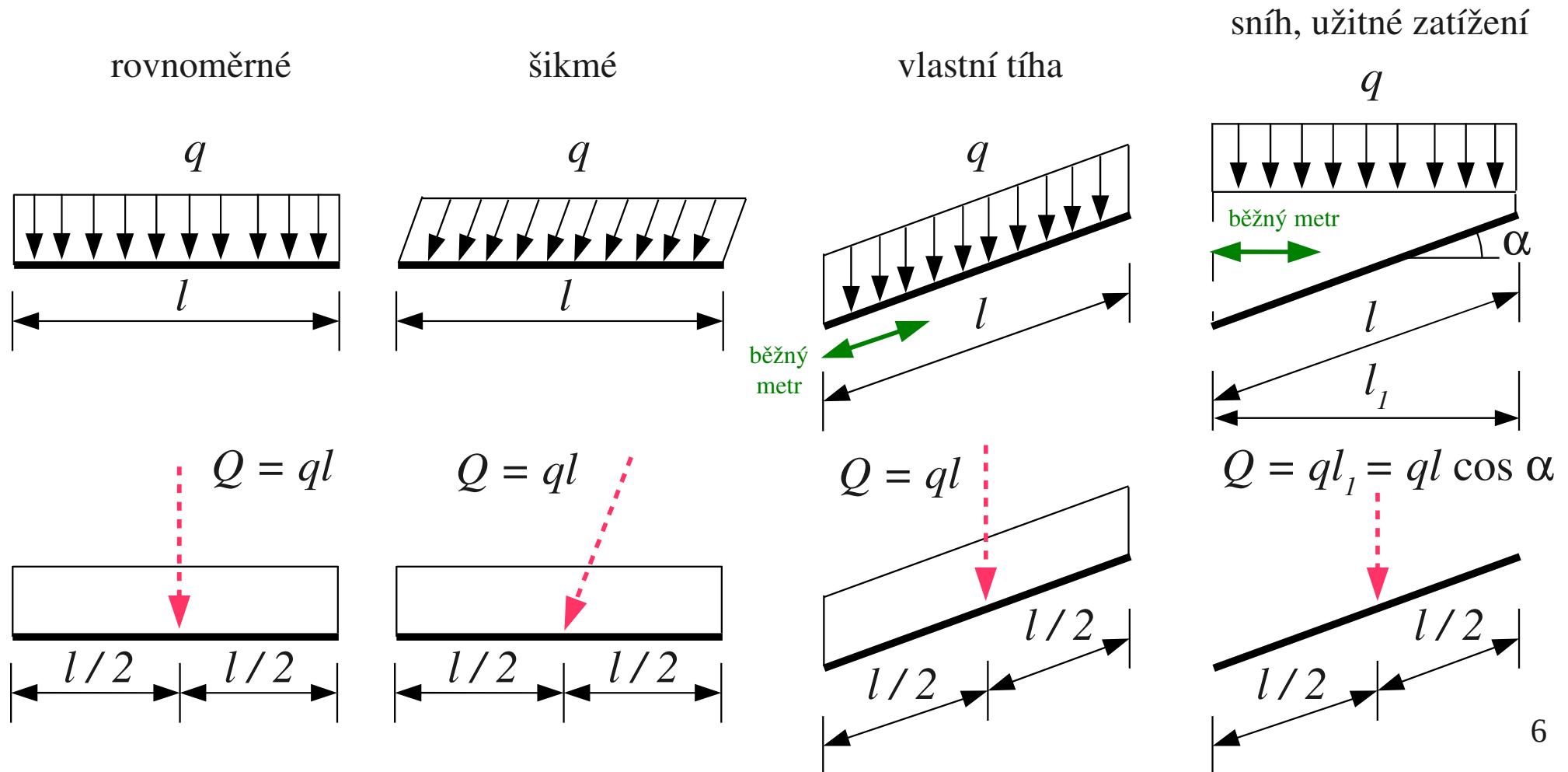
Bodové a spojitě zatížení

- Zatížení je vždy rozloženo v ploše konstrukce. Pokud působí na malé ploše vůči konstrukci, lze ho idealizovat zatížením bodovým (silovým, momentovým)
- Často se ve výpočtech uvažuje zatížení spojitě

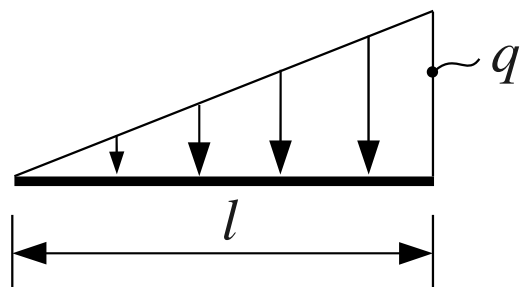


Náhradní břemeno

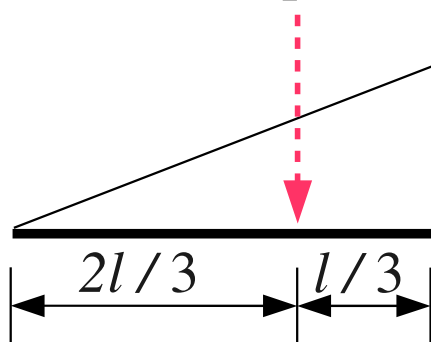
- Pro výpočet reakcí lze libovolné spojité zatížení vyjádřit náhradním břemenem
- Velikost náhradního břemene odpovídá ploše zatížení (tím splňuje silovou ekvivalenci) a je umístěno v těžišti zatížení (tím splňuje ekvivalentní statický moment)



