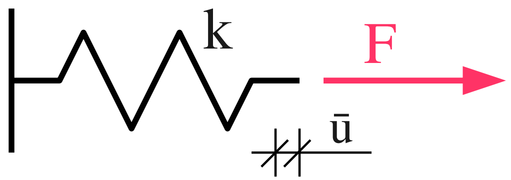
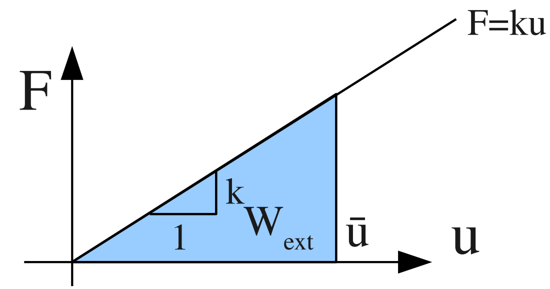
Princip virtuálních prací (PVP)

- Zatěžujme pružinu o tuhosti *k* silou *F*





- Energie pružné deformace W_{ext} (skalár) je definována jako součin konstantní síly a posunu. Protože se zde síla během posunu mění, je nutné provést integraci po dráze zatížení

$$W = W_{int} = W_{ext} = \int_0^{\bar{u}} \vec{F}\, d\vec{u} = \int_0^{\bar{u}} F\, du = \int_0^{\bar{u}} ku\, du = \frac{1}{2} k \bar{u}^2 = \frac{1}{2} F \bar{u} \quad [J = Nm]$$

- Zde je síla vždy v rovnováze s účinkem pružiny, <u>vnější práce</u> síly je shodná s <u>vnitřní energií</u> pružiny. Na rovnováhu lze tedy pohlížet také energeticky.

- V PVP zavádíme virtuální veličiny. <u>Virtuálním posunem</u> δu rozumíme velmi malý (infinitezimální) posun, který není v rozporu s vazbami soustavy. Virtuální posun nezávisí na skutečném zatížení F.

- <u>Virtuální síla</u> δF je myšlená (fiktivní) síla, kterou libovolně umístíme na soustavu. Virtuální síla nezávisí na skutečných posunech soustavy u.

- Podle výpočtu virtuální práce δW rozeznáváme dva principy
  - **Princip virtuálních přemístění** (PVp, Lagrangeův princip), práce skutečných sil $\vec{F}$ na virtuálních přemístěních $\delta\vec{u}$

$$\text{Tuhá tělesa} \qquad \delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{u}$$

$$\text{Pružná tělesa} \qquad \delta W = \underbrace{\int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^{T} \mathbf{F} \, \mathrm{d}\Gamma + \cancel{\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^{T} \mathbf{b} \, \mathrm{d}\Omega}}_{\text{Vnější virtuální práce}} - \underbrace{\cancel{\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{T} \boldsymbol{\sigma} \, \mathrm{d}\Omega}}_{\text{Vnitřní virtuální práce}}$$

    - Použití: metoda konečných prvků, deformační metoda, kinematická metoda výpočtu reakcí staticky a kinematicky určitých soustav
  - **Princip virtuálních sil** (PVs, Castiglianův princip), práce virtuálních sil na skutečných přemístěních

