

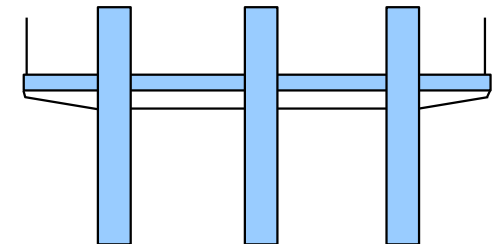
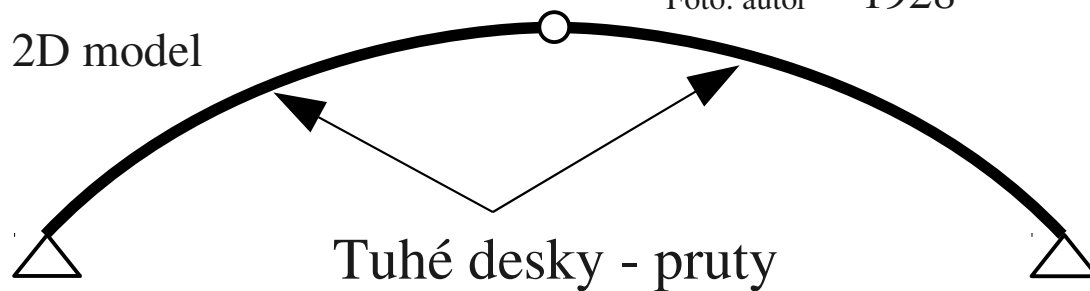
Složené soustavy v rovině, stupně volnosti

Složená soustava vznikne spojením hmotných bodů, tuhých desek a tuhých těles



Maloměřický most s mezilehlou mostovkou, Brno,
tři paralelní trojkloubové oblouky, rozpětí 33 m,
1928

Foto: autor



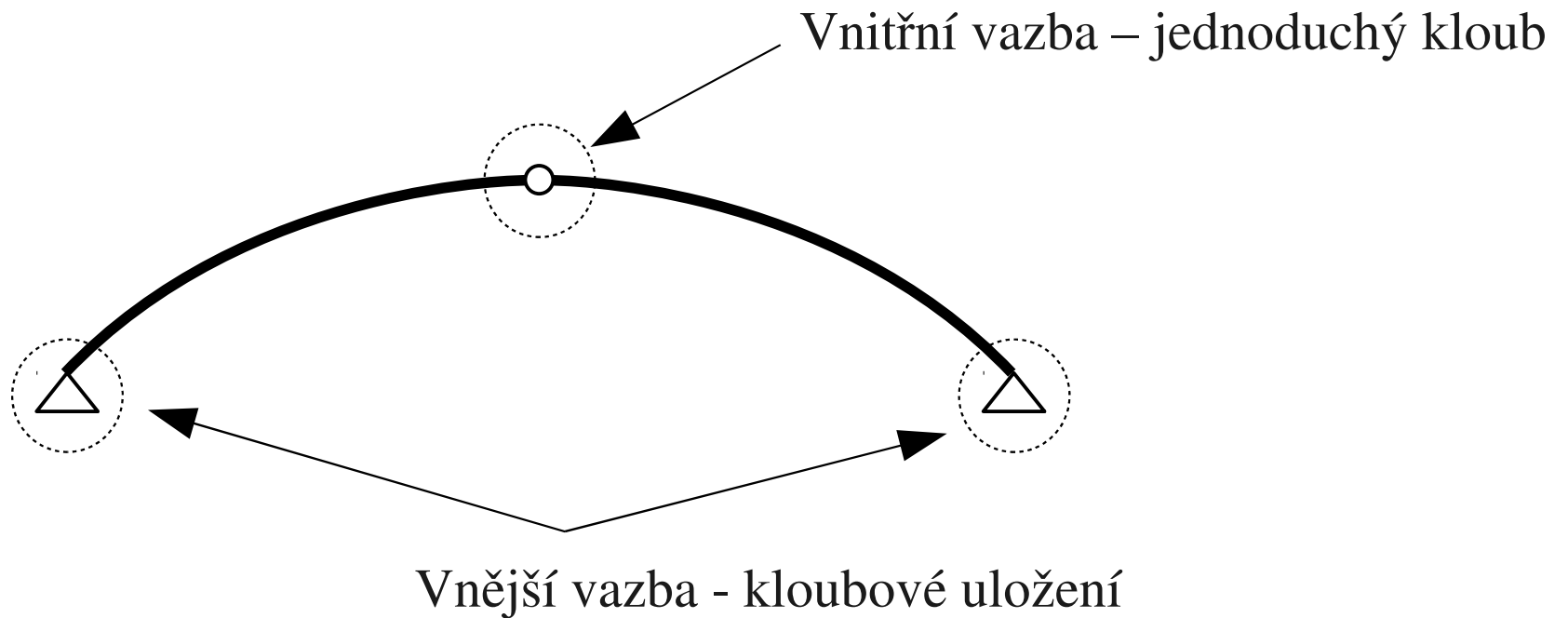
Copyright (c) 2007-2008 Vít Šmilauer

Czech Technical University in Prague, Faculty of Civil Engineering, Department of Mechanics, Czech Republic

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License" found at <http://www.gnu.org/licenses/>

Vnější vazby – spojují soustavu s podkladem

Vnitřní vazby – spojují jednotlivé prvky navzájem (klouby, kyvné pruty, táhla...)



Stupně volnosti složené soustavy

Součet stupňů volnosti od jednotlivých prvků bez vazeb m

Součet stupňů volnosti odebraných všemi vazbami r

Počet stupňů volnosti soustavy, stupeň statické neurčitosti $s_n = r - m$

Statická a kinematická určitost

Obvykle se posuzuje celková určitost, posuzují se všechny prvky a všechny vazby

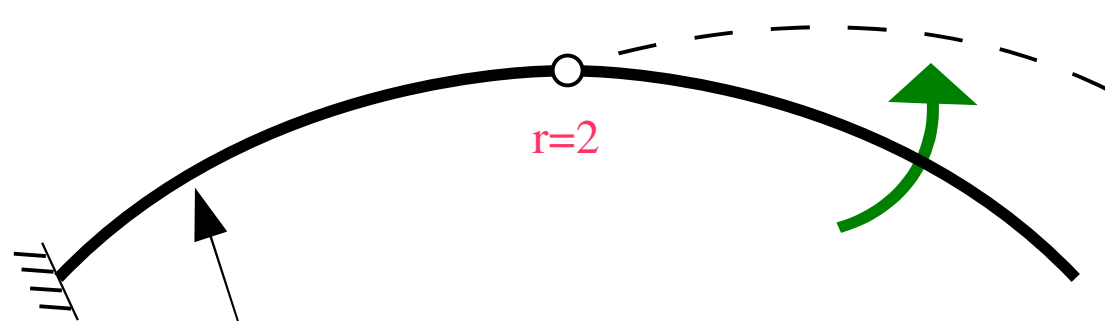
Vnější určitost uvažuje konstrukci jako celek (tuhá deska $m_{ext} = 3$, tuhé těleso $m_{ext} = 6$). Součet stupňů volnosti odebranými vnějšími vazbami r_{ext}

Statická a kinematická určitost soustavy

Stupně volnosti	Podepření staticky	Podepření kinematicky	Pozn.
$s_n = 0 \wedge r_{ext} \geq m_{ext} \wedge$ není výjimkový případ	určité	určité	kce pevně podepřena
$s_n > 0 \wedge r_{ext} \geq m_{ext} \wedge$ není výjimkový případ	neurčité	přeurčité	kce pevně podepřena
$s_n < 0 \vee r_{ext} < m_{ext} \vee$ výjimkový případ	přeurčité	neurčité	kce může změnit polohu

Výjimkový případ podepření: přestože počet vazeb je dostatečný k odebrání všech stupňů volnosti konstrukce ($r \geq m$, $r_{ext} \geq m_{ext}$), jejich nevhodné uspořádání nezabraňuje skutečným či nekonečně malým posunům/potočením konstrukce nebo její části.

Jednoduchý kloub odebírá dva stupně volnosti, $r = 2$



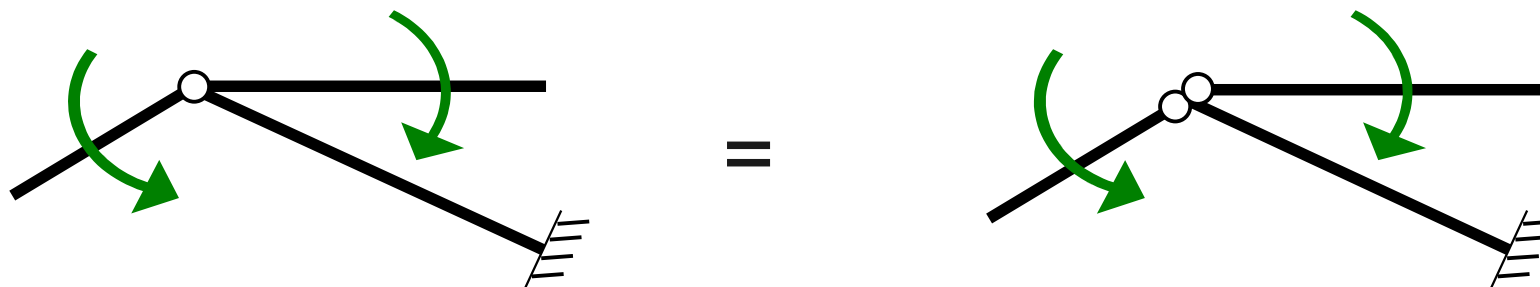
Kloub zamezuje posunům připojené tuhé desky, jednu tuhou desku lze uvažovat jako podepřenou

Pevně podepřená deska (prut)

Vícenásobný kloub vznikne složením několika jednoduchých kloubů

Odebírá $r = 2(n-1)$ stupňů volnosti, n je počet spojených desek

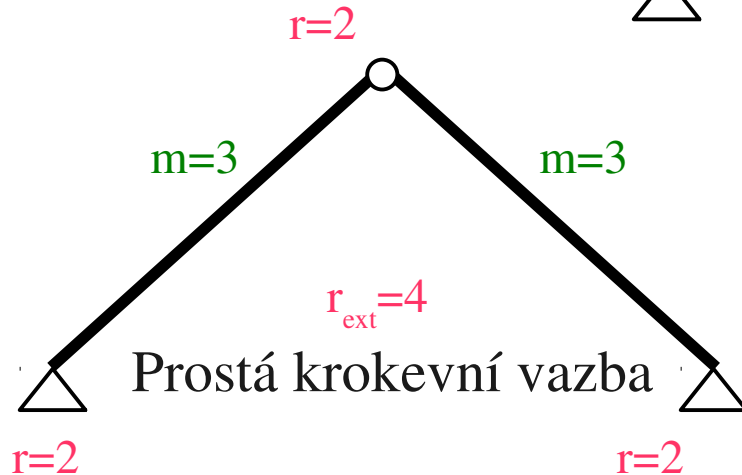
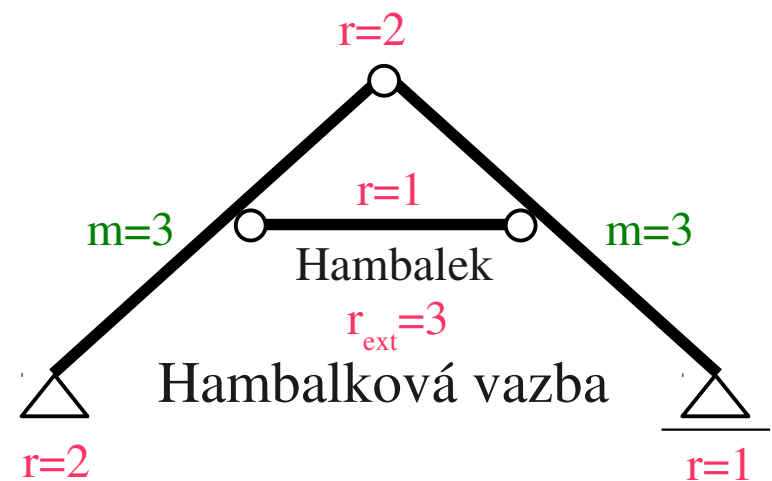
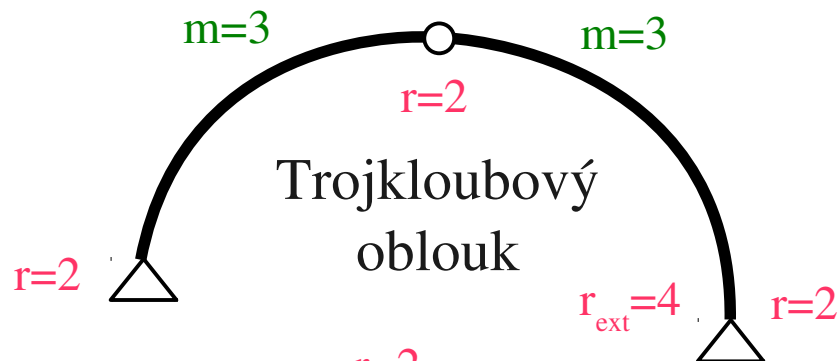
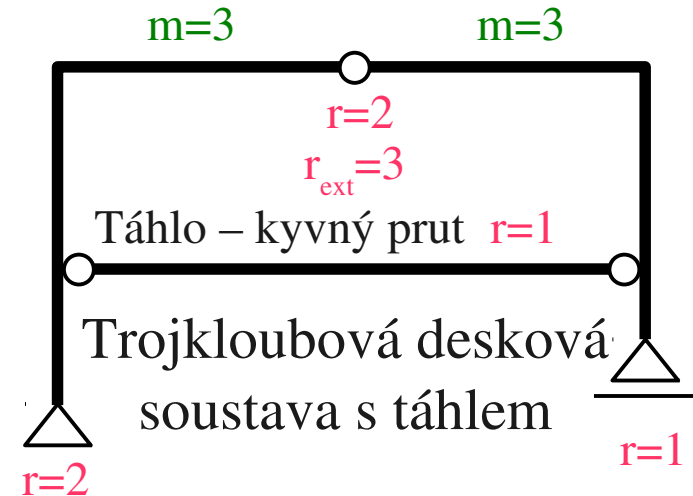
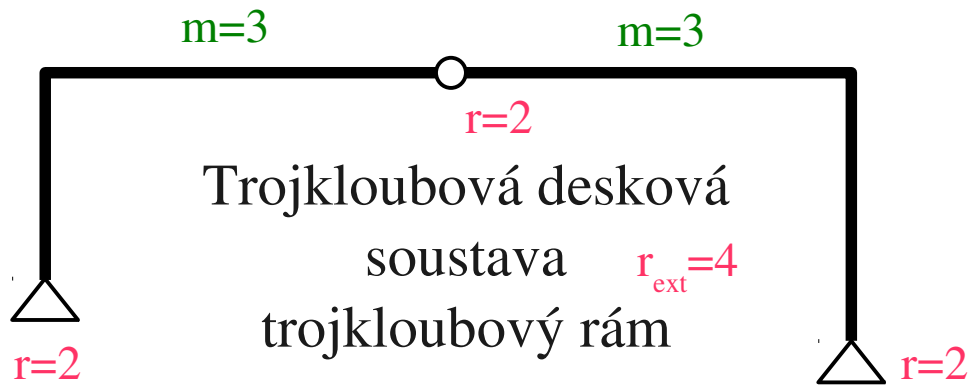
Umožňuje vzájemně nezávislé pootáčení všech spojených desek, jednu desku lze opět pevně podepřít