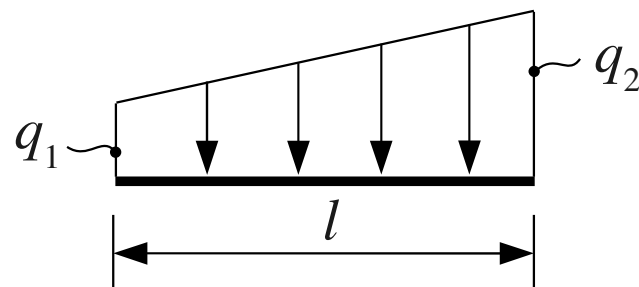
trojúhelníkové



$$Q = ql / 2$$

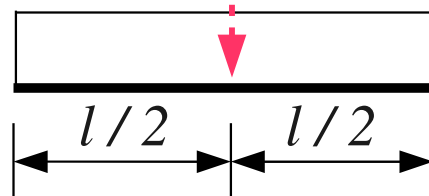


lichoběžníkové

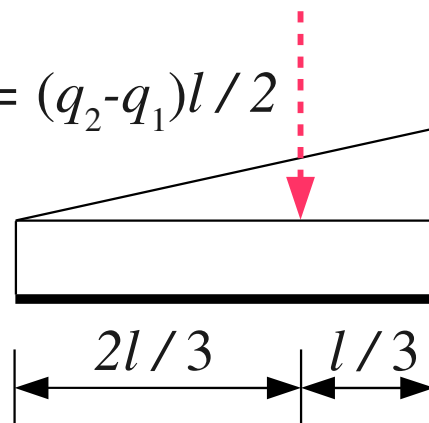


řešíme superpozicí

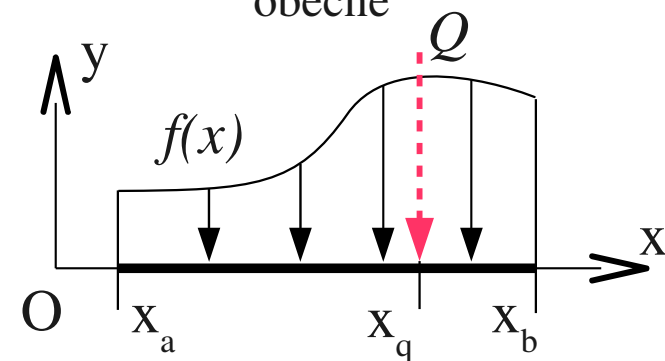
$$Q_1 = q_1 l$$



$$Q_2 = (q_2 - q_1)l / 2$$



obecné

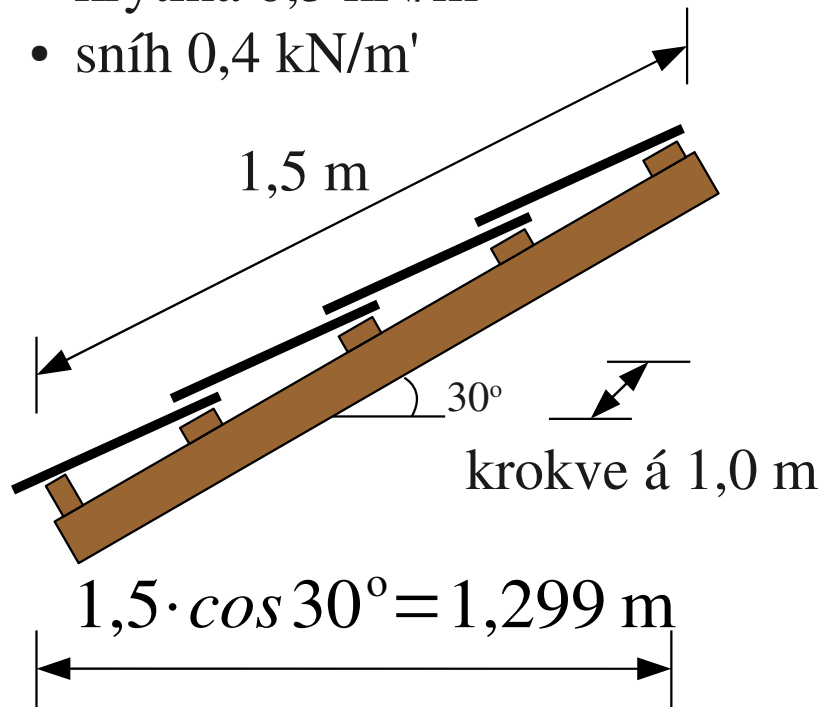


$$Q = \int_{x_a}^{x_b} q(x) dx$$

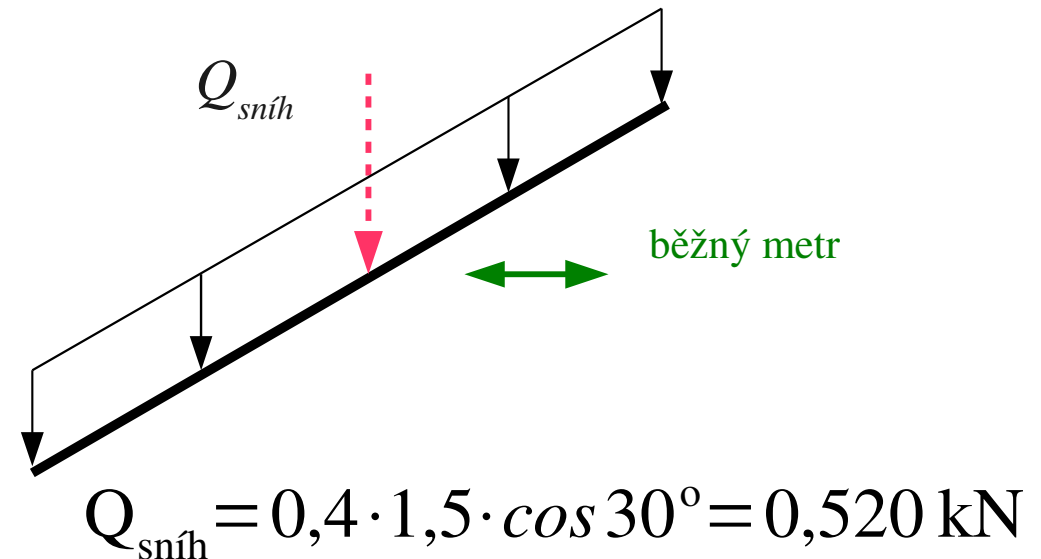
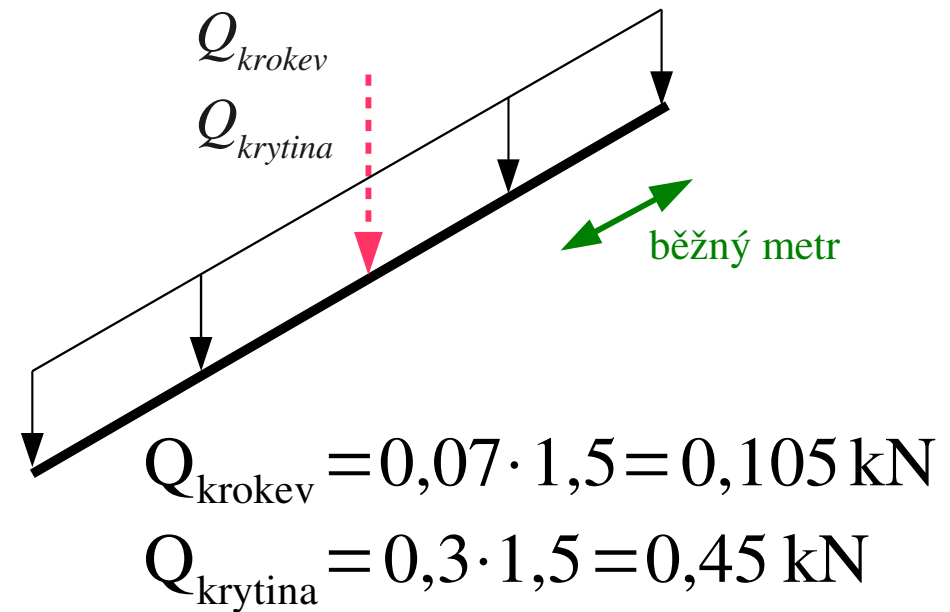
$$x_q = \frac{\int_{x_a}^{x_b} x q(x) dx}{\int_{x_a}^{x_b} q(x) dx} = \frac{S_0}{Q}$$

Příklad - určete náhradní břemeno od tíhy krokve, krytiny a sněhu na metr šířky střechy

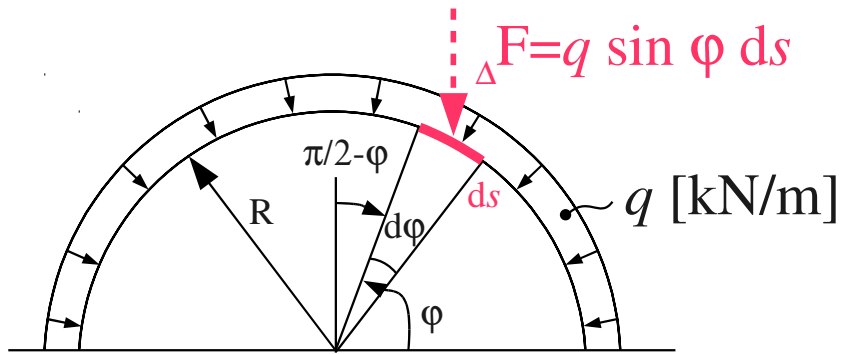
- krokev 0,07 kN/m'
- krytina 0,3 kN/m'
- sních 0,4 kN/m'



Pozn. při změně sklonu střechy se mění půdorysný průmět, tedy pouze náhradní břemeno od zatížení sněhem



- Určete celkovou svislou sílu F od zatížení přetlakem

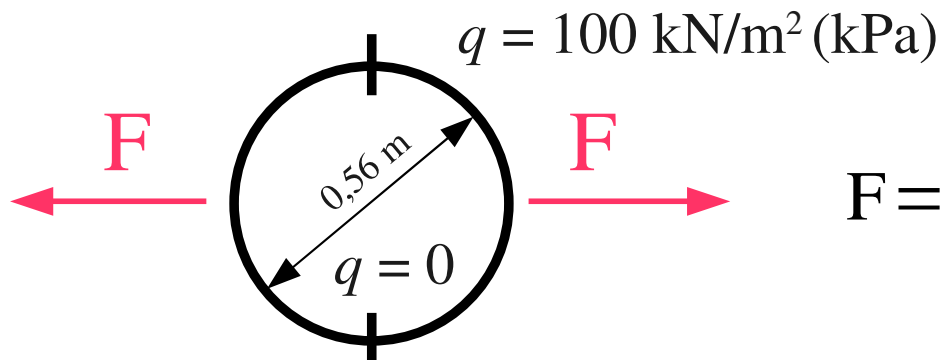


$$ds = R d\varphi$$

$$F = \int_0^{\pi} q \sin \varphi ds = \int_0^{\pi} q \sin \varphi R d\varphi$$

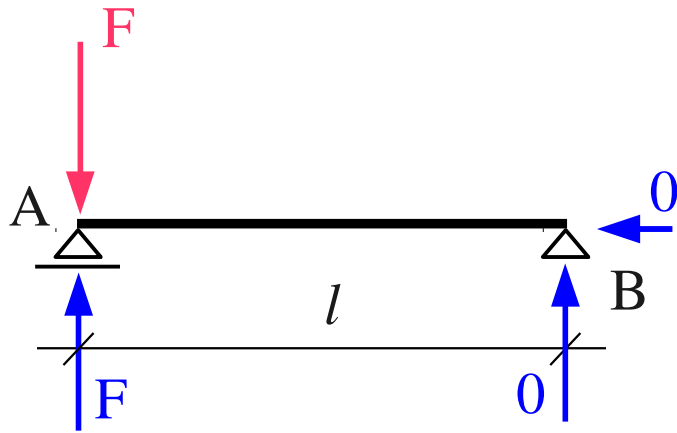
$$F = qR [-\cos]_0^{\pi} = qR [1 + 1] = 2qR$$

- Výsledná svislá síla je součinem zatížení a půdorysného průmětu
- Magdeburské koule - O. von Guericke 1656 odčerpal vzduch z prostoru mezi dvěma polokoulemi, 8 párů koní je od sebe neoddělilo. Určete sílu nutnou k rozpojení těchto polokoulí o průměru 56 cm.
 - Analogicky výsledná síla je rovna součinu zatížení a svislé plochy průmětu

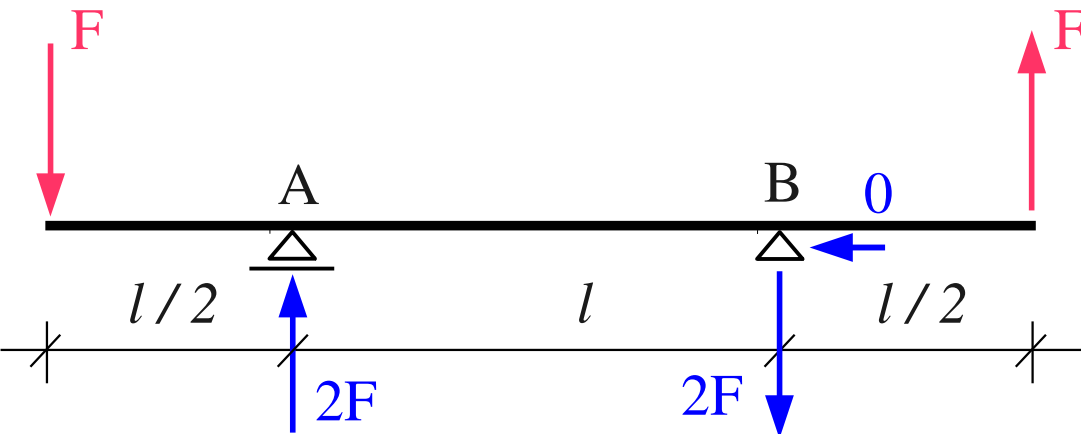
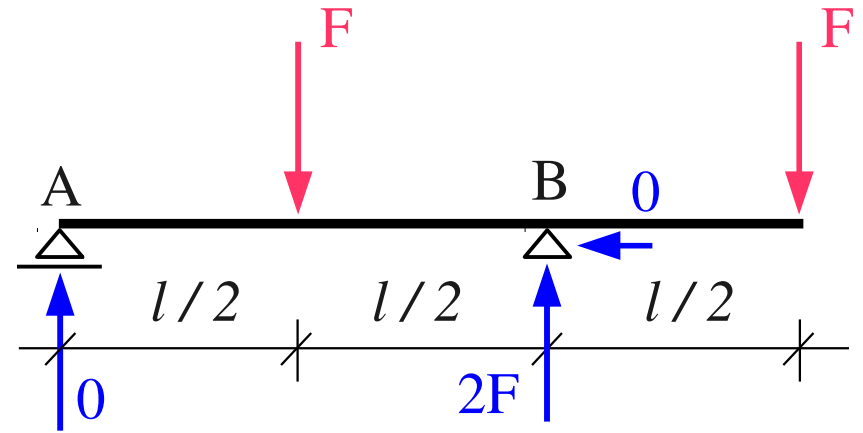