$$\delta W = \vec{u} \cdot \delta \vec{F}$$

    - Použití: výpočet přetvoření konstrukcí, silová metoda

Nemá fyzikální význam – virtuální síly i posuny však mohou být libovolné

- Pro <u>tuhá</u> tělesa lze skutečnou a virtuální práci zapsat

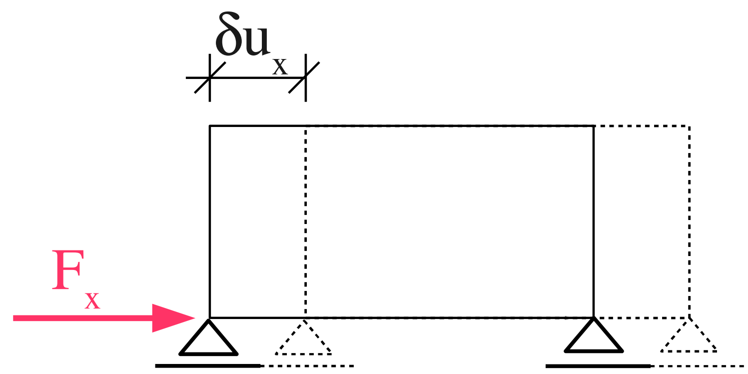
$$W + \delta W = (\vec{F} + \delta \vec{F}) \cdot (\vec{u} + \delta \vec{u}) = \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{u}}_{W} + \underbrace{\vec{F} \cdot \delta \vec{u} + \vec{u} \cdot \delta \vec{F} + \delta \vec{F} \cdot \delta \vec{u}}_{\delta W}$$

Skutečná síla
Skutečné přemístění (nulové u staticky určitého podepření)

Skutečná síla
Virtuální libovolné přemístění

Skutečné přemístění
Virtuální libovolná síla

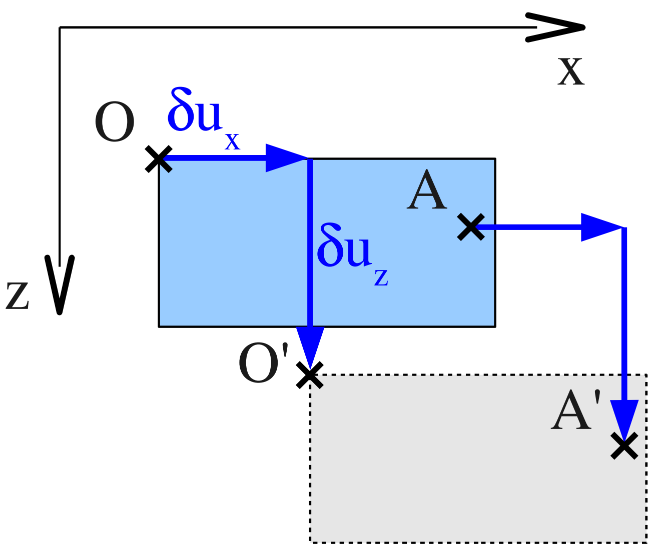
- Dále uvažujme PVp na tuhých tělesech. Libovolná virtuální přemístění $\delta\vec{u}$ na skutečných silách $\vec{F}$ vyvolají virtuální práci $\delta W = \vec{F}\cdot\delta\vec{u}$. Je nutné vytvořit kinematicky neurčitou soustavu, aby virtuální přemístění nebyla v rozporu s vazbami. Postupujeme stejně jako u výpočtu reakcí – zrušenou vazbu nahradíme silou



$$\delta W = F_x\,\delta u_x$$

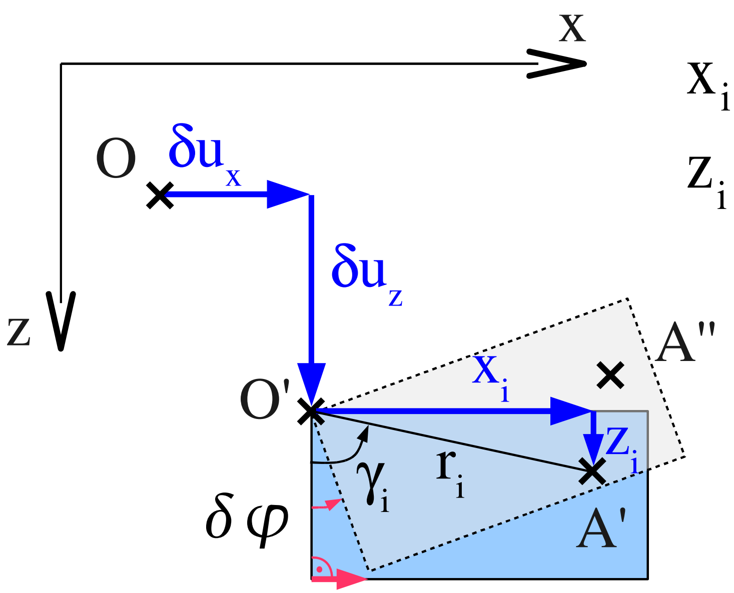
- Pro <u>volnou</u> tuhou desku v rovině lze virtuální přemístění popsat