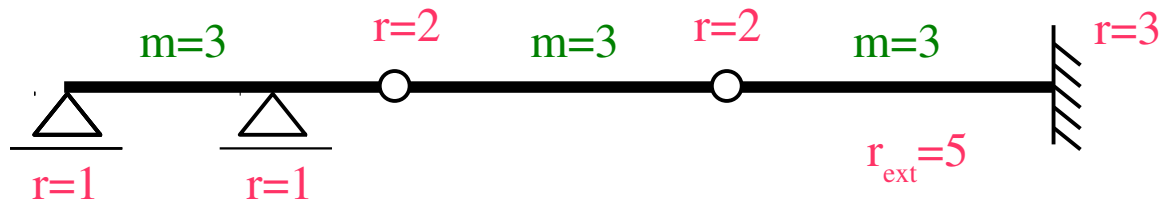


Dvojnásobný kloub, $n = 3$, $r = 4^\circ$

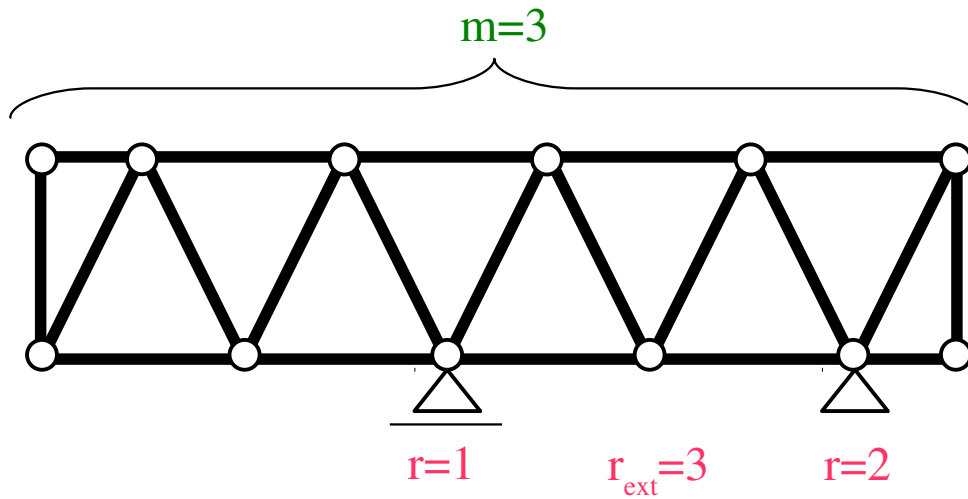
$$r = 2^\circ + 2^\circ = 4^\circ$$

Časté staticky určité složené konstrukce





Gerberův nosník
viz další přednáška

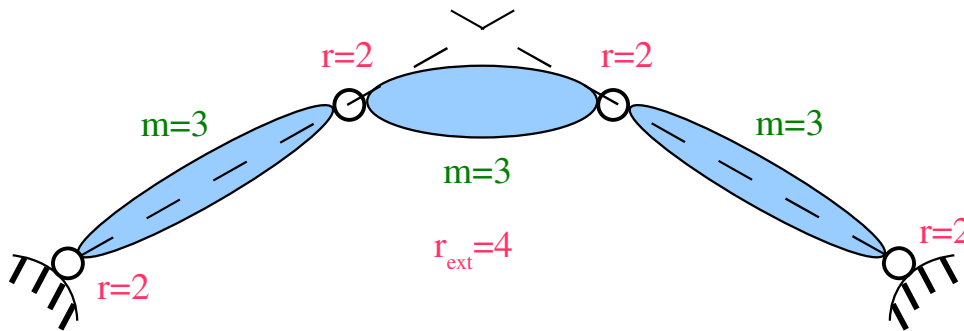


Příhradová konstrukce
viz další přednáška



Administrativní budova, Evropská ul., Praha - Dejvice, 2006

Určete stupeň statické určitosti

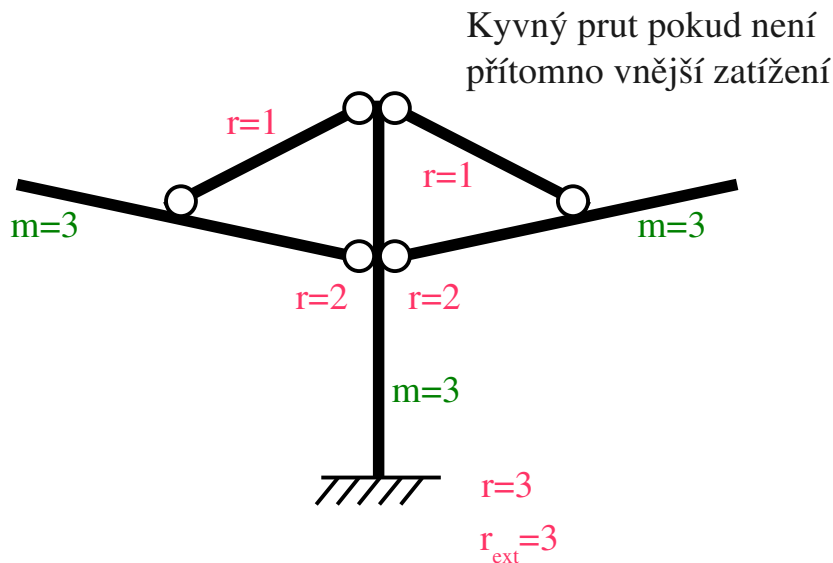


$$m = 3 \times 3^\circ = 9^\circ$$

$$r = 4 \times 2^\circ = 8^\circ$$

$$s_n = r - m = -1^\circ$$

Celkově 1x staticky přeuročitá,
kinematicky neurčitá (chybí vazba).

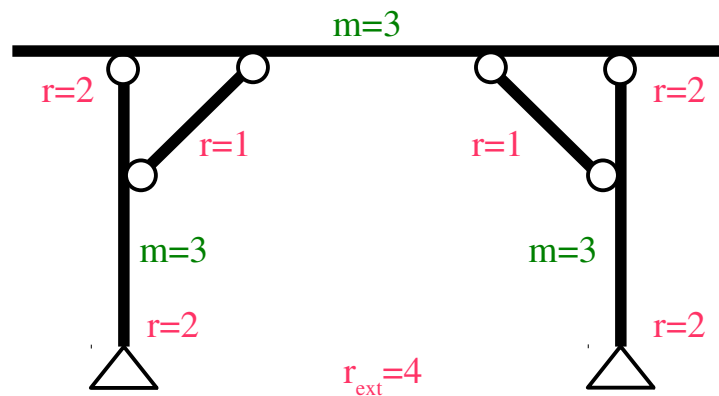


$$m = 3 \times 3^\circ = 9^\circ$$

$$r = 3^\circ + 2 \times 2^\circ + 2 \times 1^\circ = 9^\circ$$

$$s_n = r - m = 0^\circ$$

Staticky určitá, 9 nezávislých
podmínek rovnováhy.

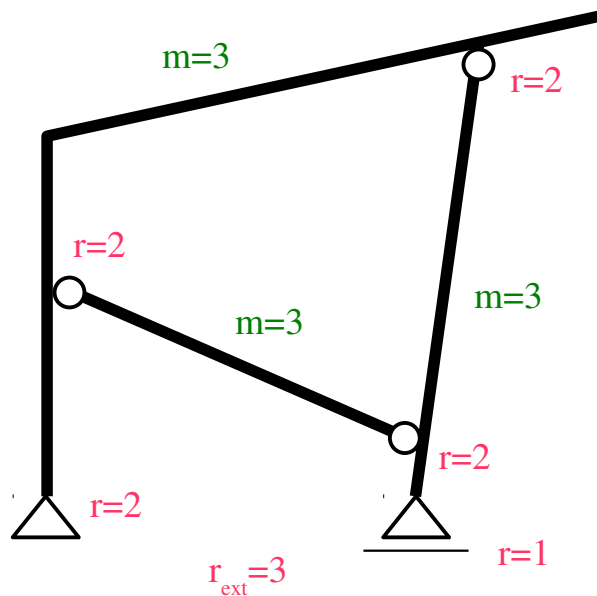


$$m = 3 \times 3^{\circ} = 9^{\circ}$$

$$r = 4 \times 2^{\circ} + 2 \times 1^{\circ} = 10^{\circ}$$

$$s_n = r - m = 1^{\circ}$$

Celkově 1x staticky neurčitá, lze však vypočítat svislé reakce z rovnováhy celku (stejná výše podpor).



$$m = 3 \times 3^{\circ} = 9^{\circ}$$

$$r = 4 \times 2^{\circ} + 1 \times 1^{\circ} = 9^{\circ}$$

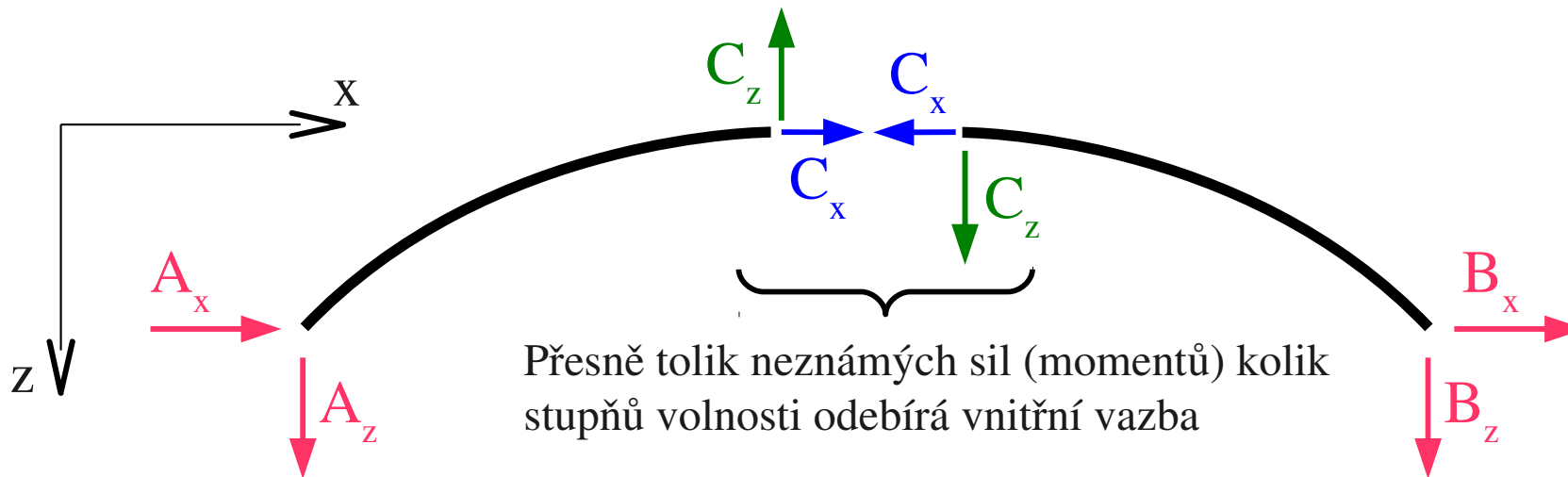
$$s_n = r - m = 0^{\circ}$$

Celkově i vnitřně staticky určitá.

Výpočet reakcí složených soustav

Uvolníme všechny vnitřní a vnější vazby a účinky vazeb nahradíme příslušnými silami (momenty).

Složená soustava se tak rozpadne na jednotlivé části, u vnitřních vazeb platí princip akce a reakce (jsou v rovnováze).

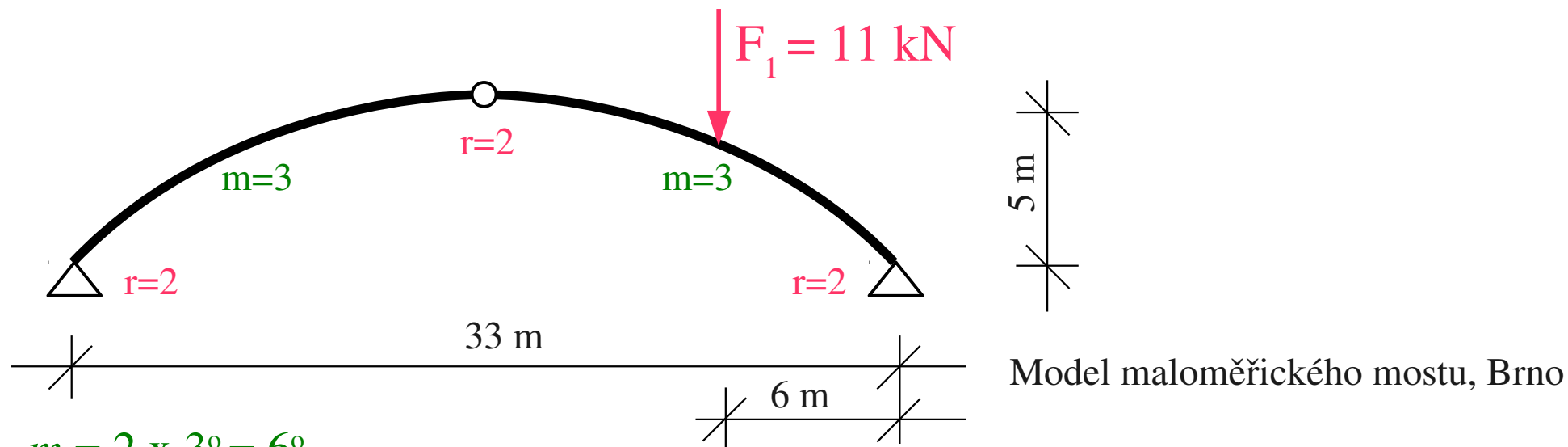


Konstrukce je ve statické rovnováze právě tehdy když je v rovnováze každá její část.