$$F = q \pi R^2 = 100 \pi \left(\frac{0,56}{2} \right)^2 = 24,63 \text{ kN}$$

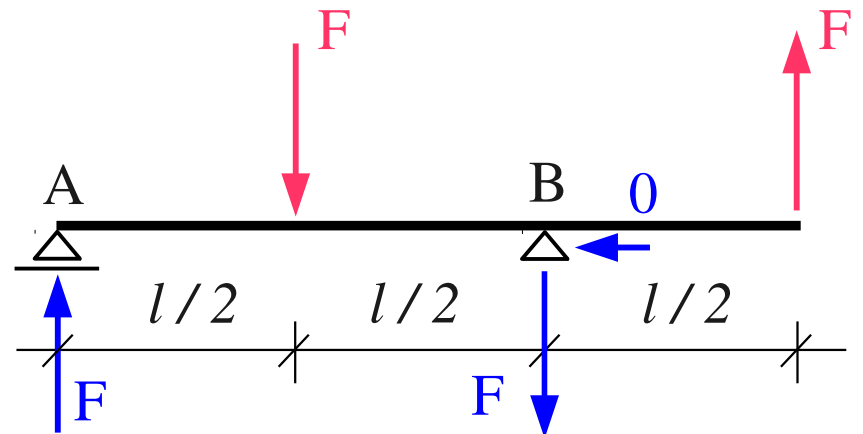
Určete reakce na nosnících



Pokud síla působí v paprsku reakce
tuhého objektu, jde vždy přímo do
reakce

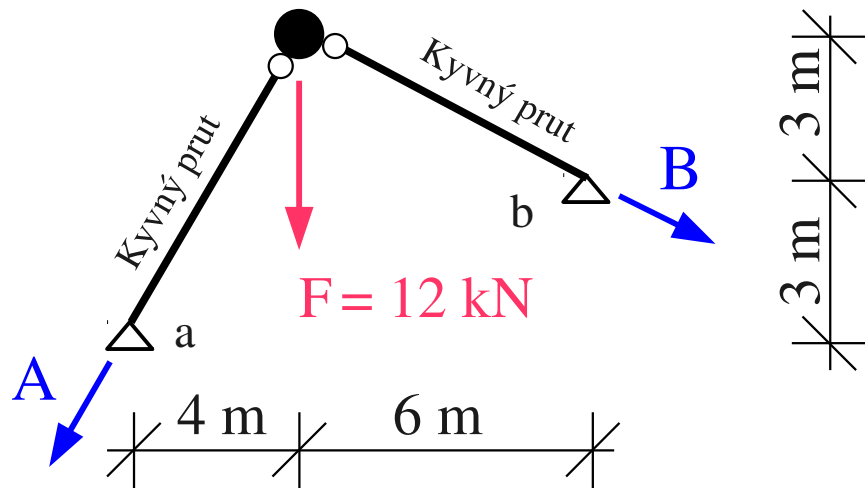


Moment dvojice sil



Moment dvojice sil

Určete stupeň statické určitosti a reakce



$$m = 2^{\circ}$$

$$r = 2^{\circ}$$

$$m - r = 0^{\circ}$$

stat. určité

Řešení pomocí svazku sil

$$\rightarrow -\frac{4}{\sqrt{4^2+6^2}} \mathbf{A} + \frac{6}{\sqrt{6^2+3^2}} \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

$$\downarrow \frac{6}{\sqrt{4^2+6^2}} \mathbf{A} + \frac{3}{\sqrt{6^2+3^2}} \mathbf{B} + 12 = 0 \quad (2)$$

$$-0,5 \cdot (1) + (2) \quad \frac{8}{\sqrt{4^2+6^2}} \mathbf{A} + 12 = 0$$

$$\mathbf{A} = -10,8167 \text{ kN}$$

$$1,5 \cdot (1) + (2) \quad \frac{12}{\sqrt{6^2+3^2}} \mathbf{B} + 12 = 0$$

$$\mathbf{B} = -6,7082 \text{ kN}$$

K zpětné dosazení

Řešení pomocí momentových podmínek

$$\curvearrowleft_b 6 \cdot 12 + \mathbf{A} \left(10 \cdot \frac{6}{\sqrt{4^2+6^2}} - 3 \cdot \frac{4}{\sqrt{4^2+6^2}} \right) = 0 \quad (1)$$

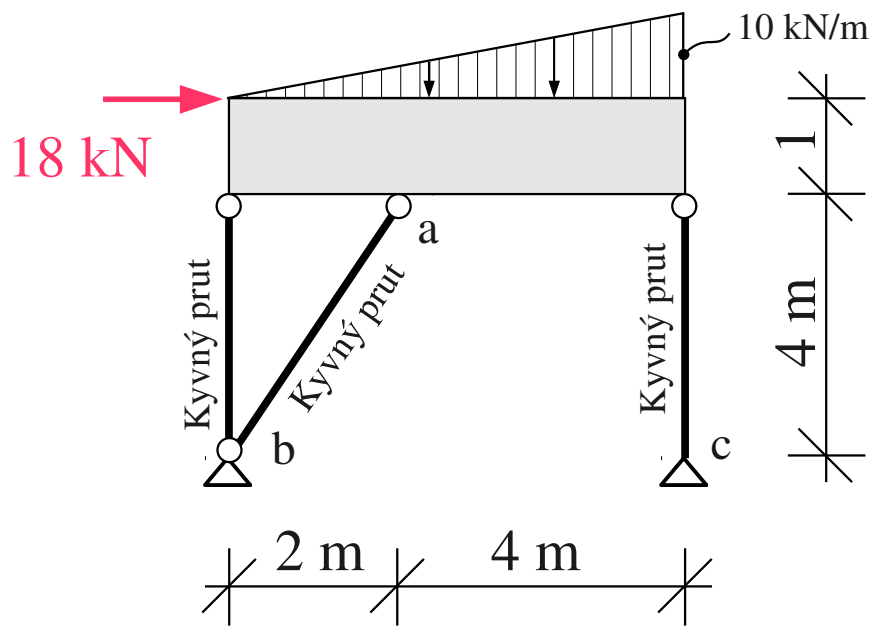
$$\mathbf{A} = -10,8167 \text{ kN}$$

$$\curvearrowleft_a 4 \cdot 12 + \mathbf{B} \left(10 \cdot \frac{3}{\sqrt{6^2+3^2}} + 3 \cdot \frac{6}{\sqrt{6^2+3^2}} \right) = 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{B} = -6,7082 \text{ kN}$$

$$\rightarrow \mathbf{K} -\frac{4}{\sqrt{4^2+6^2}} \mathbf{A} + \frac{6}{\sqrt{6^2+3^2}} \mathbf{B} = 0$$

Určete stupeň statické určitosti a osově síly v prutech

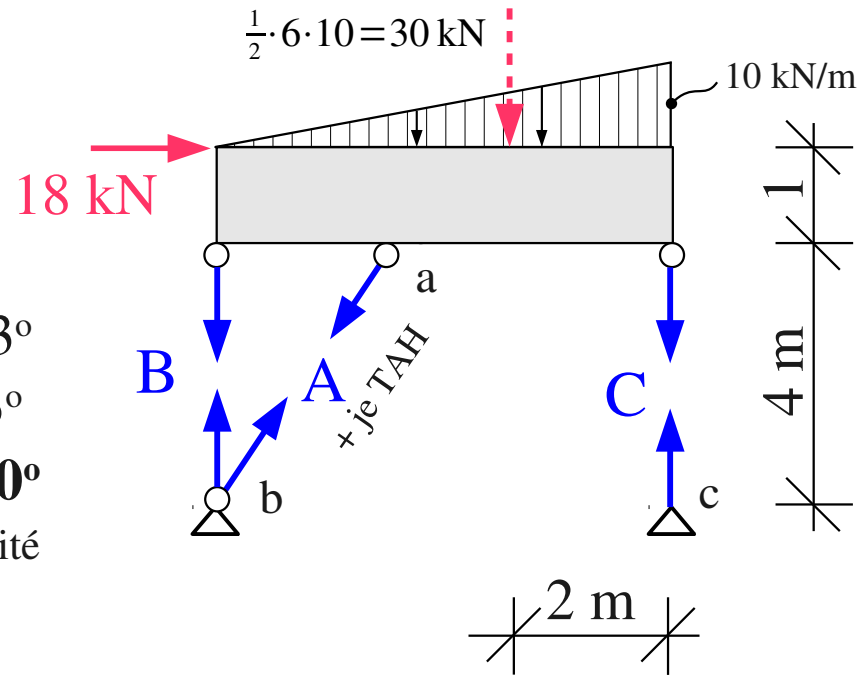


$$m = 3^{\circ}$$

$$r = 3^{\circ}$$

$$m - r = 0^{\circ}$$

stat. určité



Řešení

$$\curvearrowright_b 5 \cdot 18 + 4 \cdot 30 + 6 \mathbf{C} = 0 \quad (1)$$

$$\mathbf{C} = -35,0 \text{ kN}$$

$$\rightarrow 18 - \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2}} \mathbf{A} = 0 \quad (2)$$

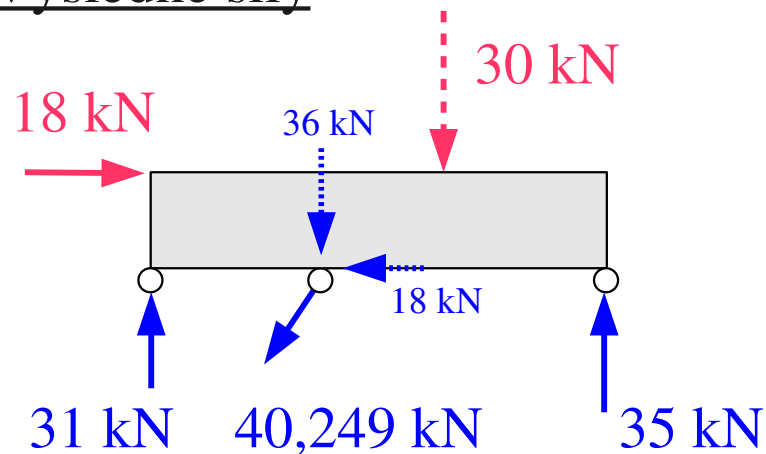
$$\mathbf{A} = 40,249 \text{ kN}$$

$$\curvearrowright_a 4 \mathbf{C} + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 18 - 2 \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