  – **Posunutím** $\delta\vec{u}$ bodu O → O' (i jakéhokoli jiného bodu na tuhé desce)

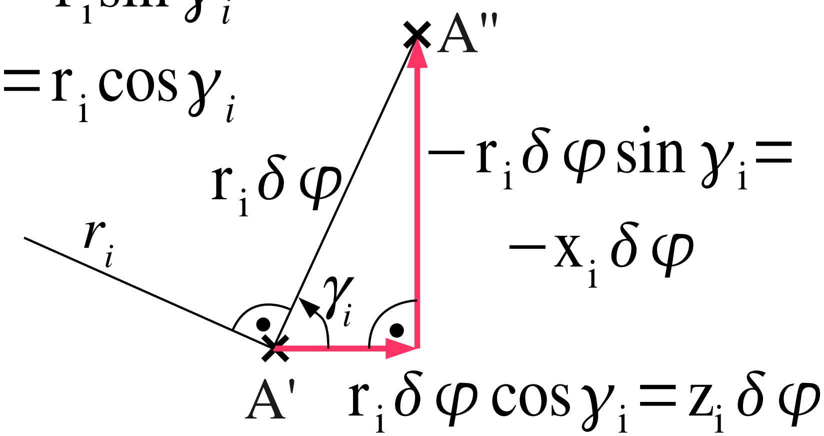


$$\delta\vec{u} = (\delta u_x ; \delta u_z)$$

– **Pootočením** $\delta\varphi$ vzhledem k bodu O' (A' → A'')



$$x_i = r_i \sin\gamma_i$$
$$z_i = r_i \cos\gamma_i$$



malé rotace:
$\delta\varphi \to 0$
$\sin\delta\varphi = \delta\varphi$
$\cos\delta\varphi = 1$
$\tan\delta\varphi = \delta\varphi$

- Celkové virtuální přemístění A → A' → A''

rovina

$$\delta u_{ix} = \delta u_x + z_i \delta\varphi$$
$$\delta u_{iz} = \delta u_z - x_i \delta\varphi$$

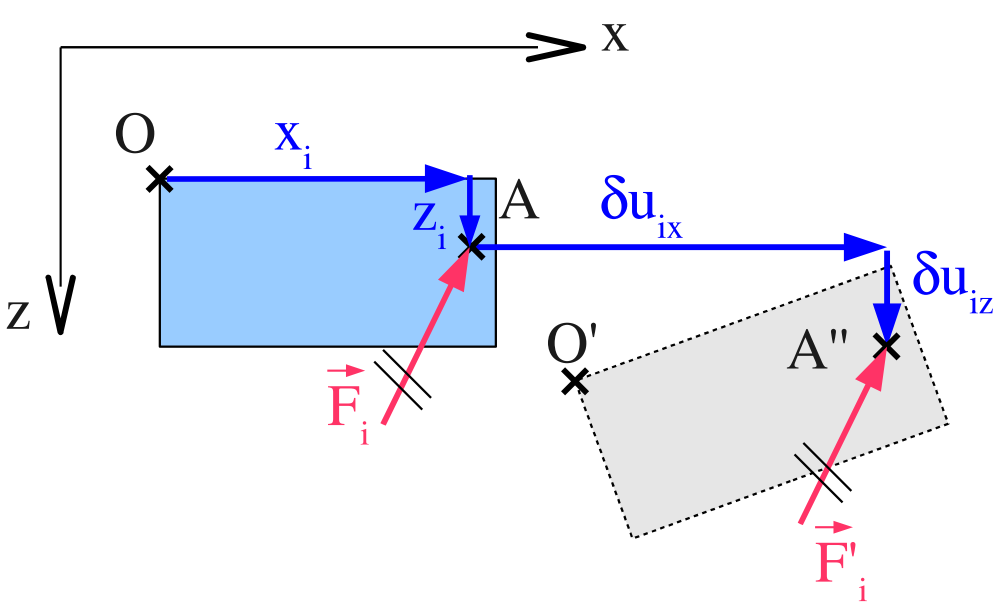
Z daného posunu　　Z daného natočení

zobecněný prostor

$$\delta u_{ix} = \delta u_x + z_i \delta\varphi_y - y_i \delta\varphi_z$$
$$\delta u_{iy} = \delta u_y + x_i \delta\varphi_z - z_i \delta\varphi_x$$
$$\delta u_{iz} = \delta u_z + y_i \delta\varphi_x - x_i \delta\varphi_y$$