Statické podmínky lze použít na jednotlivých částech i na celé konstrukci.

Počet nezávislých statických podmínek rovnováhy je m , ostatní lze použít ke kontrole (jsou lineárně závislé).

Určete stupně volnosti trojkloubového oblouku, vnější a vnitřní reakce



$$m = 2 \times 3^\circ = 6^\circ$$

$$r = 3 \times 2^\circ = 6^\circ$$

$$s_n = 0^\circ$$

Staticky i kinematicky vnitřně určitá konstrukce.

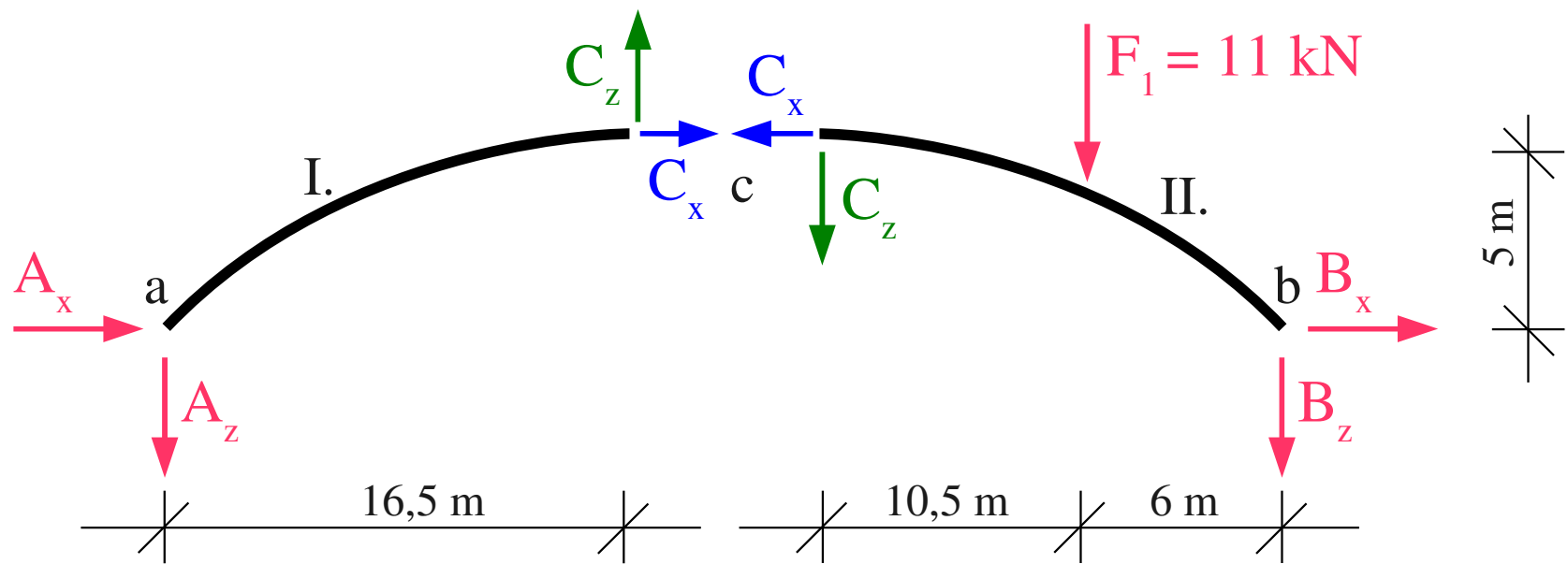
K dispozici 6 podmínek rovnováhy, lze určit všechny vnější i vnitřní reakce pro libovolné zatížení.

$$m_{ext} = 3^\circ$$

$$r_{ext} = 4^\circ$$

Vně staticky neurčitá a kinematicky přeuročitá kce.

K dispozici pouze 3 podmínky rovnováhy, z celku nelze určit jednu reakci (lze ji ovšem určit z reakcí jednotlivých částí).



Celek - vnější podmínky

$$\curvearrowright_a 27F_1 + 33\mathbf{B}_z = 0, \quad \mathbf{B}_z = -9 \text{ kN} \quad (1)$$

$$\curvearrowleft_b 6F_1 + 33\mathbf{A}_z = 0, \quad \mathbf{A}_z = -2 \text{ kN} \quad (2)$$

$$\downarrow \mathbf{K} \quad \mathbf{A}_z + \mathbf{B}_z + 11 = 0 \text{ kN, O.K.}$$

II.

$$\curvearrowright_c 10,5F_1 + 16,5\mathbf{B}_z - 5\mathbf{B}_x = 0, \quad \mathbf{B}_x = -6,6 \text{ kN} \quad (3)$$

$$\rightarrow \mathbf{B}_x - \mathbf{C}_x = 0, \quad \mathbf{C}_x = -6,6 \text{ kN} \quad (4)$$

$$\downarrow \mathbf{C}_z + 11 + \mathbf{B}_z = 0, \quad \mathbf{C}_z = -2 \text{ kN} \quad (5)$$

$$\curvearrowleft_b \mathbf{K} \quad 6F_1 + 5\mathbf{C}_x + 16,5\mathbf{C}_z = 0 \text{ kN, O.K.}$$

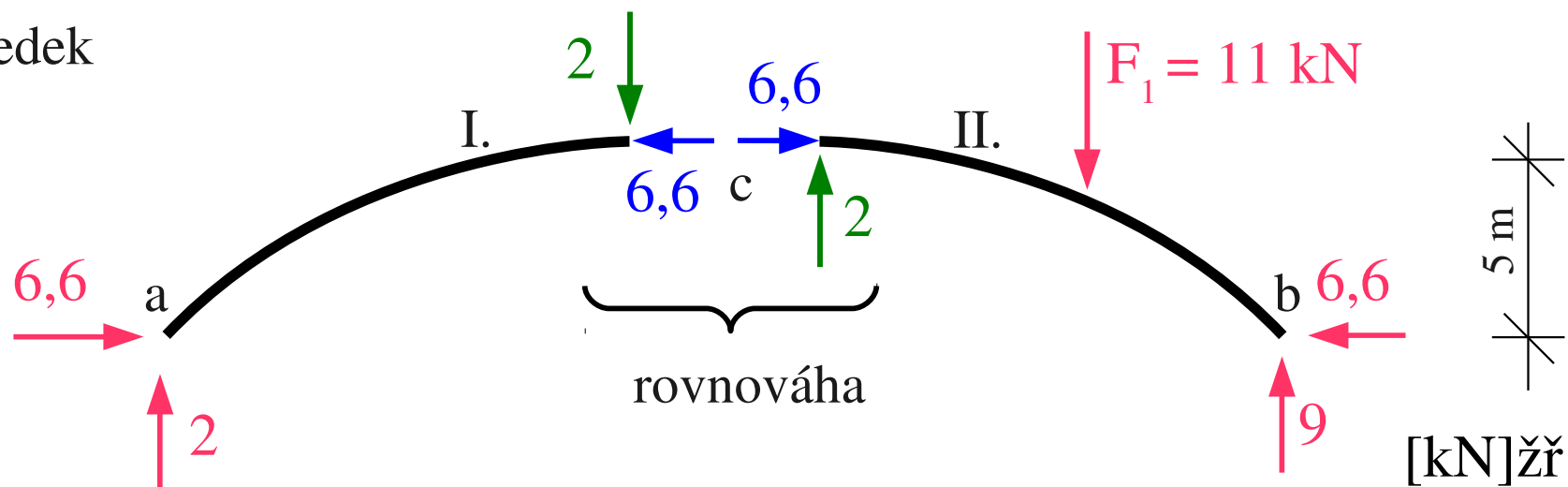
I.

$$\rightarrow \mathbf{A}_x + \mathbf{C}_x = 0, \quad \mathbf{A}_x = 6,6 \text{ kN} \quad (6)$$

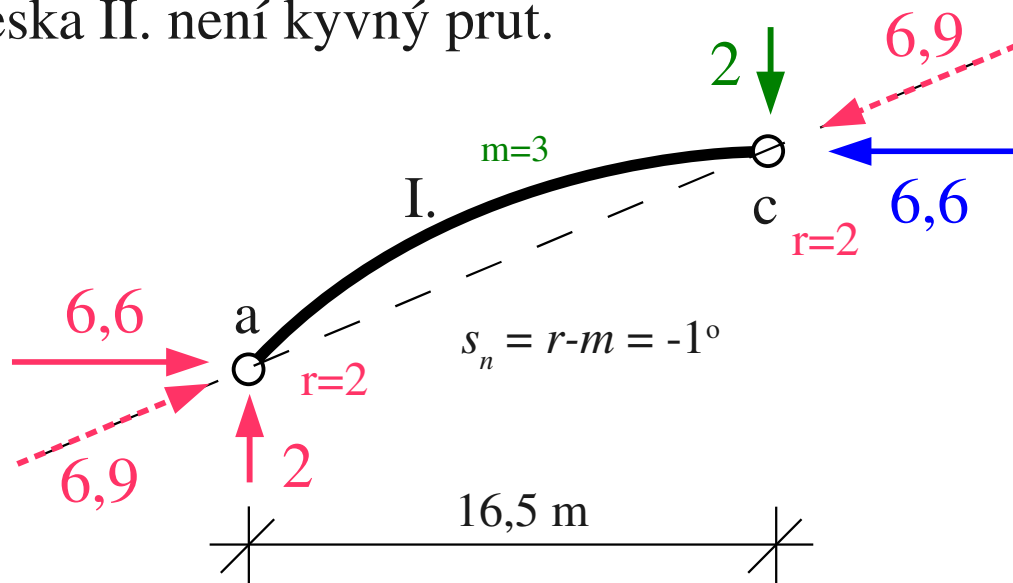
$$\downarrow \mathbf{K} \quad \mathbf{A}_z - \mathbf{C}_z = 0 \text{ kN, O.K.}$$

$$\curvearrowright_a \mathbf{K} \quad 5\mathbf{C}_x - 16,5\mathbf{C}_z = 0 \text{ kN, O.K.}$$

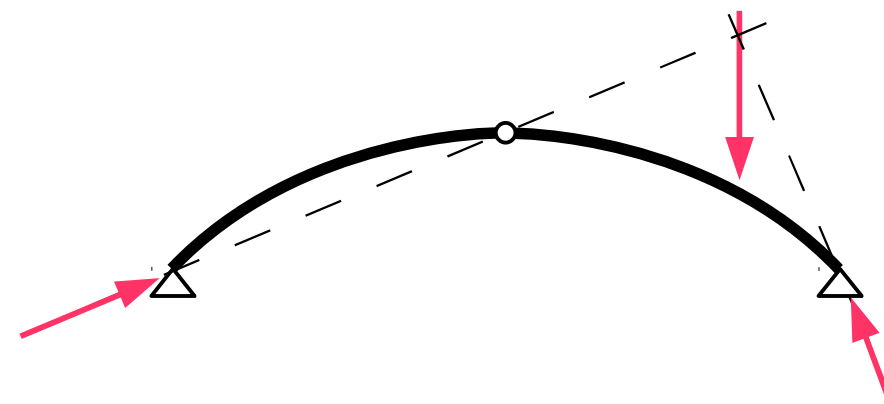
Výsledek



Deska oboustanně kloubově uložena odebírání vždy jeden stupeň volnosti. Protože tuhá deska I. není zatížena vnějším zatížením chová se jako kyvný prut. Z momentové podmínky k bodu a a c vyplývá, že paprsek reakcí musí procházet oběma klouby. Deska II. není kyvný prut.