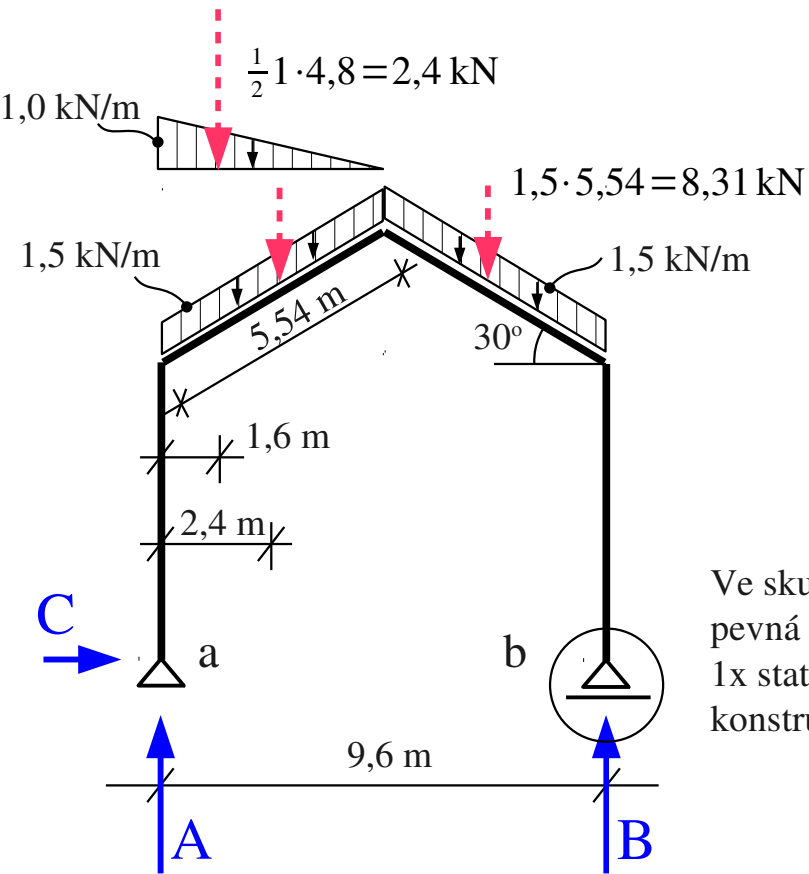
$$\mathbf{B} = -31,0 \text{ kN}$$

$$\downarrow \mathbf{K} \quad 30 + \mathbf{B} + \frac{4}{\sqrt{2^2 + 4^2}} \mathbf{A} + \mathbf{C} = 0, \text{ O.K.}$$

Výsledné síly



Určete reakce od zatížení vlastní tíhou a sněhem



Ve skutečnosti je zde
pevná podpora, tj.
1x staticky neurčitá
konstrukce



Atrium fakulty stavební

foto: autor

$$\rightarrow : C = 0$$

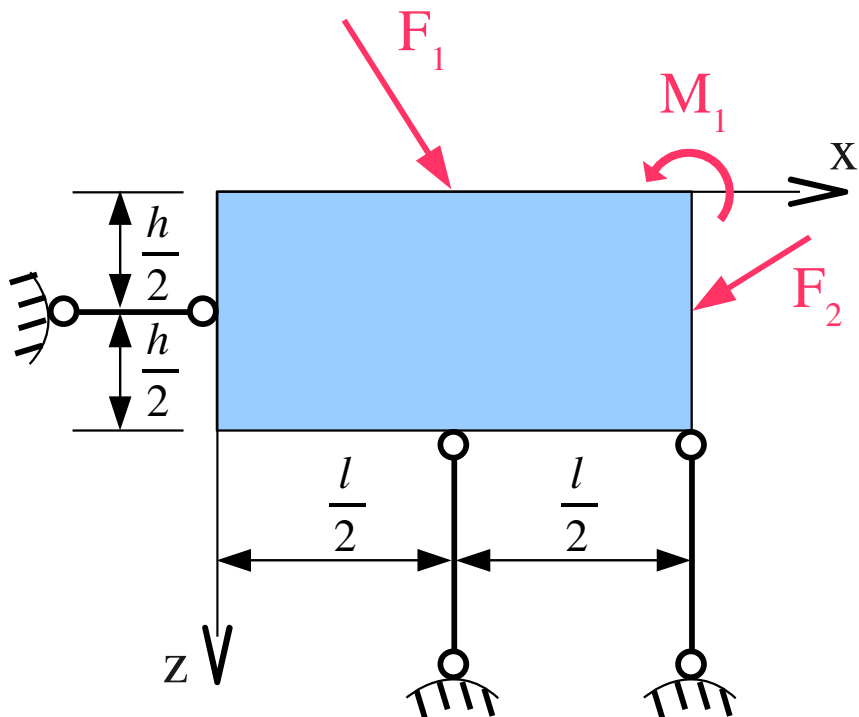
$$\curvearrowleft_A : 1,6 \cdot 2,4 + 2,4 \cdot 8,31 + 7,2 \cdot 8,31 - 9,6 B = 0, \quad B = 8,71 \text{ kN}$$

$$\curvearrowright_B : 2,4 \cdot 8,31 + 7,2 \cdot 8,31 + 8 \cdot 2,4 - 9,6 A = 0, \quad A = 10,31 \text{ kN}$$

$$\uparrow K : A + B - 2,4 - 8,31 - 8,31 = 0 \quad \text{O.K.}$$

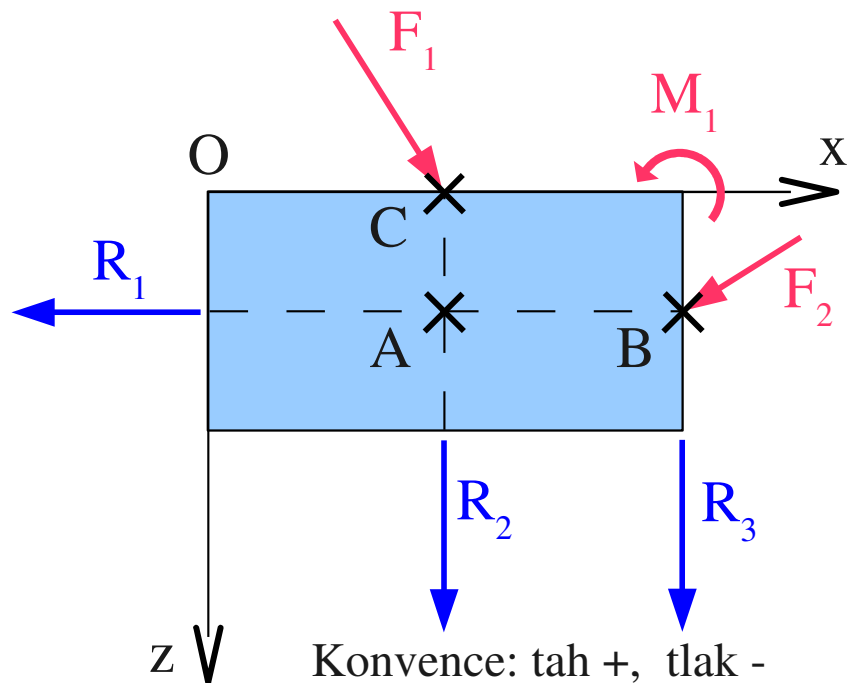
Použijeme takové podmínky, aby výsledná soustava rovnic byla co nejjednodušší

Možné způsoby výpočtu reakcí - 3 podmínky rovnováhy



$$\begin{aligned} \rightarrow F_{1x} + F_{2x} - \mathbf{R}_1 &= 0 \\ \downarrow F_{1z} + F_{2z} + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 &= 0 \\ \curvearrowleft \text{O} \quad M_1 + M_0^{F_1} + M_0^{F_2} - \frac{h}{2} \mathbf{R}_1 - \frac{l}{2} \mathbf{R}_2 - l \mathbf{R}_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow F_{1x} + F_{2x} - \mathbf{R}_1 &= 0 \\ \downarrow F_{1z} + F_{2z} + \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3 &= 0 \\ \curvearrowleft \text{A} \quad M_1 + M_A^{F_1} + M_A^{F_2} - \frac{l}{2} \mathbf{R}_3 &= 0 \end{aligned}$$

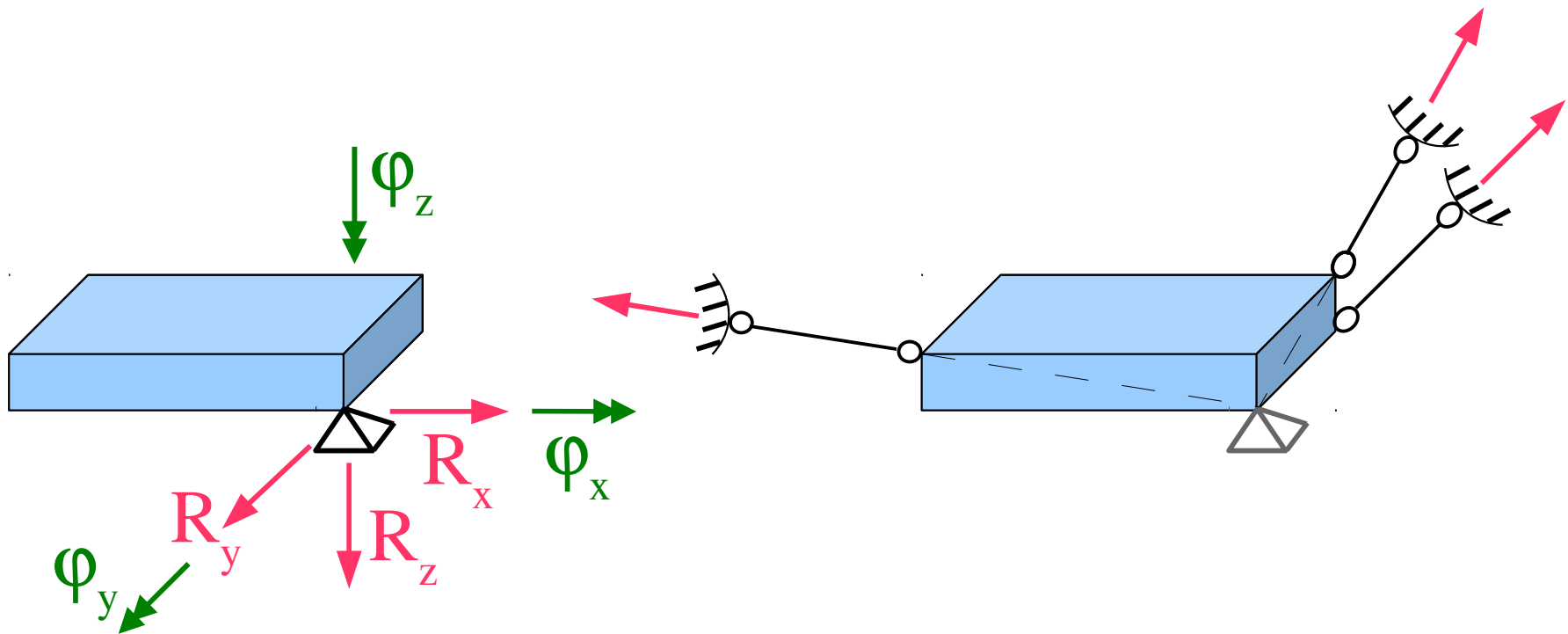


$$\begin{aligned} \rightarrow F_{1x} + F_{2x} - \mathbf{R}_1 &= 0 \\ \curvearrowleft \text{A} \quad M_1 + M_A^{F_1} + M_A^{F_2} - \frac{l}{2} \mathbf{R}_3 &= 0 \\ \curvearrowleft \text{B} \quad M_1 + M_B^{F_1} + \cancel{M_B^{F_2}} + \frac{l}{2} \mathbf{R}_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \curvearrowleft \text{A} \quad M_1 + M_A^{F_1} + M_A^{F_2} - \frac{l}{2} \mathbf{R}_3 &= 0 \\ \curvearrowleft \text{B} \quad M_1 + M_B^{F_1} + \cancel{M_B^{F_2}} + \frac{l}{2} \mathbf{R}_2 &= 0 \\ \curvearrowleft \text{C} \quad M_1 + \cancel{M_C^{F_1}} + M_C^{F_2} - \frac{h}{2} \mathbf{R}_1 - \frac{l}{2} \mathbf{R}_3 &= 0 \end{aligned}$$