Virtuální práce síly

- Pokud v bodě A působí síla $\vec{F}_i = (F_{ix}\,;\,F_{iz})$ pak při virtuálním přemístění (posunu a rotaci) vykoná <u>virtuální práci δW_i</u>



- Virtuální práce síly $\vec{F}_i$ vztažené k bodu O

$$
\begin{aligned}
\delta W_i &= F_{ix}\,\delta u_{ix} + F_{iz}\,\delta u_{iz} \\
&= F_{ix}\,\delta u_x + F_{iz}\,\delta u_z + (F_{ix}\,z_i - F_{iz}\,x_i)\,\delta\varphi \\
&= \underbrace{F_{ix}\,\delta u_x + F_{iz}\,\delta u_z}_{\text{Síla na virtuálním posunu}} + M_{Oi}\,\delta\varphi
\end{aligned}
$$

vektorově

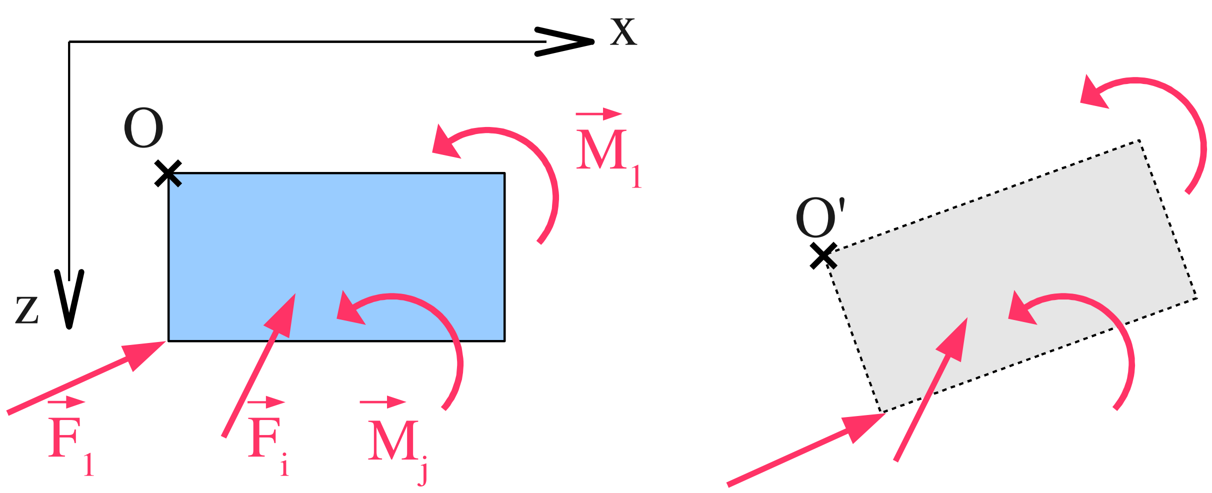
$$
\begin{aligned}
&= \vec{F}_i \cdot \delta\,\vec{u}_i \\
&= \vec{F}_i \cdot \delta\,\vec{u} + (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \cdot \delta\,\vec{\varphi} \\
&= \vec{F}_i \cdot \delta\,\vec{u} + \vec{M}_{Oi} \cdot \delta\,\vec{\varphi}
\end{aligned}
$$

Moment od síly na virtuálním natočení

Moment k O ! (δW od natočení je stejná od F' k bodu O' jako od F k bodu O)