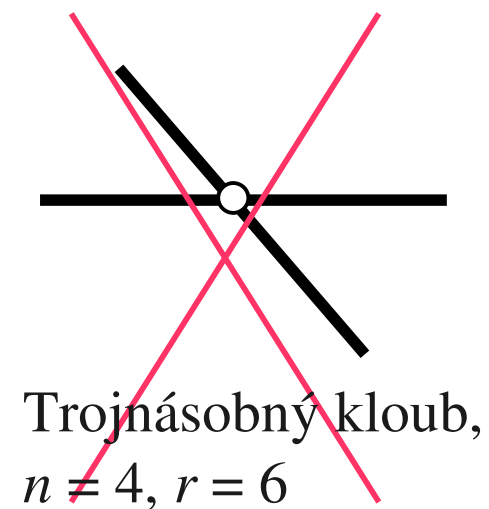
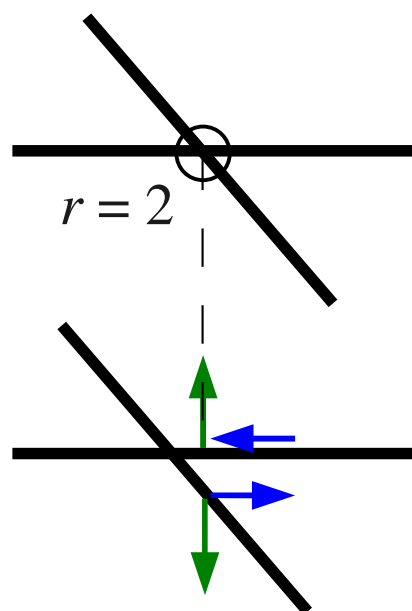
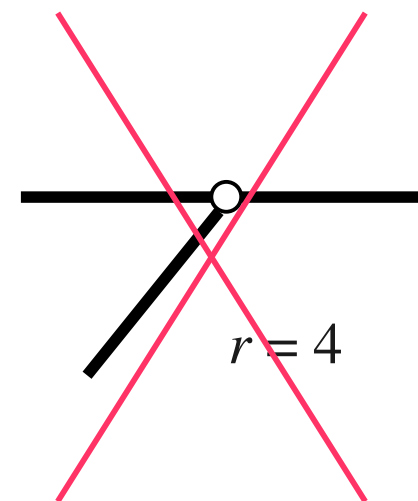
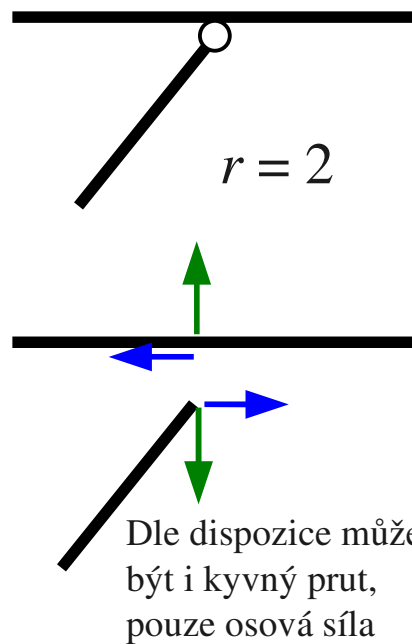


Další kontrola plyne z podobnosti trojúhelníků $2/6,6 = 5/16,5$



Z věty o rovnováze třech sil plyne toto grafické řešení (rychlý odhad směru a velikosti reakcí)

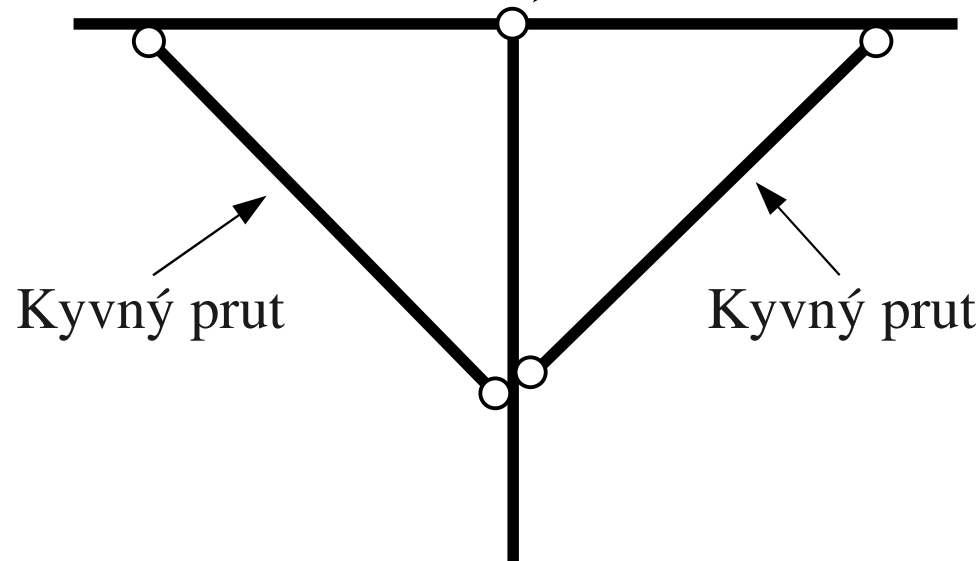
Příklady tesařských kloubů a zavedení reakcí





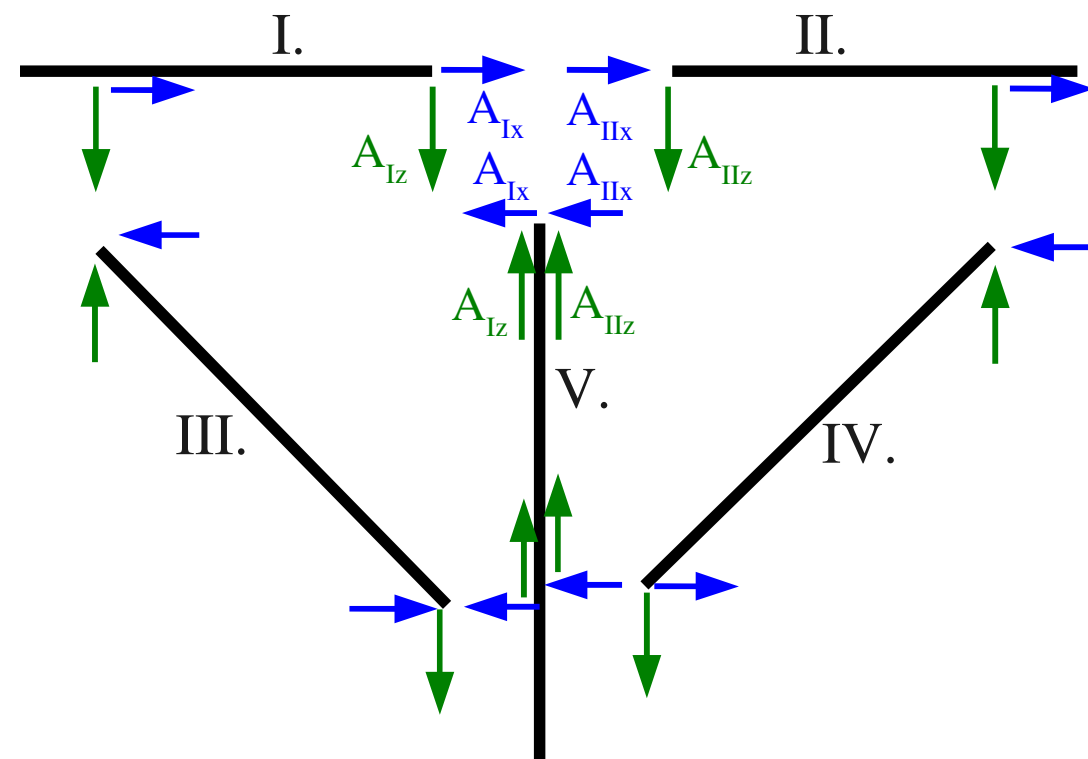
Dvojnásobný kloub, $n = 3$, $r = 4$

4 neznámé reakce

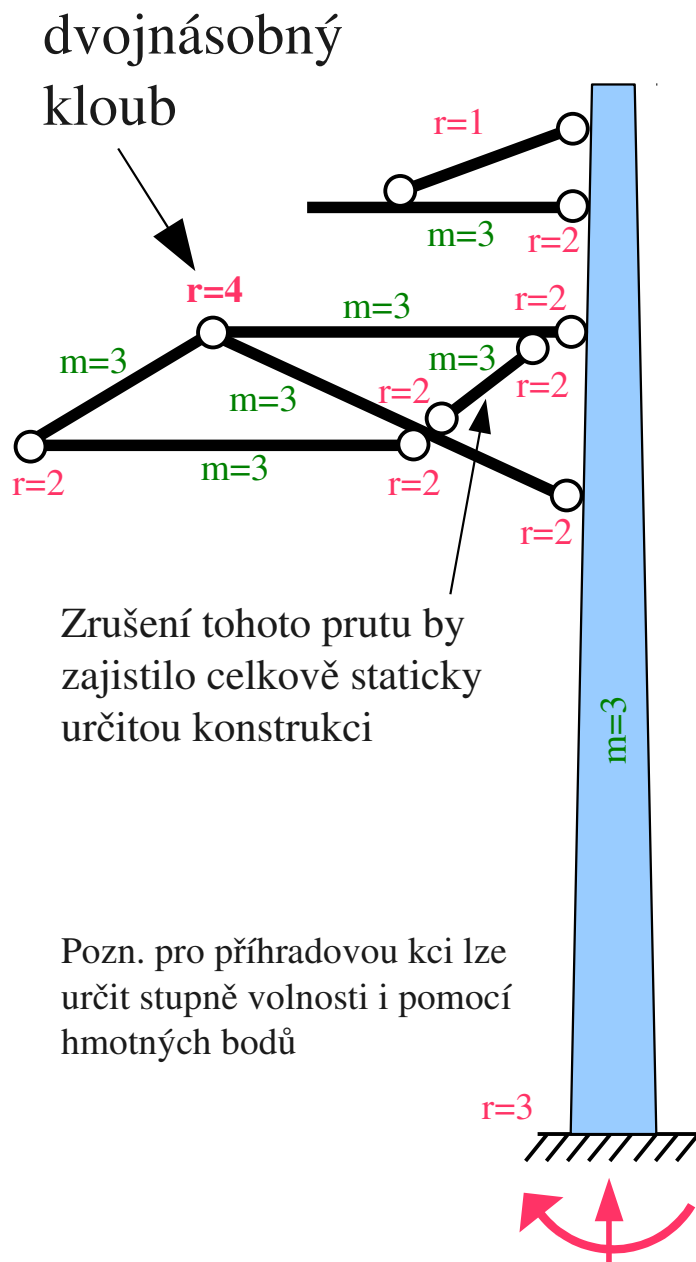


Ve dvojnásobném kloubu zavedeme nejlépe pouze čtyři neznámé namísto šesti (redukce vlivem dvou silových podmínek rovnováhy)

! V kloubu je vždy nulový moment !
(mimo zadané momentové zatížení působící přímo v kloubu), častá kontrola výsledků z počítače



Určete stupně volnosti a reakce



$$m = 7 \times 3^\circ = 21^\circ$$

$$r = 3^\circ + 4^\circ + 7 \times 2^\circ + 1^\circ = 22^\circ$$

$$s_n = 1^\circ$$

Celkově 1x staticky neurčitá kce.

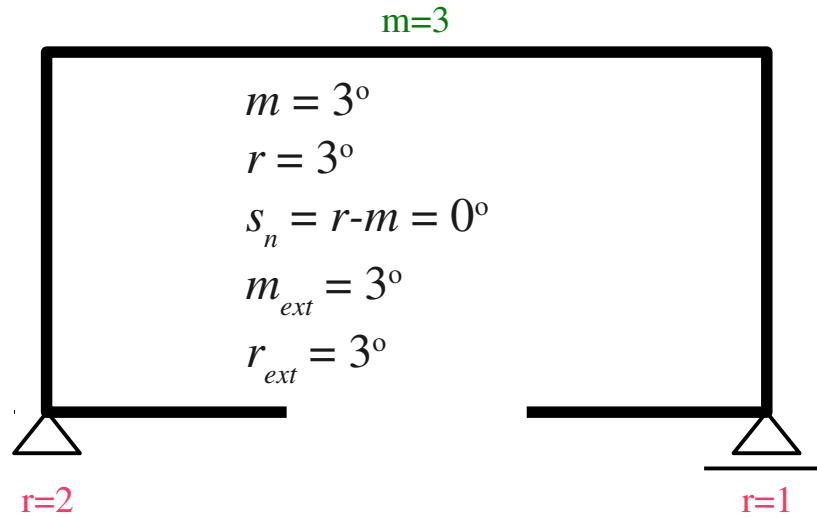
$$m_{ext} = 3^\circ$$

$$r_{ext} = 3^\circ$$

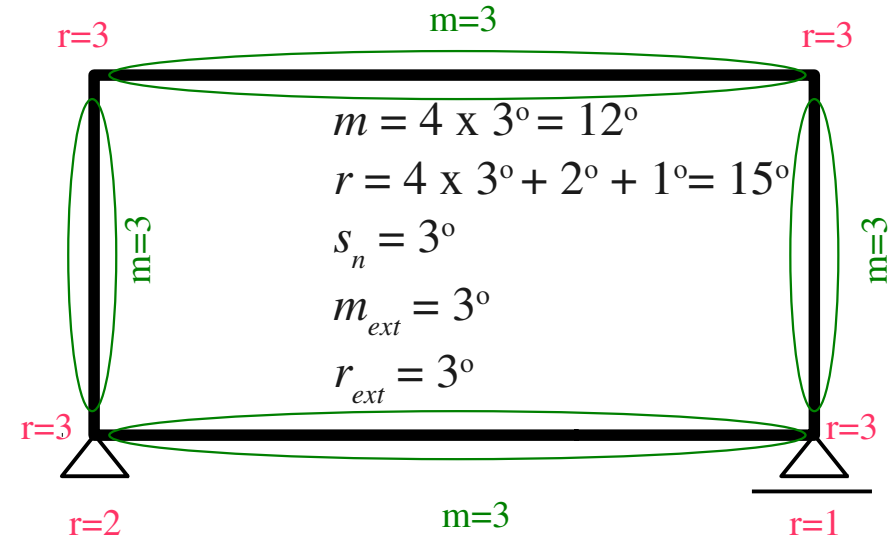
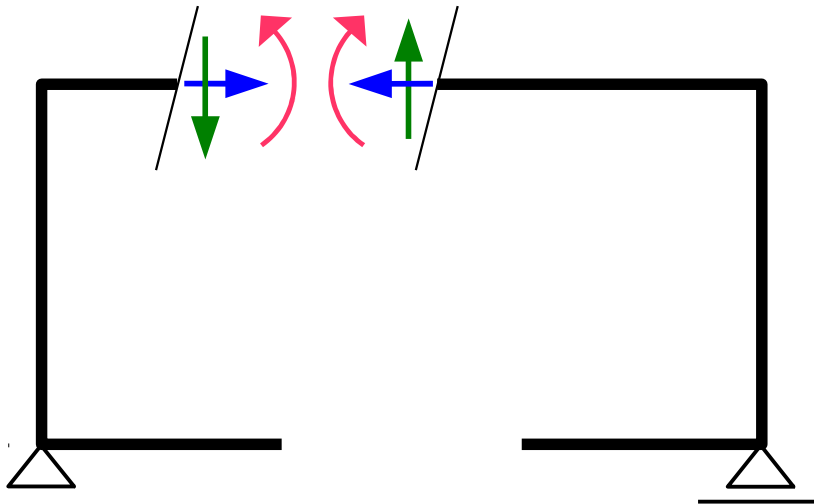
Vně staticky určitá, lze určit tři reakce ve vetknutí.