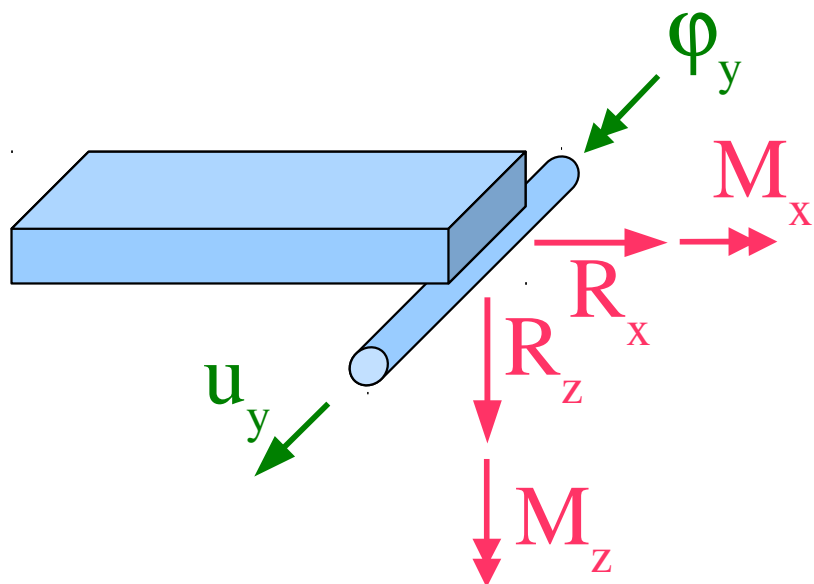
Náhrada vazeb v prostoru

- **Pevný kloub** ($r = 3^\circ$) lze nahradit třemi kyvnými pruty v průsečíku paprsků, paprsky prutů nesmí ležet v jedné rovině
 - Často se nahrazuje ve směru x , y , z

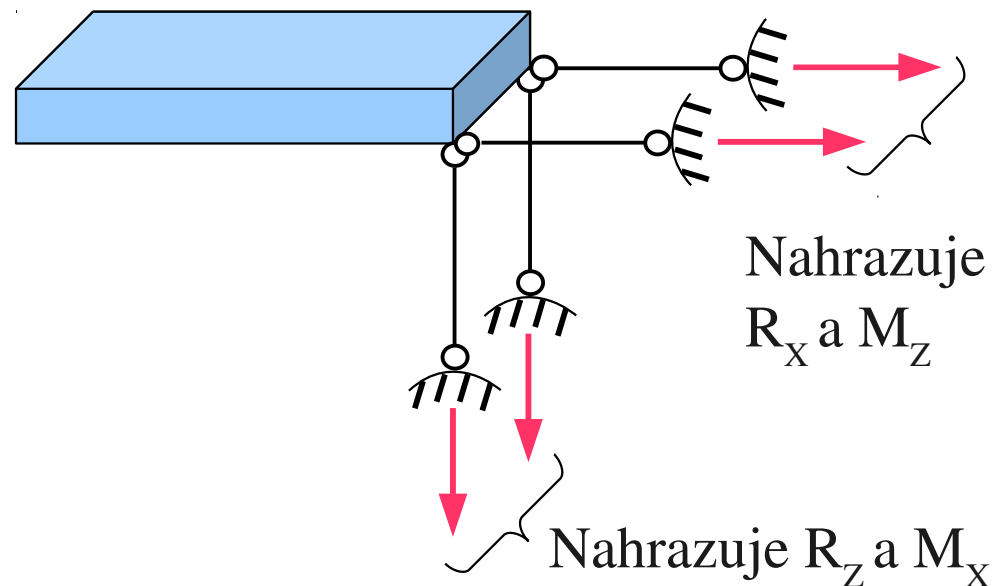
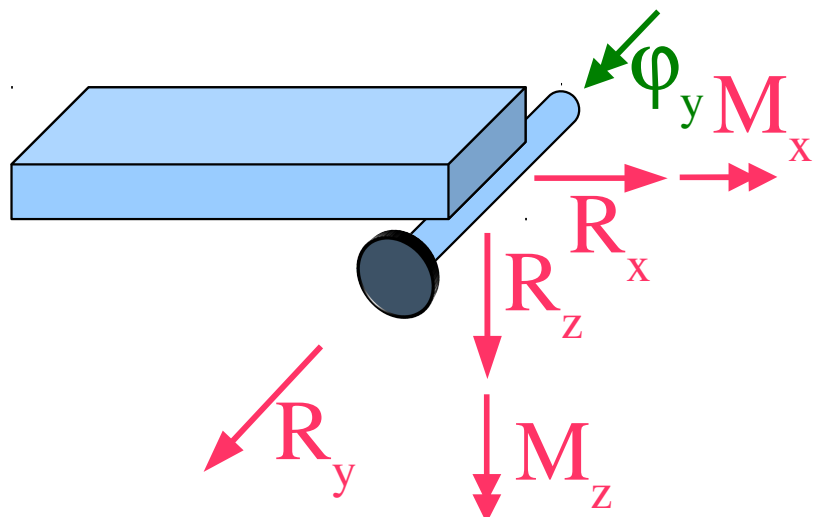


Náhrada vazeb v prostoru

- **Posuvný válcový kloub** ($r = 4$) lze nahradit čtyřmi kyvnými pruty, v příslušné rovině musí zachytit sílu i moment

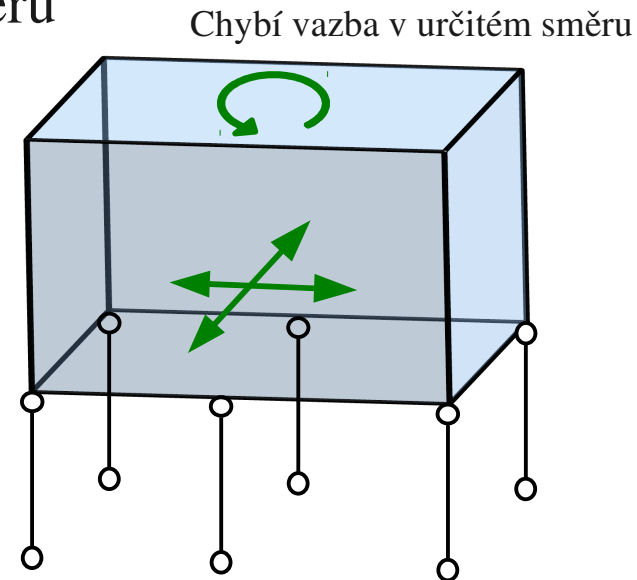
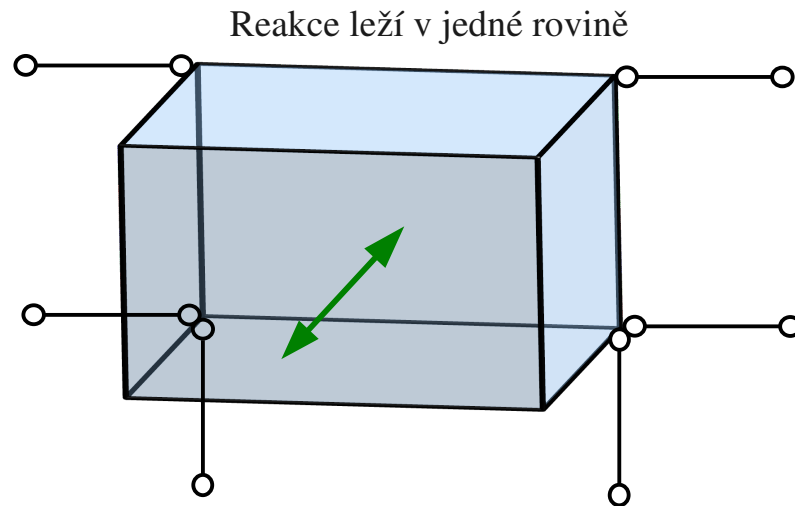


- **Neposuvný válcový kloub** ($r = 5$)

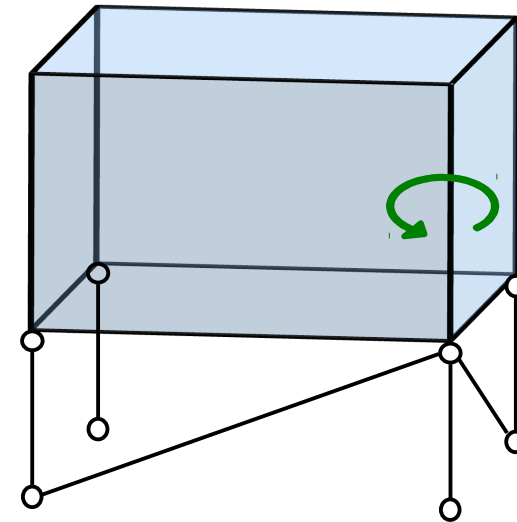
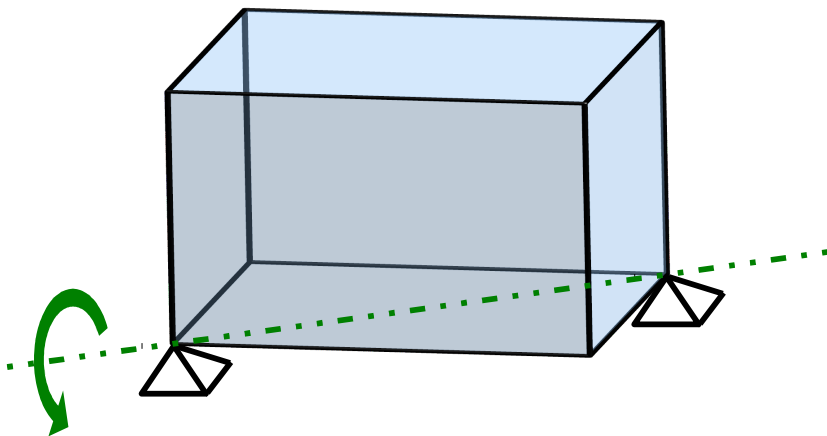