Virtuální práce soustavy sil a momentů na tuhé uvolněné desce

- Pro soustavu sil a momentů využijeme principu superpozice



$$\delta W = \sum_i \delta W_i^F + \sum_j \delta W_j^M = \sum_i \left(F_{ix}\, \delta u_x + F_{iz}\, \delta u_z + M_{Oi}^F\, \delta \varphi \right) + \sum_j M_{Oj}^M\, \delta \varphi =$$
$$= F_{rx}\, \delta u_x + F_{ry}\, \delta u_y + M_{Or}\, \delta \varphi$$

- Pro prostor lze zobecnit

$$\delta W = \vec{F}_r \cdot \delta \vec{u} + \vec{M}_O \cdot \delta \vec{\varphi}$$

Princip virtuálních přemístění

- Uvažujme soustavu sil a momentů na tuhé desce, která je v rovnováze

$$F_{rx} = \sum_i F_{ix} = 0$$
$$F_{ry} = \sum_i F_{iy} = 0$$
$$M_{Or} = \sum_j M_{Oj} = 0$$

- Pak virtuální práce pro libovolné virtuální přemístění je nulová

$$\delta W = F_{rx}\,\delta u_x + F_{ry}\,\delta u_y + M_{Or}\,\delta\varphi = 0$$

<u>Princip virtuálních přemístění:</u>

Virtuální práce rovnovážné soustavy sil působící na tuhé těleso je při libovolném virtuálním přemístění tělesa nulová.

<u>Princip virtuálních přemístění (alternativní formulace):</u>

Soustava sil působící na tuhé těleso je v rovnováze právě tehdy, je-li při virtuálním přemístění tuhého tělesa vykonaná virtuální práce nulová.

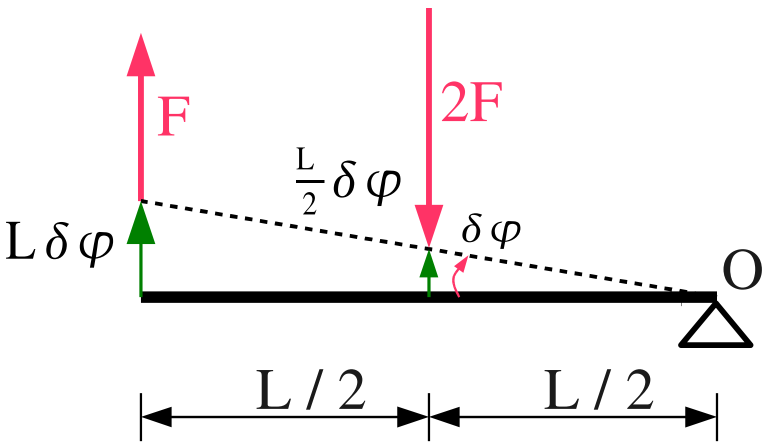
- PVp lze odvodit i z vynásobení podmínek rovnováhy virtuálními přemístěními

$$\delta u_x \left(\sum_i F_{ix} \right) = 0$$
$$\delta u_y \left(\sum_i F_{iy} \right) = 0$$
$$\delta \varphi \left(\sum_j M_{Oj} \right) = 0$$

- Přímým důsledkem PVp je splnění podmínek rovnováhy. PVp (i PVs) vyjadřuje energetickou formulaci, tj. zákon zachování energie.
- Význam PVP je zejména u poddajných těles, kde umožňuje získat jejich přemístění a doplnit chybějící podmínky (např. přetvárné) k podmínkám rovnováhy na staticky neurčitých soustavách.
- PVP je využíván pro přibližné určení neznámých sil. Při určité aproximaci δu a neznámých F (plynoucí z napětí a z deformací poddajných těles) je možné splnit energetickou formulaci i tehdy pokud nejsou splněny podmínky rovnováhy v každém bodě konstrukce ale pouze "v průměru" (tzv. slabé řešení). PVP je tedy obecnější princip, kdy aplikace ve formě PVp je známa jako metoda konečných prvků, která je snadno algoritmizovatelná, přibližná a za určitých podmínek je dokázána konvergence k přesnému řešení.