Vnitřní vetknutí

Uvažujme prutový otevřený a uzavřený rám

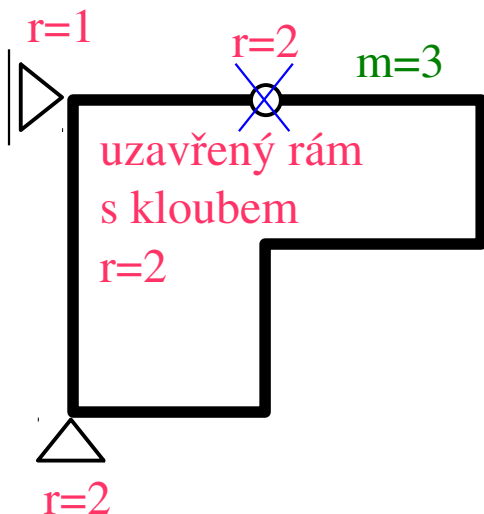


Statically určitá konstrukce, lze určit reakce i vnitřní síly na kterémkoli řezu na rámu



Lze určit reakce, k určení vnitřních sil nestačí pouze tři statické podmínky rovnováhy, **3x staticky vnitřně neurčitá konstrukce**

Určete stupeň statické určitosti

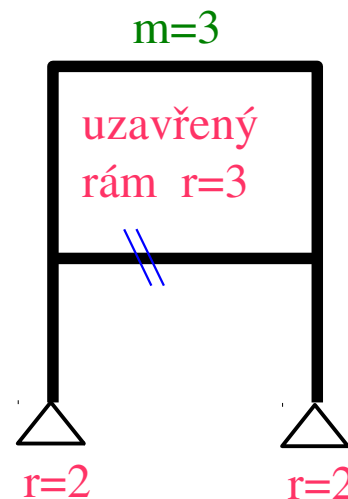


$$m = 3^\circ$$

$$r = 3 + 2 = 5^\circ$$

$$s_n = r - m = 2^\circ$$

2x stat. neurčitá
(vně stat. určitá)

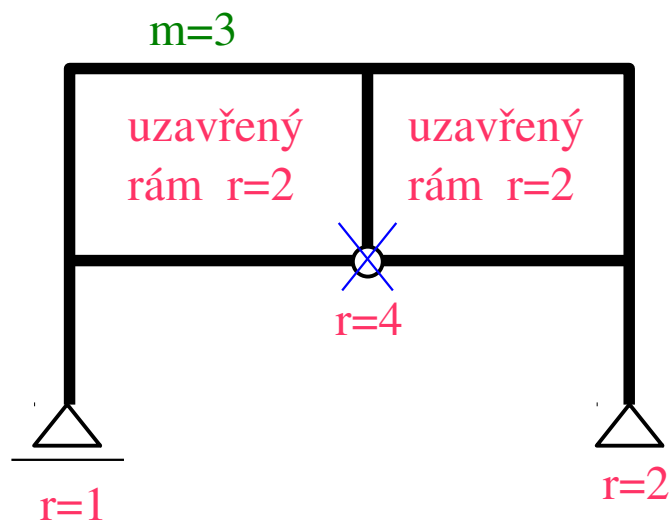


$$m = 3^\circ$$

$$r = 2 + 2 + 3 = 7^\circ$$

$$s_n = r - m = 4^\circ$$

4x stat. neurčitá

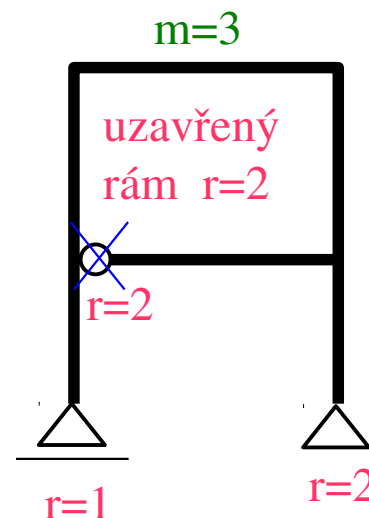


$$m = 3^\circ$$

$$r = 3 \times 2 + 1 = 7^\circ$$

$$s_n = r - m = 4^\circ$$

4x stat. neurčitá
(vně stat. určitá)

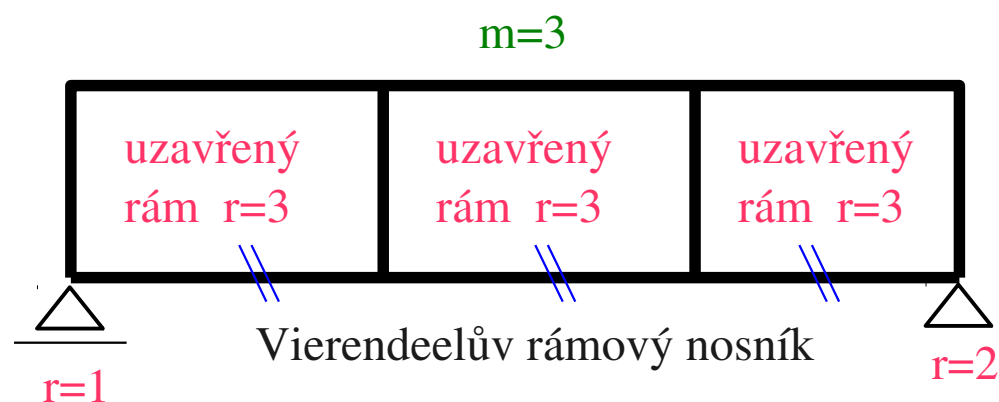


$$m = 3^\circ$$

$$r = 1 + 2 + 2 = 5^\circ$$

$$s_n = r - m = 2^\circ$$

2x stat. neurčitá
(vně stat. určitá)

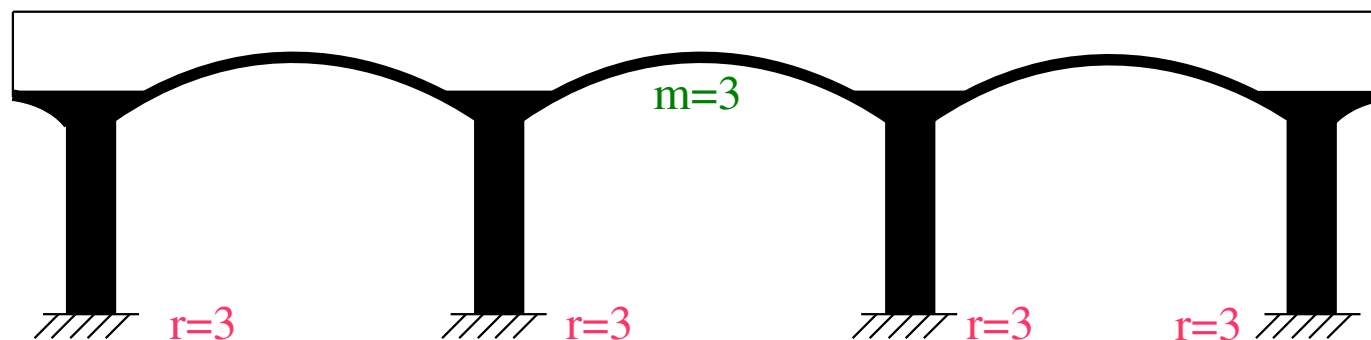


$$m = 3^\circ$$

$$r = 1 + 2 + 3 \times 3 = 12^\circ$$

$$s_n = r - m = 9^\circ$$

9x stat. neurčitá



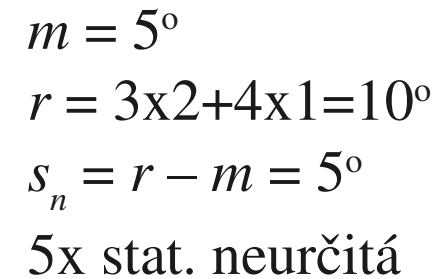
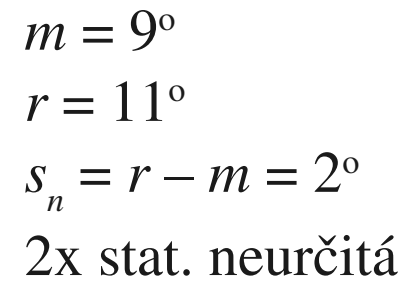
$$m = 3^\circ$$

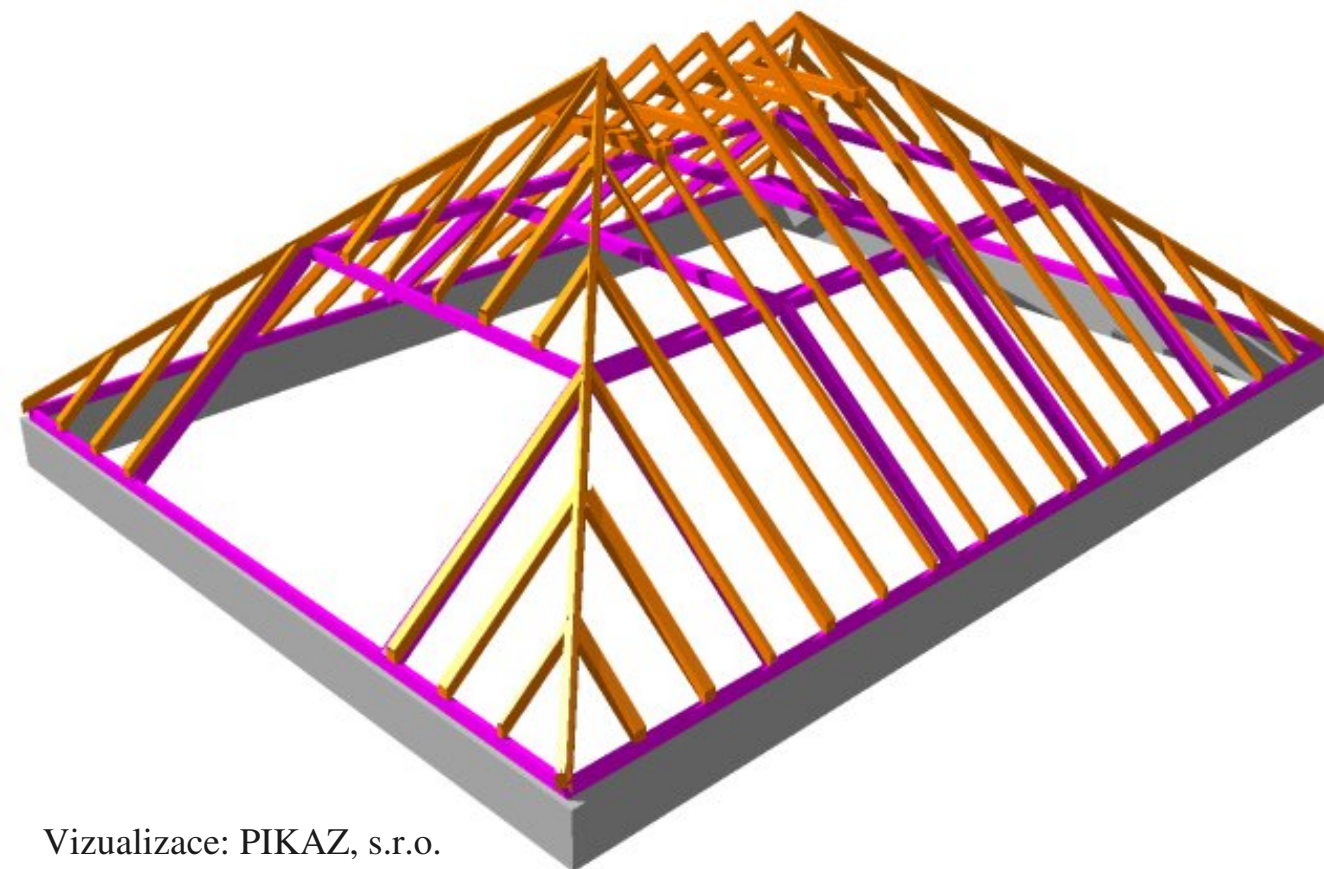
$$r = 4 \times 3 = 12^\circ$$

$$s_n = r - m = 9^\circ$$

9x stat. neurčitá

Obloukový most o třech polích s tuze vetknutými pilíři a opěrami





Vizualizace: PIKAZ, s.r.o.

Netypický krov je tvořen dřevěnými prvky (krokve, kleštiny, námětky) a ocelovou prostorovou fialovou konstrukcí.

Zjednodušeně můžeme uvažovat ocelové vaznice jako prostorový rám uložený kloubově.