Výjimkové případy podepření v prostoru

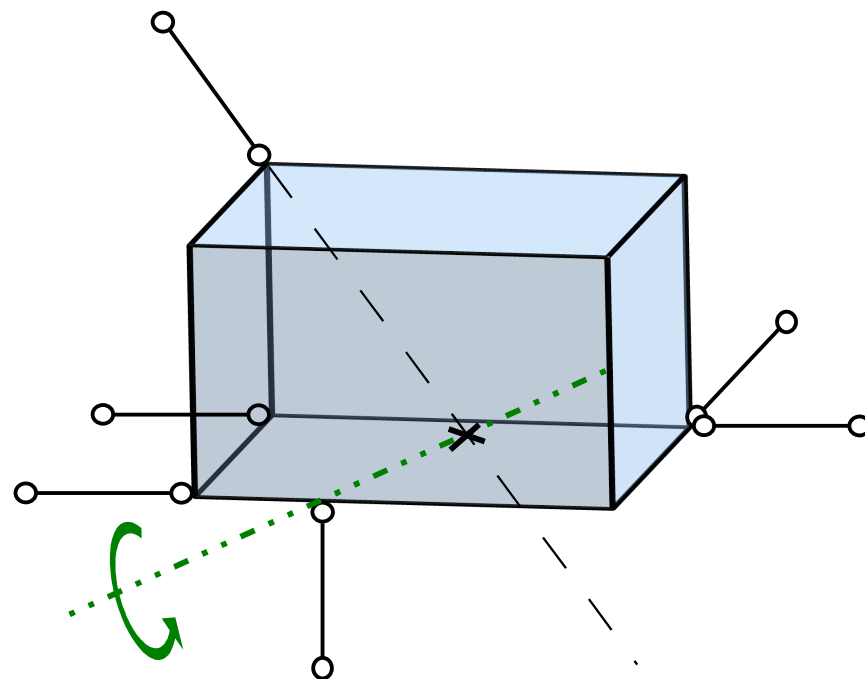
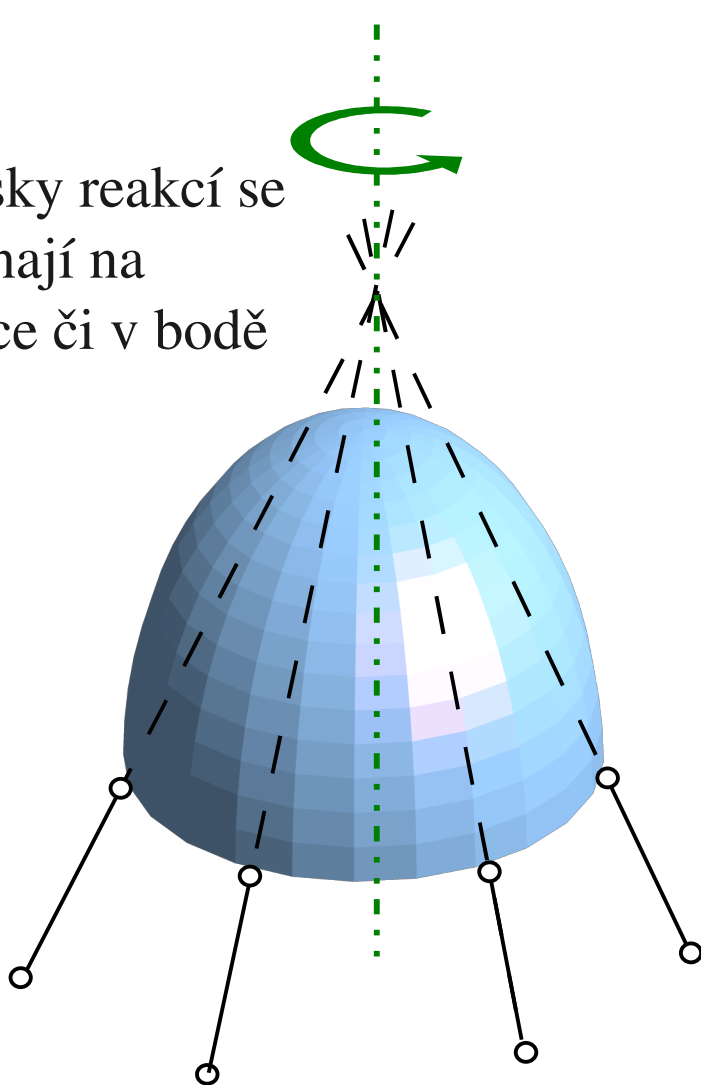
- Determinant soustavy rovnic = 0
- Není bráněno posunu tělesa v určitém směru



- Není bráněno rotaci tělesa (existuje nulová přímka silových reakcí)

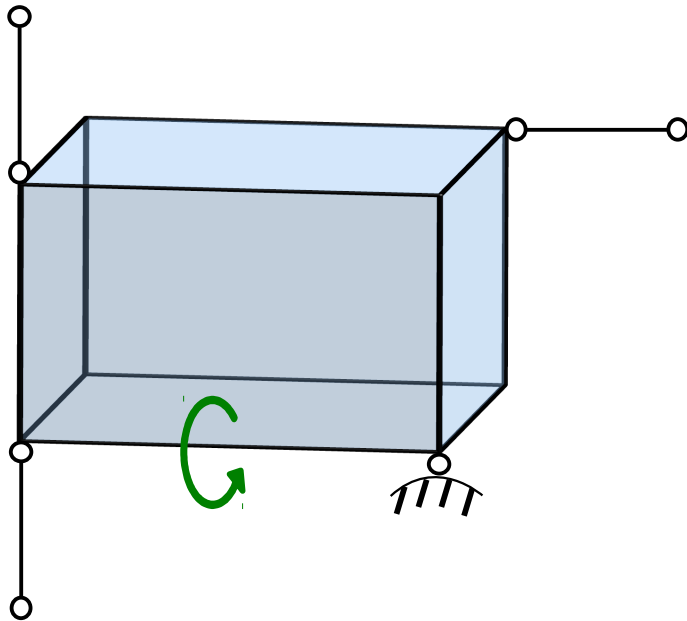


Paprsky reakcí se
protínají na
přímce či v bodě



Více než tři silové složky
reakcí leží v jedné rovině

- Zdvojení reakce neodebere další stupeň volnosti a vede rovněž na výjimečný případ podepření

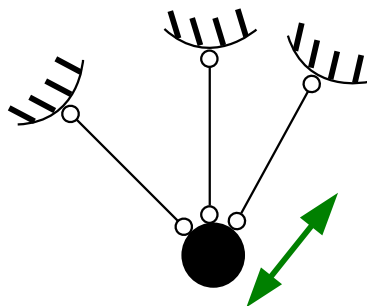


$$m = 6^{\circ}$$

$$r = 6^{\circ}$$

Silová i momentová podmínka vede na stejnou strukturu rovnic - nelze určit pouze z podmínek rovnováhy

- Reakce hmotného bodu leží v jedné rovině (není bráněno posunutí)

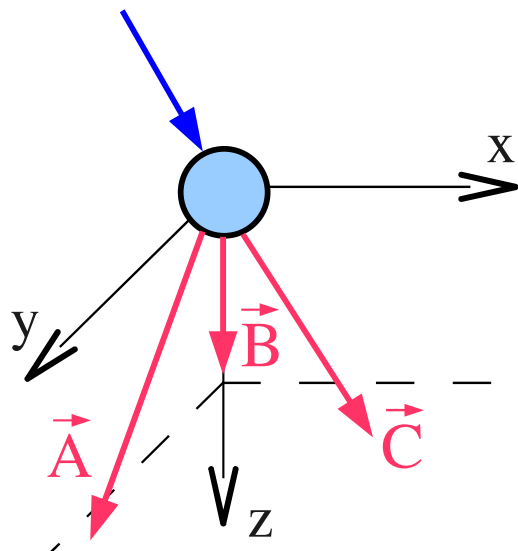
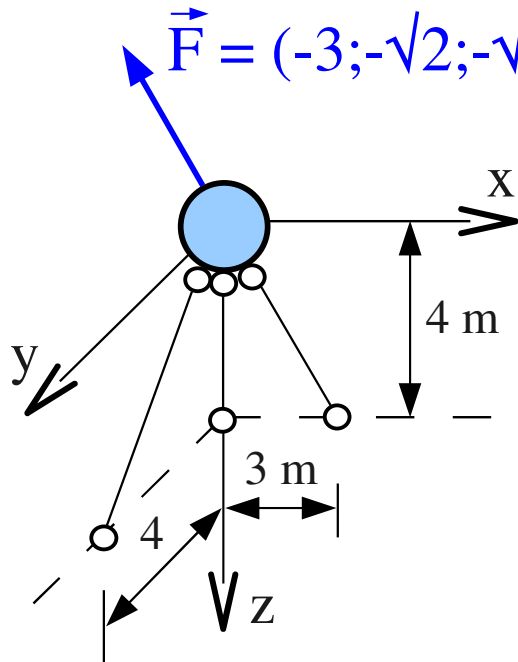


$$m = 2^{\circ}$$

$$r = 3^{\circ}$$

Příklad - reakce hmotného bodu v prostoru

- K dispozici tři podmínky rovnováhy, $m = r = 3$



$$\vec{A} = A \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\vec{B} = B (0; 0; 1)$$