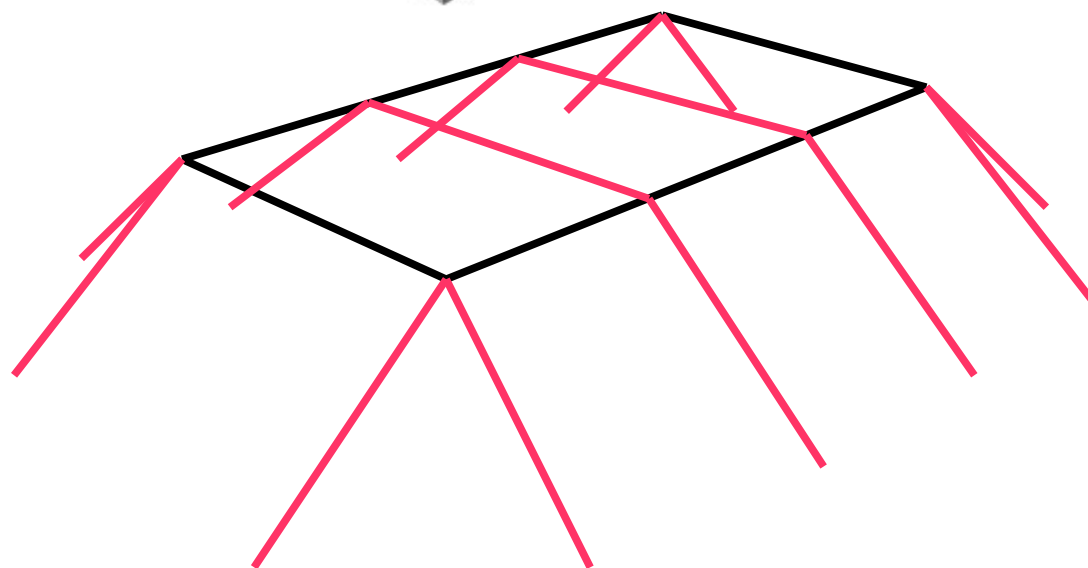
Tři uzavřené rámy. Jeden uzavřený rám (zatížený obecně ve 3D) je vnitřně 6x staticky neurčitý

$$m=6^{\circ}$$

$$r=3 \times 6^{\circ} + 12 \times 3^{\circ}=54^{\circ}$$

$$s_n=48^{\circ}$$

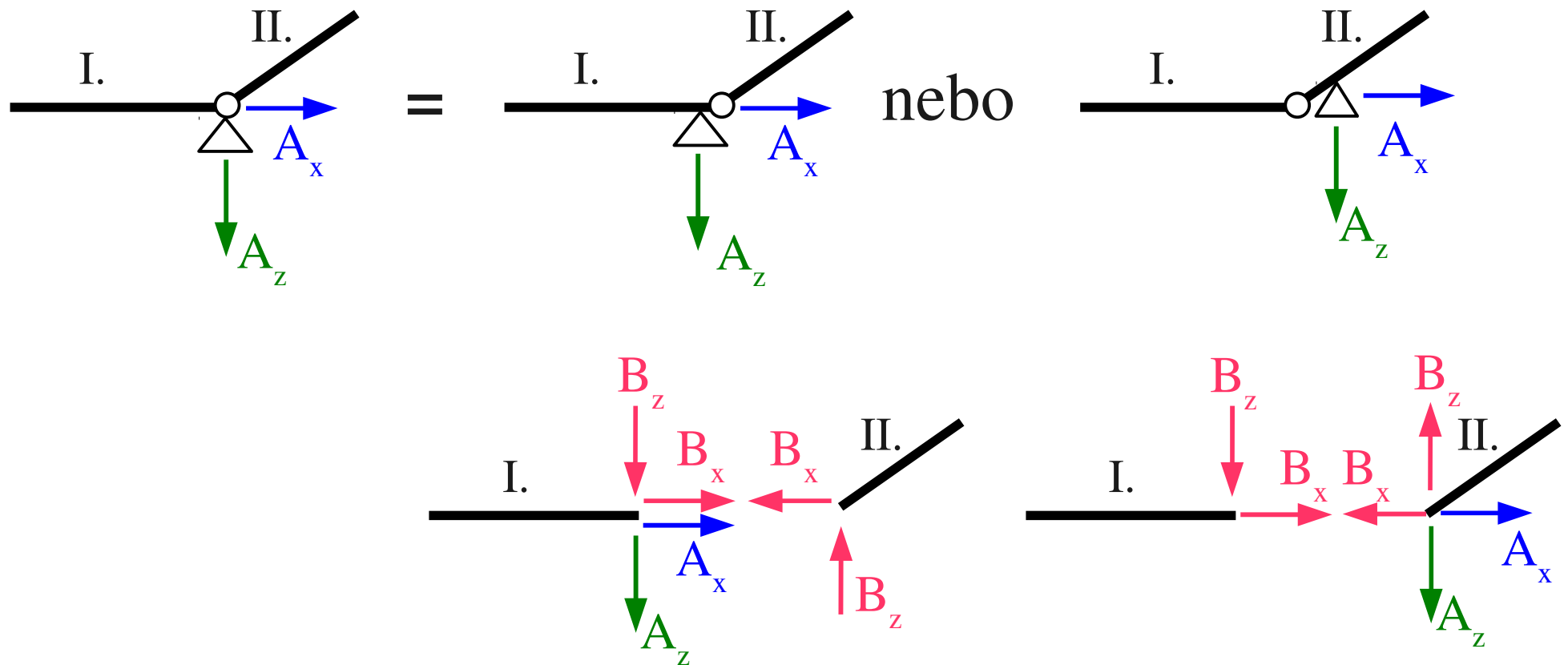
Konstrukce je 48x staticky neurčitá.



Více vazeb v jednom místě

Vazbu je možné přiřadit ke kterémukoli prutu.

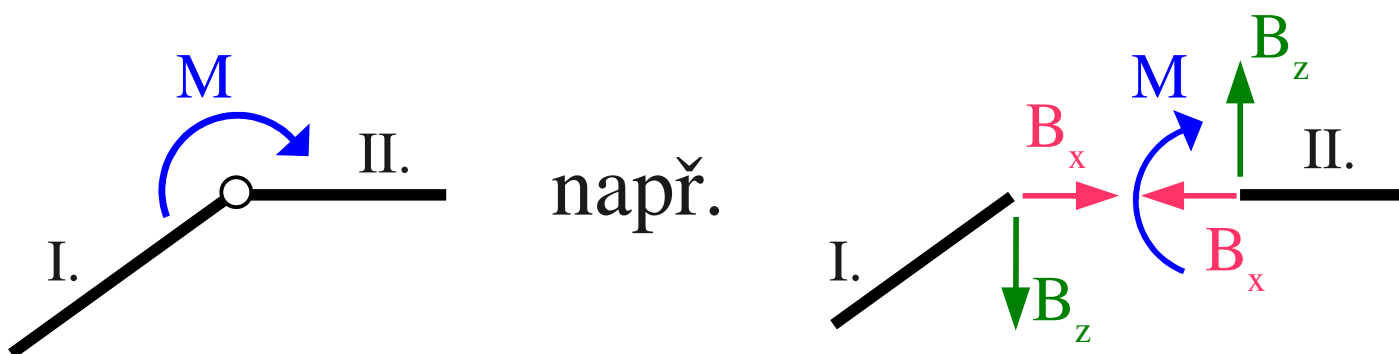
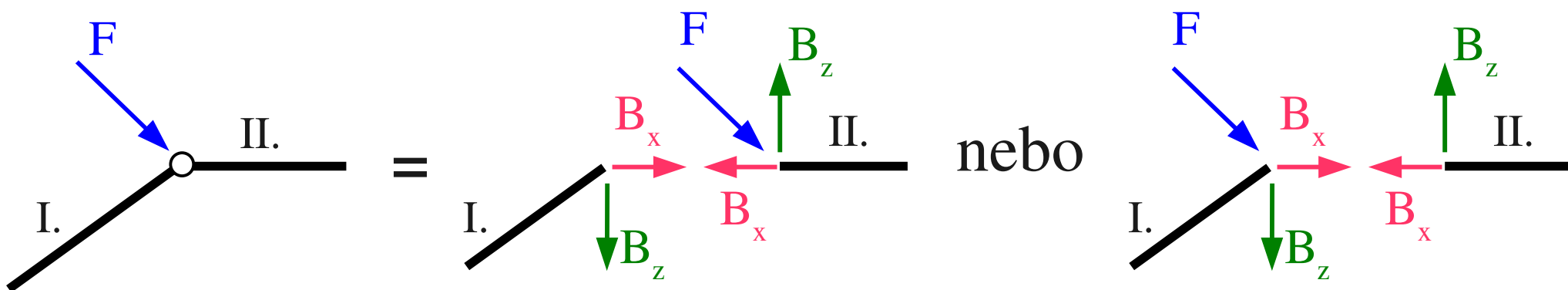
Volba ovlivní síly v kloubu, proto pro detailní výpočet sil ve spoji je nutné zavést reakce dle detailu vazby.



Zatížená vazba

Vnější sílu či moment lze přiřadit libovolnému okraji sousední desky

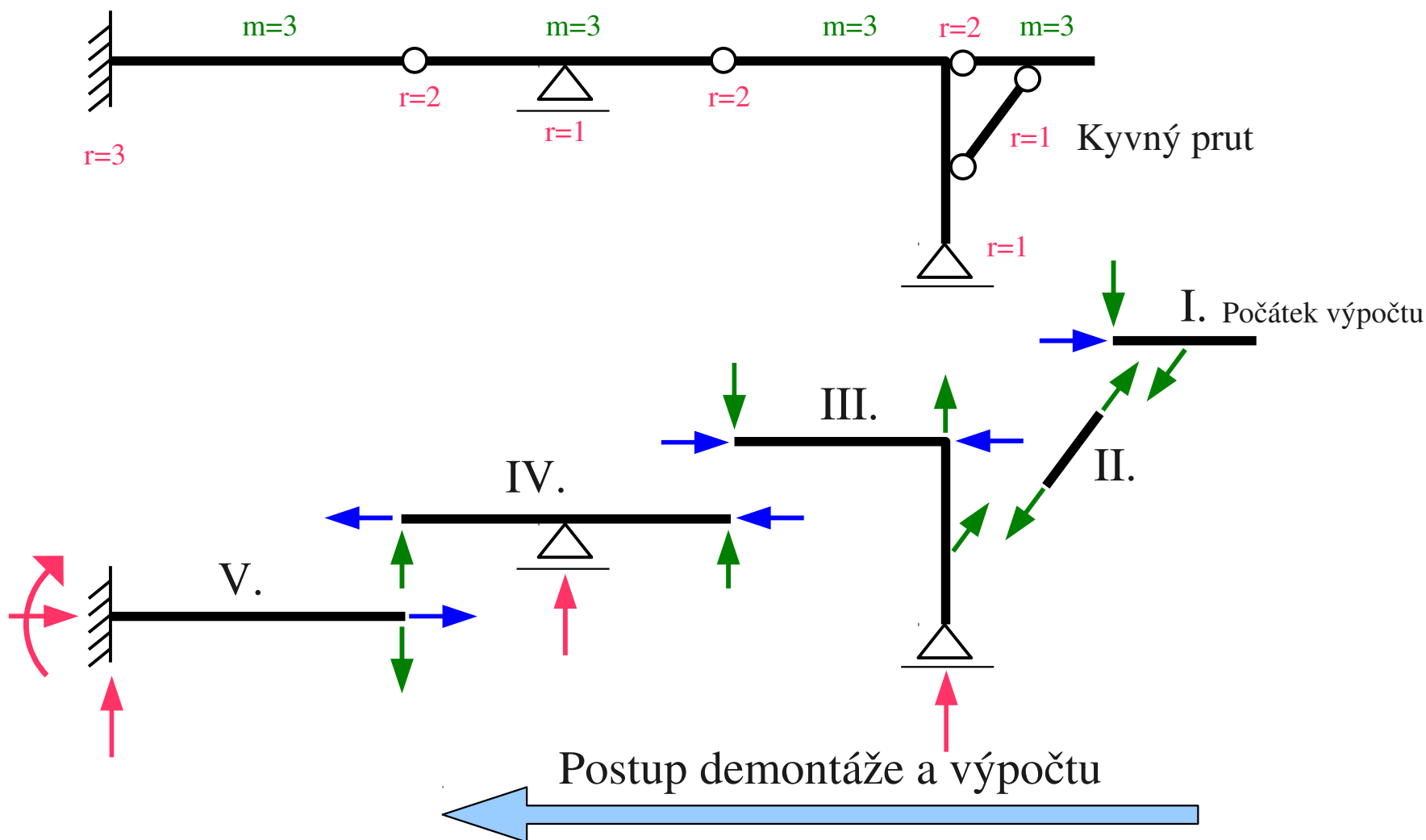
Volba ovlivní síly v kloubu, nikoliv však vnitřní síly na deskách či reakce



Nezapomenout M
v momentové
podmínce okolo
kloubu na desce II.

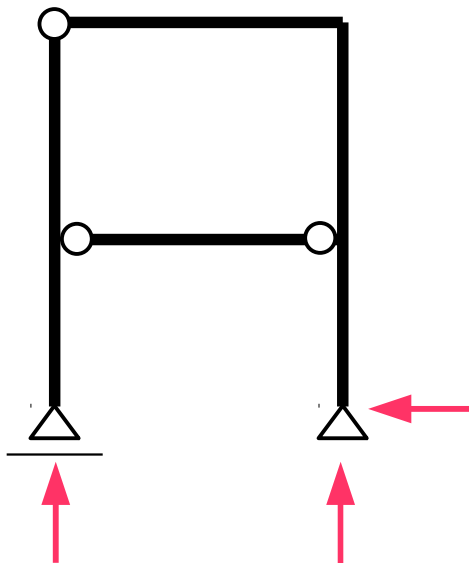
Vybrané postupy řešení reakcí staticky určitých složených soustav

Většina složených konstrukcí je tvořena nosnou částí a ostatní části se o ní opírají. Opírající se části lze vyjmout a určit na nich reakce. Postup výpočtu odpovídá postupu demontáže, kdy nesmí dojít ke zhroucení ostatních částí.

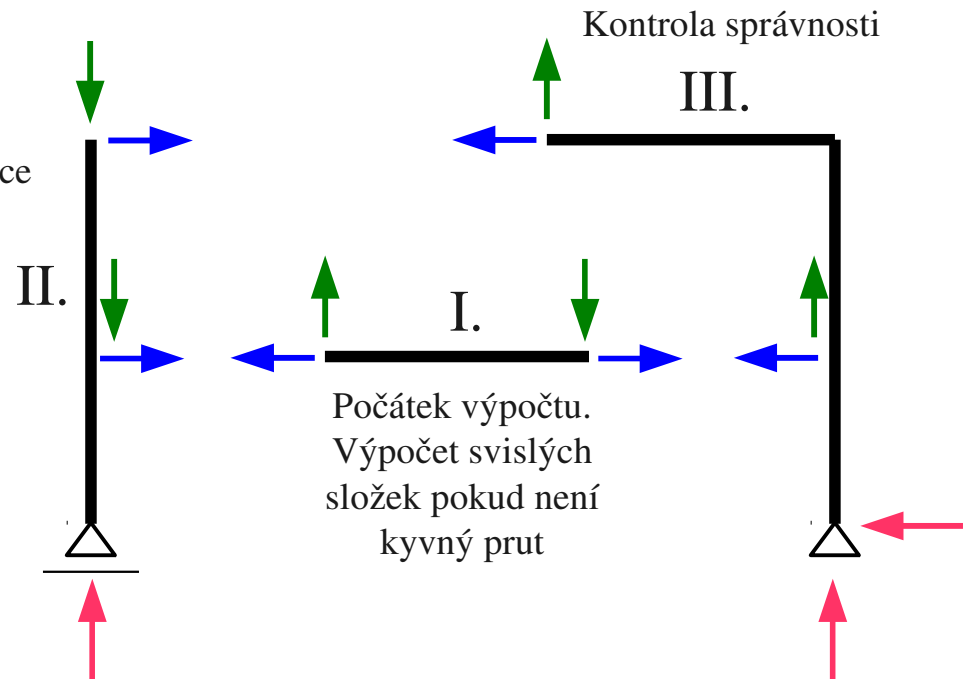


Konstrukci nelze rozdělit na nosnou a nesenou část. Z celku lze určit alespoň některé reakce a ostatní dopočítat z jednotlivých částí. Poslední část slouží obvykle ke kontrole správnosti.

Nejprve určení reakcí na celku

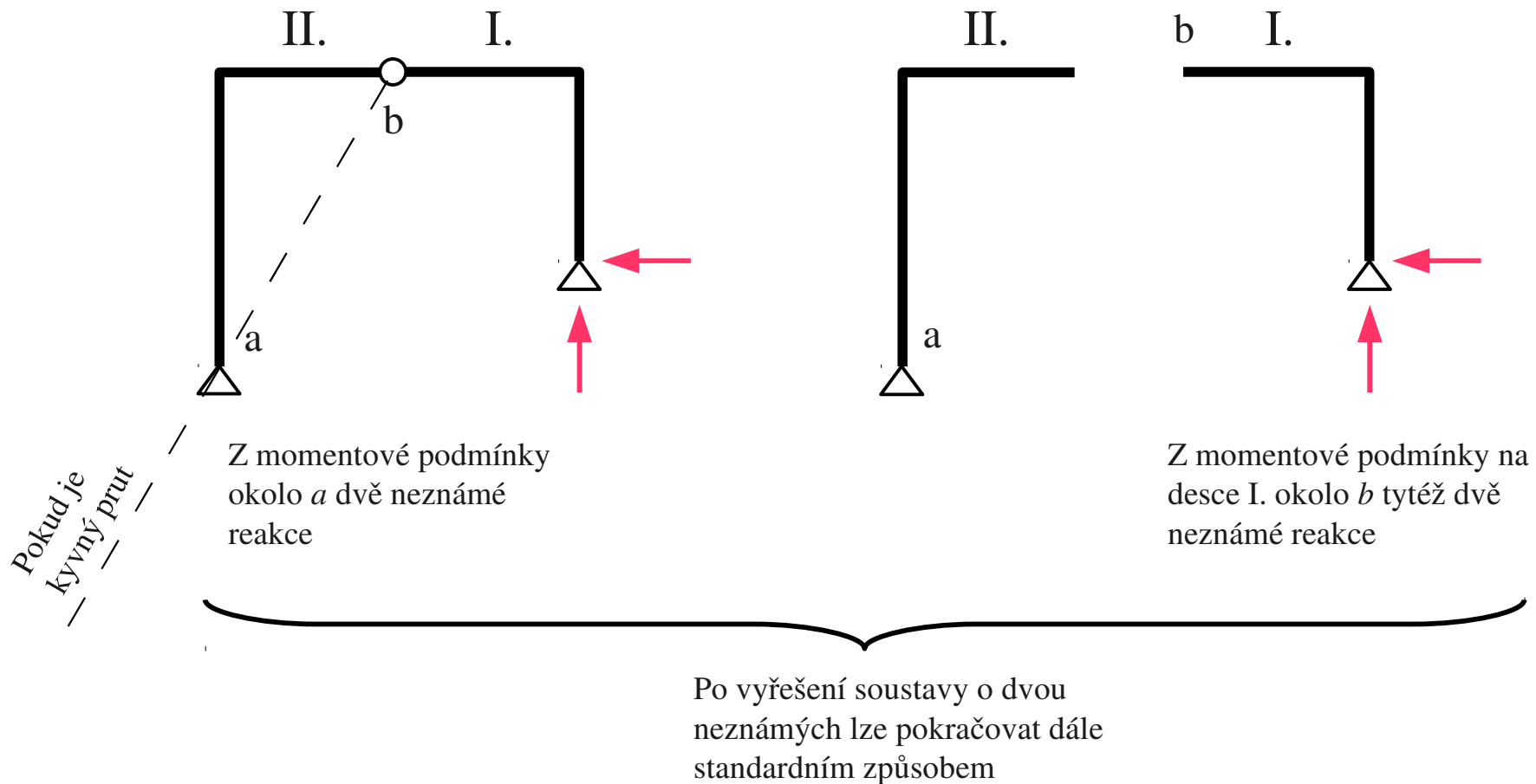


Dopočítat 3 reakce

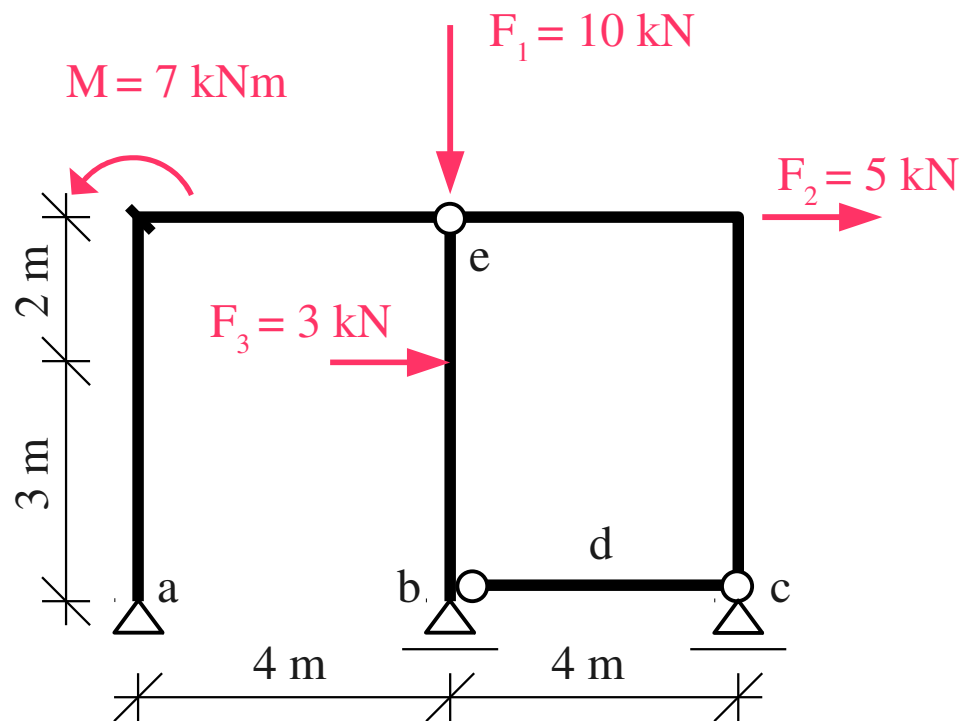


Pro případ trojkloubé deskové soustavy s nestejnou výší podpor vede řešení na soustavu dvou rovnic

Pokud ovšem víme, že část konstrukce je kyvný prut, lze řešit bez soustavy, tj. je známý směr reakce v podpoře



Určete vnitřní a vnější reakce

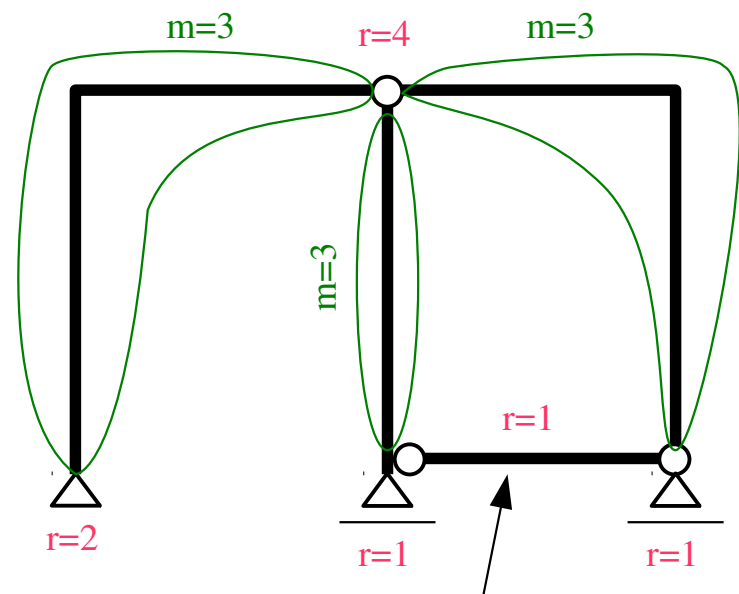


Trojkloubový rám s táhlem



Téměř nesená část

Stupeň statické určitosti

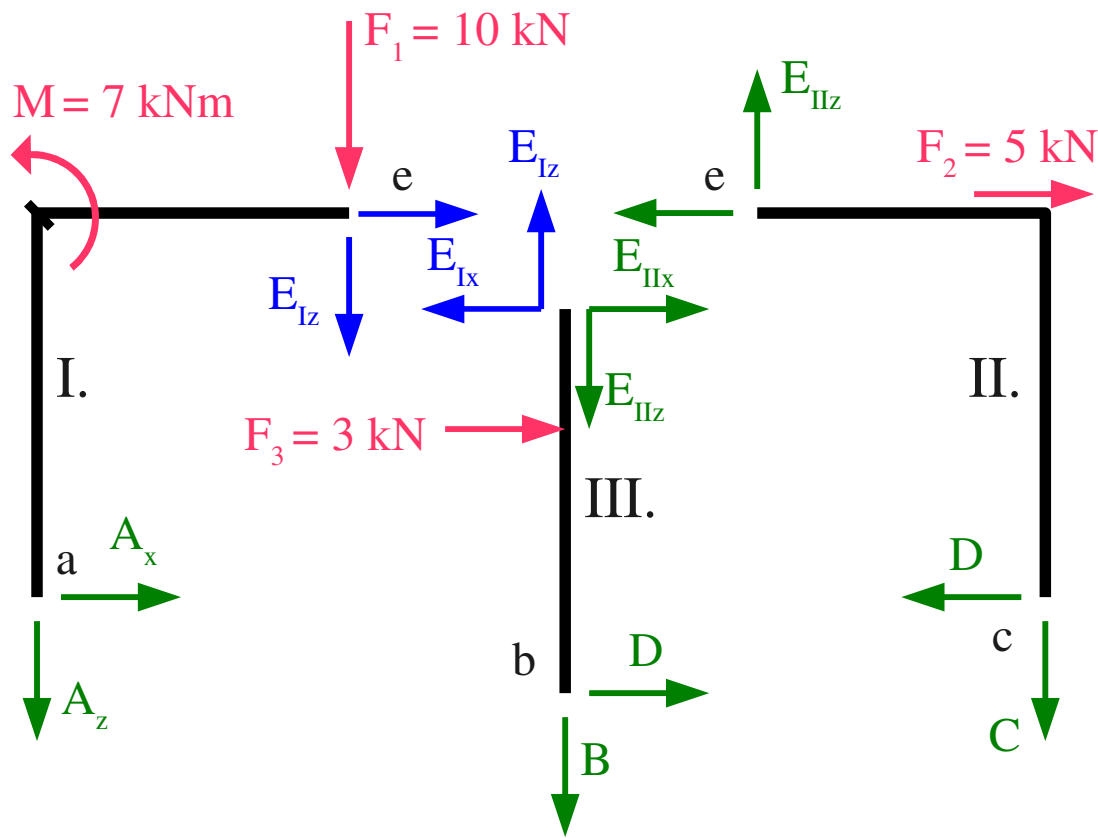


Kyvný prut odebírá jeden stupeň volnosti

$$m = 3 \times 3^\circ = 9^\circ$$

$$r = 4 + 2^\circ + 3 \times 1^\circ = 9^\circ$$

$$s_n = 0^\circ$$



$$\rightarrow C: A_x + 3 + 5 = 0, \quad (1)$$

$$A_x = -8 \text{ kN}$$

$$\curvearrowleft e: 7 + 5 A_x + 4 A_z = 0, \quad (2)$$

$$A_z = 8,25 \text{ kN}$$

$$\downarrow I: A_z + E_{Iz} + 10 = 0, \quad (3)$$

$$E_{Iz} = -18,25 \text{ kN}$$

$$\rightarrow I: A_x + E_{Ix} = 0, \quad E_{Ix} = 8 \text{ kN} \quad (4)$$

$$\curvearrowleft a: KI: -7 + 4 \cdot 10 + 5 E_{Ix} + 4 E_{Iz} = 0 \text{ kN}$$

$$\curvearrowleft b: III: 3 \cdot 3 - 5 E_{Ix} + 5 E_{IIx} = 0, \quad E_{IIx} = 6,2 \text{ kN} \quad (5)$$

$$\rightarrow III: D + F_3 - E_{Ix} + E_{IIx} = 0, \quad D = -1,2 \text{ kN} \quad (6)$$

$$\leftarrow KII: E_{IIx} - 5 + D = 0 \text{ kN}, \text{ O.K.}$$

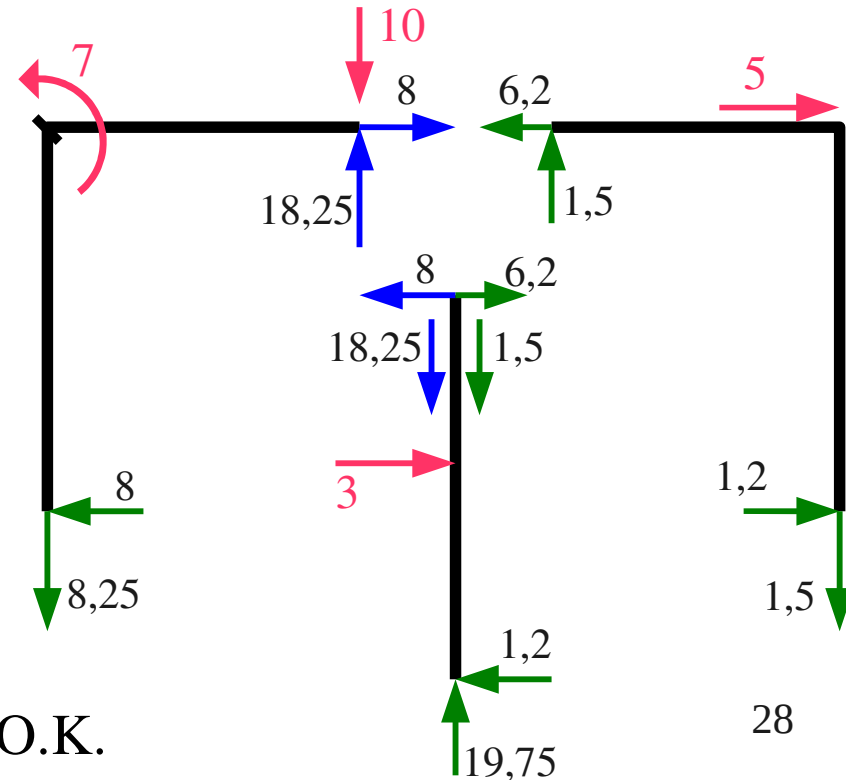
$$\curvearrowleft c: II: -4 E_{IIz} + 5 E_{IIx} - 5 \cdot 5 = 0, \quad E_{IIz} = 1,5 \text{ kN} \quad (7)$$