$$\vec{C} = C \left(\frac{3}{5}; 0; \frac{4}{5} \right)$$

$$\rightarrow 0A + 0B + \frac{3}{5}C - 3 = 0$$

$$C = 5 \text{ kN}$$

$$\swarrow \frac{\sqrt{2}}{2}A + 0B + 0C - \sqrt{2} = 0$$

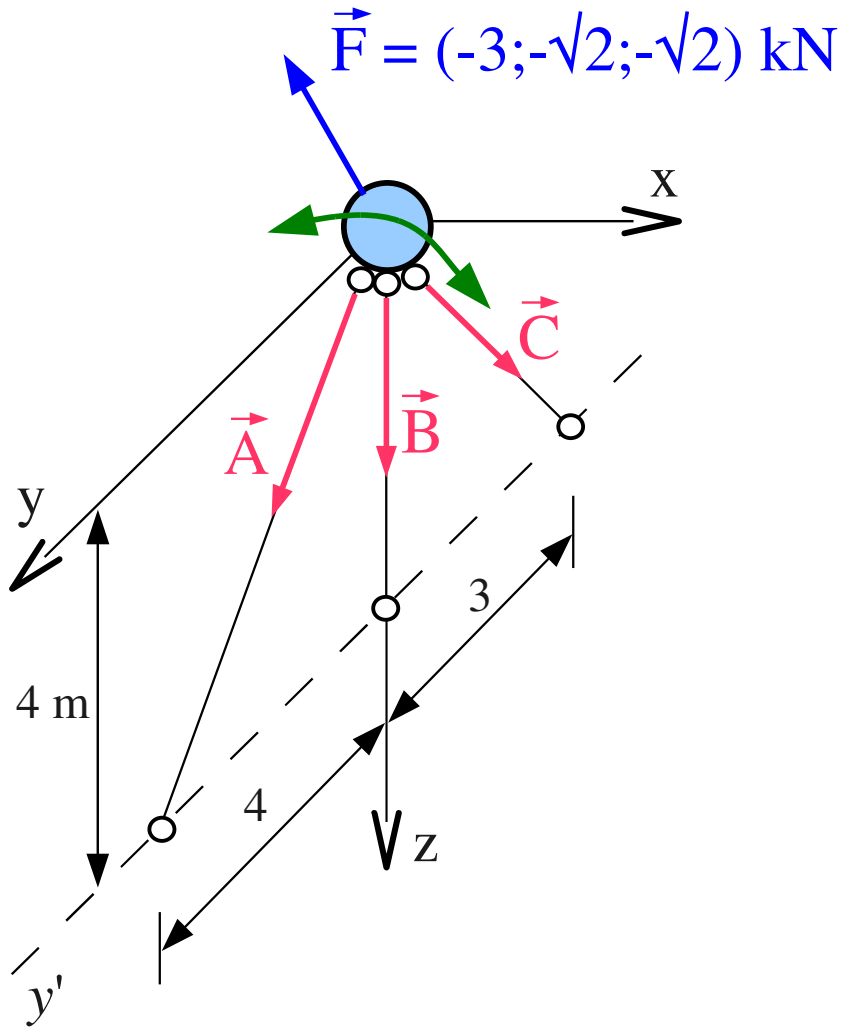
$$A = 2 \text{ kN}$$

$$\downarrow \frac{\sqrt{2}}{2}A + B + \frac{4}{5}C - \sqrt{2} = 0$$

$$B = -4 \text{ kN}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Výhodné} \\ \text{Cramerovo} \\ \text{pravidlo} \end{array}$$

- Přesuňme kyvný prut C do roviny s pruty A a B
 - Vznikne výjimečný případ podepření, volná rotace okolo přímky y'



$$\vec{A} = A \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\vec{B} = B (0; 0; 1)$$

$$\vec{C} = C \left(0; -\frac{3}{5}; \frac{4}{5} \right)$$

$$\rightarrow 0A + 0B + 0C - 3 = 0$$

$$\swarrow \frac{\sqrt{2}}{2}A + 0B - \frac{3}{5}C - \sqrt{2} = 0$$

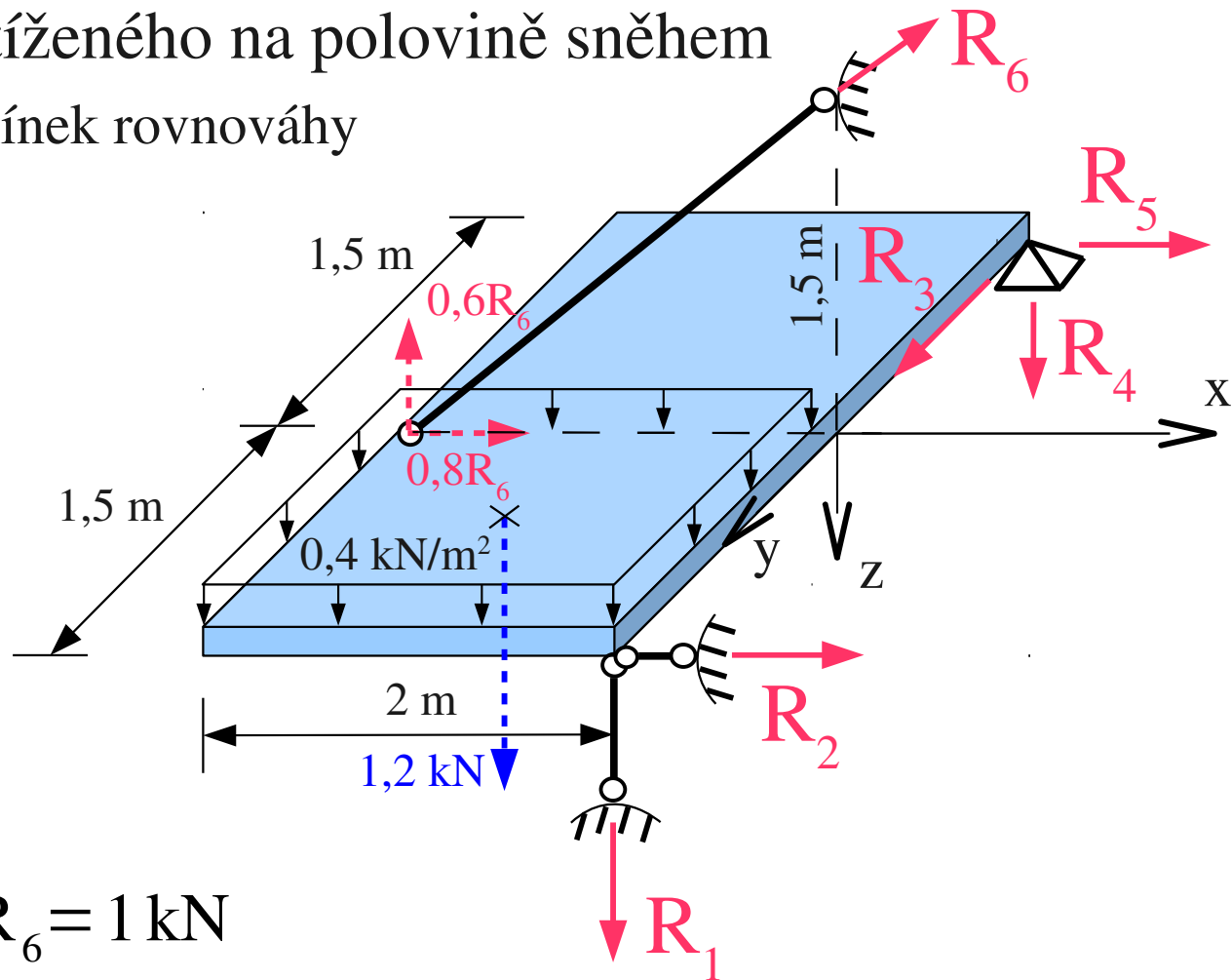
$$\downarrow \frac{\sqrt{2}}{2}A + B + \frac{4}{5}C - \sqrt{2} = 0$$

$$\text{Det} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{3}{5} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{4}{5} \end{vmatrix} = 0$$

Nelze nalézt jednoznačné řešení

Určete reakce přístřešku zatíženého na polovině sněhem

Soustava sil v prostoru - 6 podmínek rovnováhy



$$\swarrow \quad \mathbf{R}_3 = 0$$

$$\swarrow y \quad 1 \cdot 1,2 - 2 \cdot 0,6 \mathbf{R}_6 = 0, \quad \mathbf{R}_6 = 1 \text{ kN}$$

$$\mathbf{R}_4 \uparrow \quad 1,5 \cdot 0,8 \mathbf{R}_6 + 3 \mathbf{R}_2 = 0, \quad \mathbf{R}_2 = -0,4 \text{ kN}$$

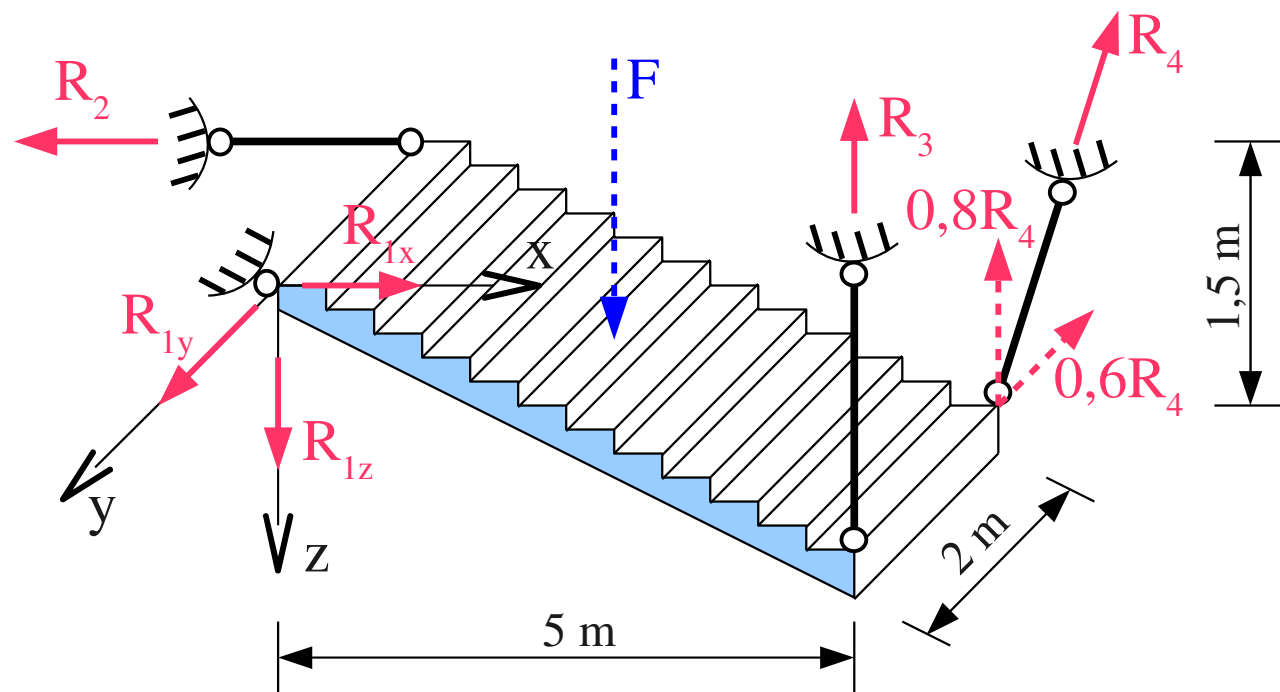
$$\mathbf{R}_1 \downarrow \quad 1,5 \cdot 0,8 \mathbf{R}_6 + 3 \mathbf{R}_5 = 0, \quad \mathbf{R}_5 = -0,4 \text{ kN}$$

$$\mathbf{R}_2 \leftarrow \quad 0,75 \cdot 1,2 - 1,5 \cdot 0,6 \mathbf{R}_6 + 3 \mathbf{R}_4 = 0, \quad \mathbf{R}_4 = 0 \text{ kN}$$

$$\downarrow \quad \mathbf{R}_1 + 1,2 - 0,6 \mathbf{R}_6 + \mathbf{R}_4 = 0, \quad \mathbf{R}_1 = -0,6 \text{ kN}$$

$$\rightarrow \text{K: } \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_5 + 0,8 \mathbf{R}_6 = -0,4 - 0,4 + 0,8 = 0 \quad \text{O.K.}$$