$$\uparrow II: E_{IIz} - C = 0, \quad C = 1,5 \text{ kN} \quad (8)$$

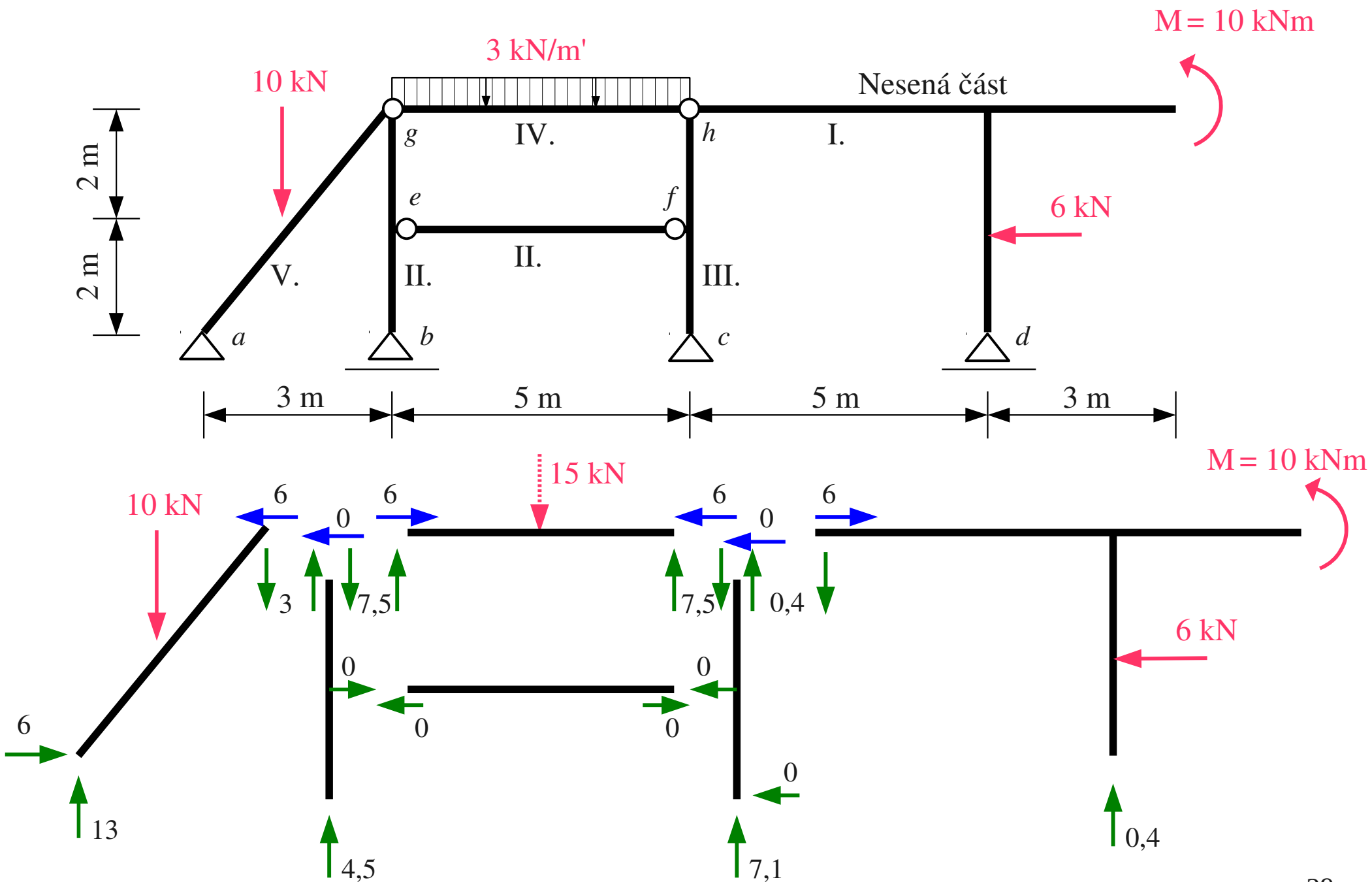
$$\curvearrowleft e: KII: 4 C + 5 D = 0 \text{ kN}, \text{ O.K.}$$

$$\downarrow C: A_z + 10 + B + C = 0, \quad B = -19,75 \text{ kN} \quad (9)$$

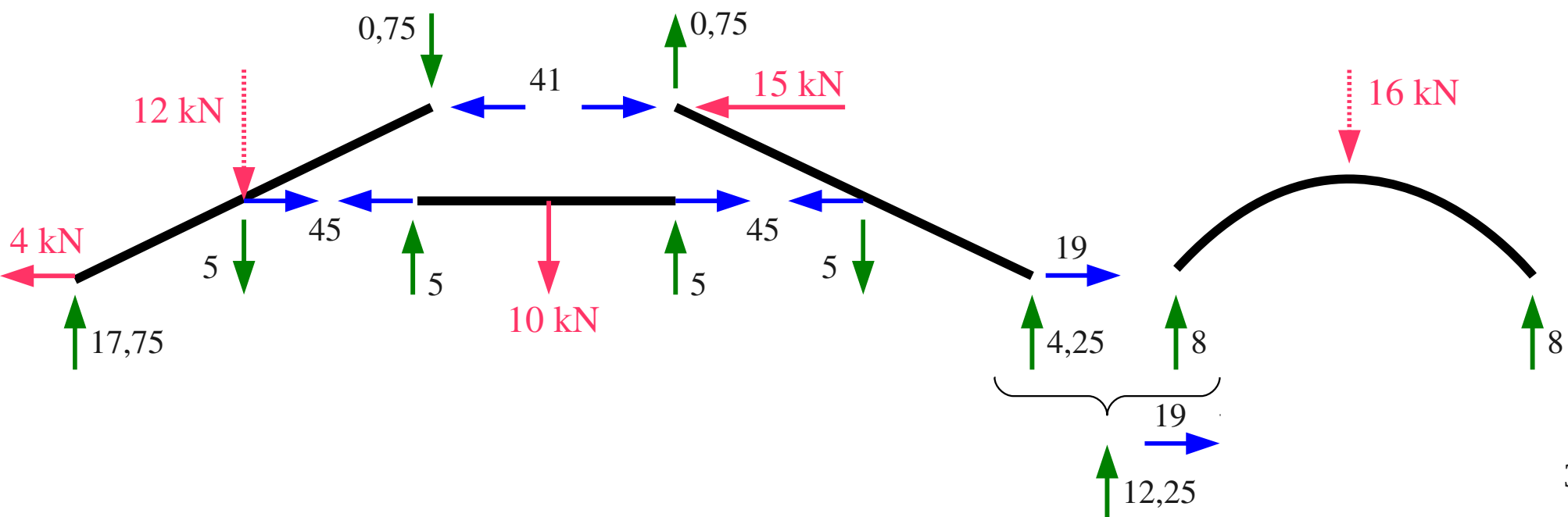
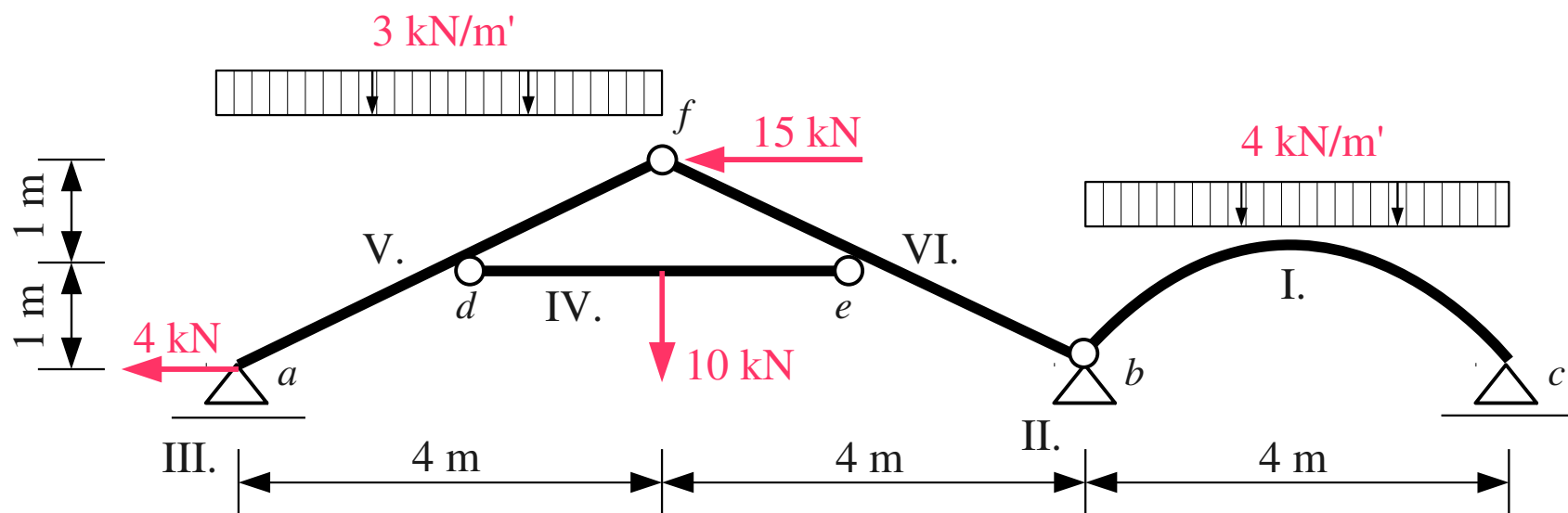
$$\curvearrowleft a: KC: -7 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 3 + 4 B + 5 \cdot 5 + 8 C = 0 \text{ kN}, \text{ O.K.}$$



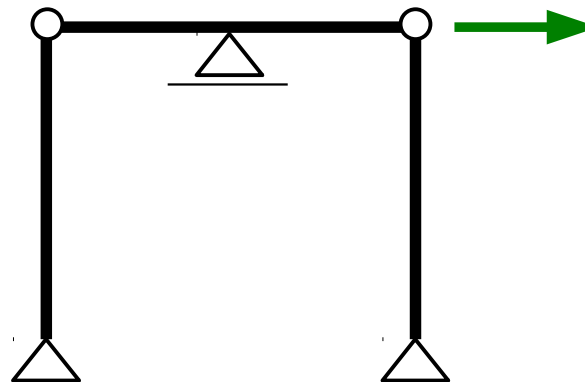
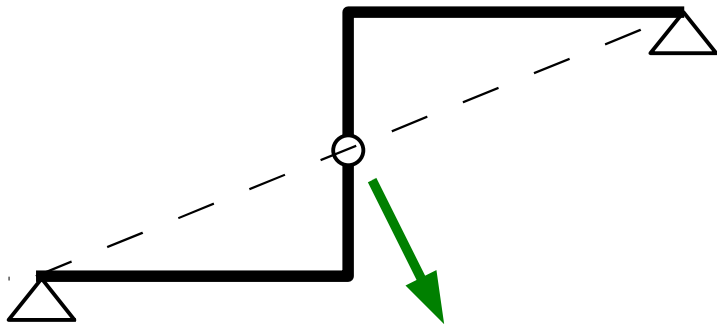
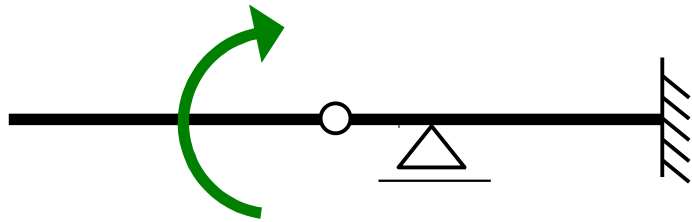
Určete reakce a síly v kloubech



Určete reakce a síly v kloubech



Výjimkové případy ($s_n = 0$)

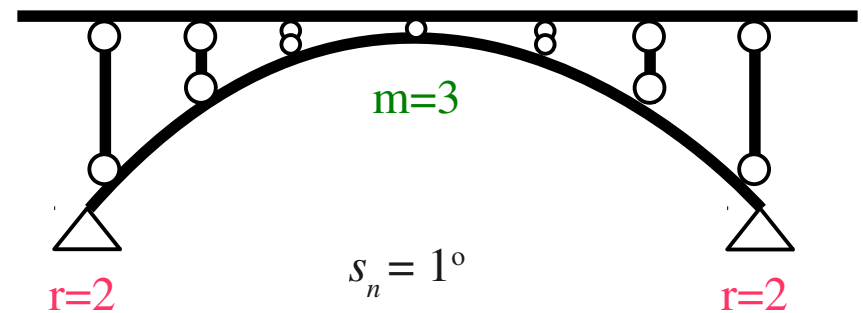


Otázky k zamyšlení

Které reakce lze vypočítat z podmínek rovnováhy na dvojklobovém ocelovém oblouku ?



Žďákovský most, rozpětí ocelového oblouku 330 m (3100 t), vzepětí 42,5 m, 1967



Dvojklobový oblouk, 1x staticky neurčitá konstrukce

Z podmínek rovnováhy lze spočítat pouze svislé reakce a to díky stejné výšce podpor.

Přednášky z předmětu SM1, Stavební fakulta ČVUT v Praze

Autor Vít Šmilauer

Náměty, připomínky, úpravy, vylepšení zasílejte prosím na

vit.smilauer@fsv.cvut.cz

Created 11/2007 in OpenOffice 2.3, ubuntu linux 6.06

Last update Feb 21, 2011