Určete maximální tíhu ramena schodiště, aby síly v reakcích nepřekročily ± 10 kN



Náhradní břemeno F
od vlastní tíhy
schodiště uvažujeme
přibližně uprostřed
ramena

$$\begin{matrix} \leftarrow x \\ \nearrow y \\ \downarrow z \end{matrix} \quad 1F - 2 \cdot 0,8 R_4 - 1,5 \cdot 0,6 R_4 = 0, \quad R_4 = 0,4 F$$

$$5 \cdot 0,8 R_4 + 5 R_3 - 2,5 F = 0, \quad R_3 = 0,18 F$$

$$\downarrow \quad R_{1z} + F - R_3 - 0,8 R_4 = 0, \quad R_{1z} = -0,5 F$$

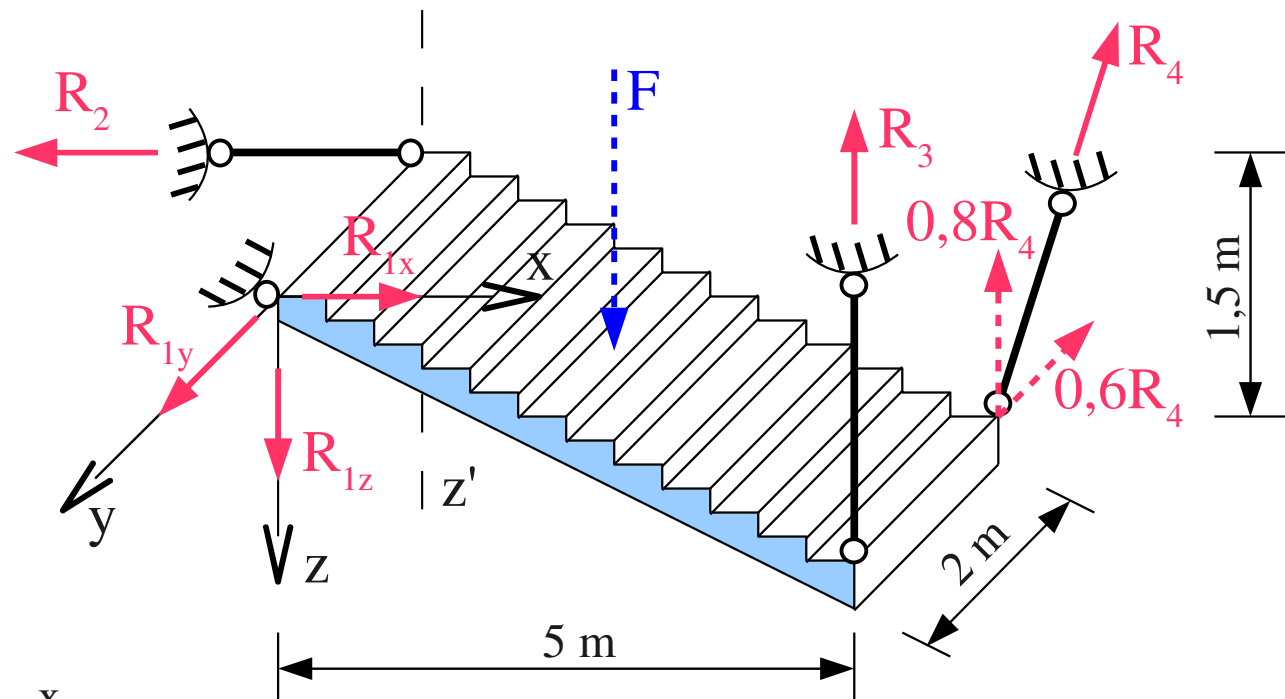
$$\uparrow z \quad 5 \cdot 0,6 R_4 + 2 R_2 = 0, \quad R_2 = -0,6 F$$

$$\rightarrow \quad R_{1x} - R_2 = 0, \quad R_{1x} = -0,6 F$$

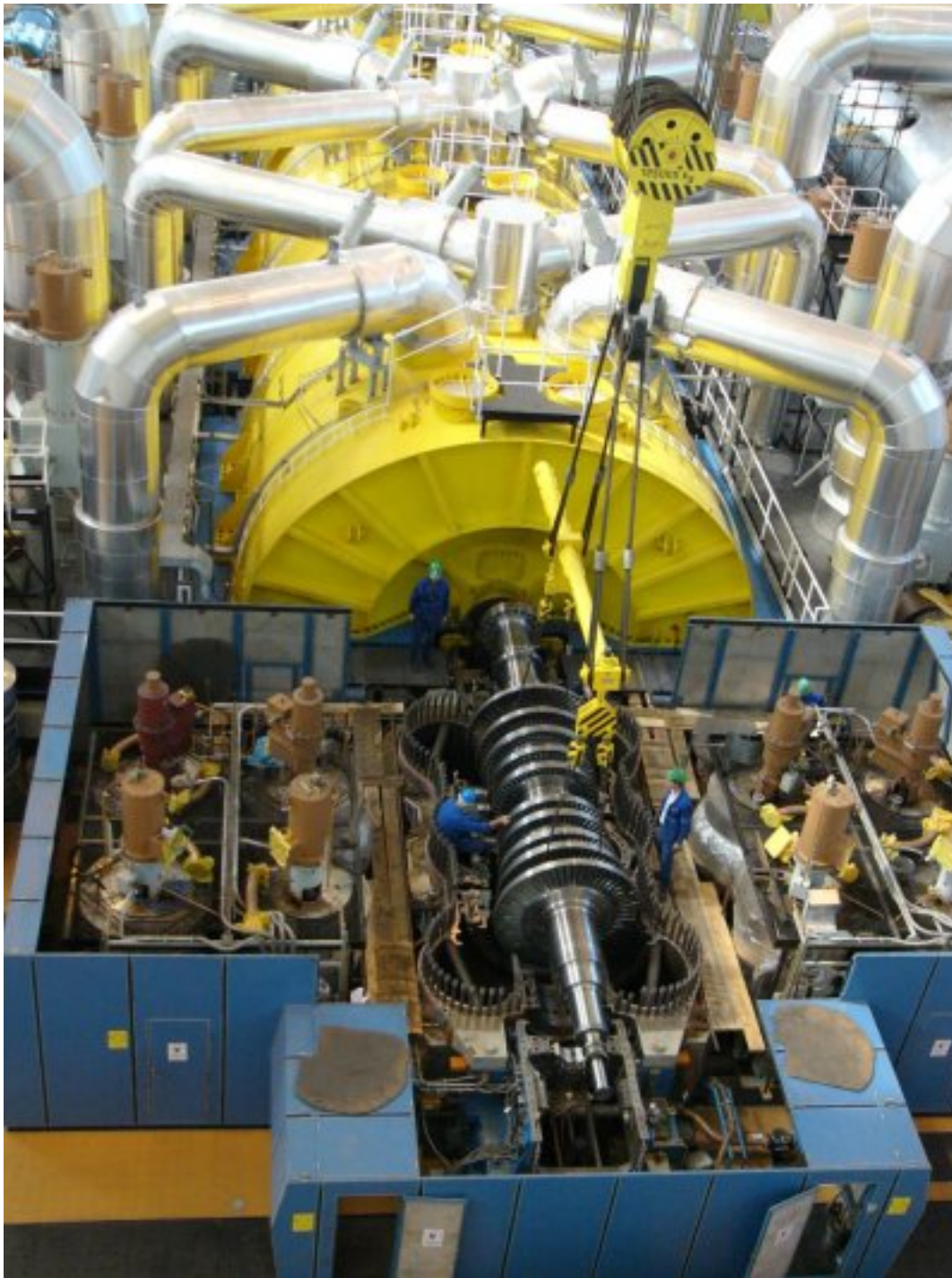
$$\nearrow \quad -0,6 R_4 + R_{1y} = 0, \quad R_{1y} = 0,24 F$$

$$\nearrow \quad K: 2,5 F - 1,5 R_{1x} + 1,5 R_2 + 5 R_{1z} = 0 \quad \text{O.K.}, \quad F_{\max} = \frac{10}{0,6} = 16,6 \text{ kN}^{23}$$

- Až tři silové podmínky lze nahradit momentovými, celkem šest momentových



$$\begin{aligned}
 & \overset{x}{\leftarrow} \quad 1F - 2 \cdot 0,8 R_4 - 1,5 \cdot 0,6 R_4 = 0, \quad R_4 = 0,4 F \\
 & \overset{y}{\swarrow} \quad 5 \cdot 0,8 R_4 + 5 R_3 - 2,5 F = 0, \quad R_3 = 0,18 F \\
 & \overset{z}{\uparrow} \quad 5 \cdot 0,6 R_4 + 2 R_2 = 0, \quad R_2 = -0,6 F \\
 & \overset{R_3}{\uparrow} \quad 2 R_2 + 5 R_{1y} = 0, \quad R_{1y} = 0,24 F \\
 & \overset{z'}{\uparrow} \quad 2 R_{1x} + 5 \cdot 0,6 R_4 = 0, \quad R_{1x} = -0,6 F \\
 & \overset{R_2}{\leftarrow} \quad 1F - 2 R_3 + 1,5 \cdot 0,6 R_4 + 2 R_{1z} = 0, \quad R_{1z} = -0,5 F \\
 & \downarrow \quad K: \quad R_{1z} + F - R_3 - 0,8 R_4 = 0, \quad \text{O.K.}
 \end{aligned}$$



Rotor turbíny v Temelíně

K zamyšlení - určete stupně volnosti rotoru turbíny při montáži

- $m = 6$, $r = 4$, staticky přeuredité, tvarově neurčité (např. rotace okolo svislé osy)
- Paprsky sil lan se navíc protínají v jednom bodě - rotacím okolo tohoto průsečíku není bráněno
- Na rotor působí převážně jeho vlastní tíha. Rozložení tíhy rotoru a schema lan je zřejmě symetrické okolo dvou svislých rovin, výsledné síly v lanech musí být též symetrické
- Rotace rotoru tedy nehraje roli (lze uvažovat jako hmotný bod $m=3$, $r=4$)
- Lze předpokládat, že síly v lanech jsou stejné. Pak síla v laně je čtvrtina tíhy rotoru zvětšená o $1/\cos \gamma$

Přednášky z předmětu SM1, Stavební fakulta ČVUT v Praze

Autor Vít Šmilauer

Náměty, připomínky, úpravy, vylepšení zasílejte prosím na

vit.smilauer@fsv.cvut.cz

Created 11/2007 in OpenOffice 2.3, ubuntu linux 6.06

Last update Feb 21, 2011