Aplikace PVp na případ rovnováhy

- Zjistěte pomocí PVp zda jsou uvedené síly v rovnováze



$\delta\varphi$ se považuje za nekonečně malé, neovlivní tedy polohu sil vlivem natočení (odpovídá předpokladům nulových deformací tuhých těles)

Výpočet δW ze součinu virtuální posun $\times$ síla

$$\delta W = \underbrace{L\,\delta\varphi}\,F - \underbrace{\tfrac{L}{2}\,\delta\varphi}\,2F = \delta\varphi\,\underbrace{\left(LF - \tfrac{L}{2}2F\right)}_{\text{momentová podm. rovn.}} = 0$$

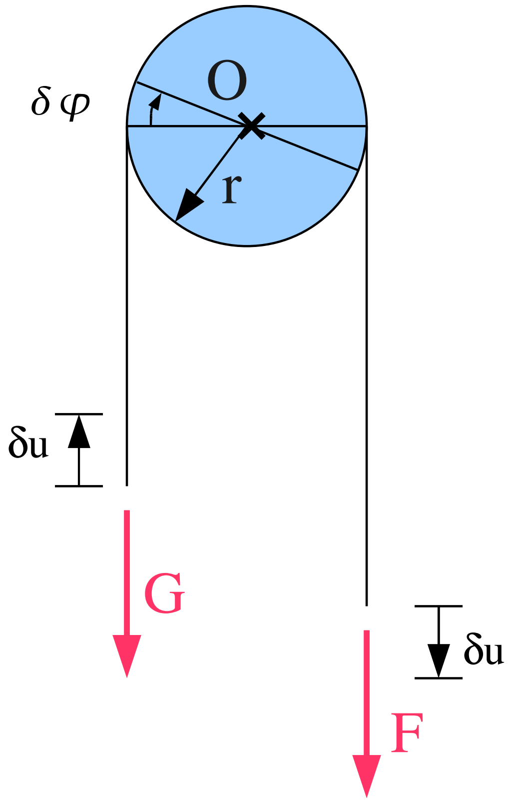
Výpočet δW ze součinu virtuální otočení $\times$ moment k O

$$\delta W = \delta\varphi\,\underbrace{LF} - \delta\varphi\,\underbrace{\tfrac{L}{2}2F} = \delta\varphi\,\underbrace{\left(LF - \tfrac{L}{2}2F\right)}_{\text{momentová podm. rovn.}} = 0$$

- Protože $\delta\varphi$ může být libovolné, je momentová podmínka rovnováhy splněna
- <u>Pozn.</u> síla F může znázorňovat i reakci k síle 2F a naopak

Rovnováha na kladce

- Ověřte PVp rovnováhu na kladce



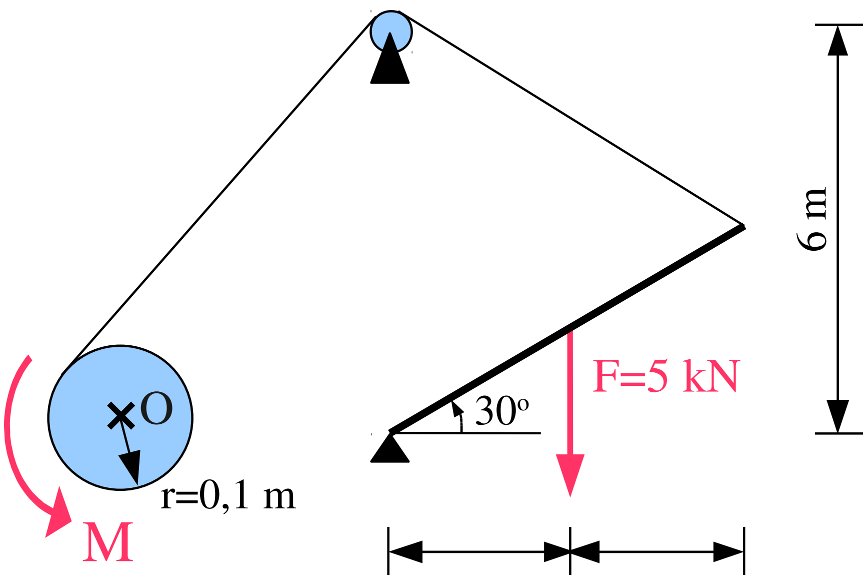
Výpočet δW ze součinu síla $\times$ virtuální posun

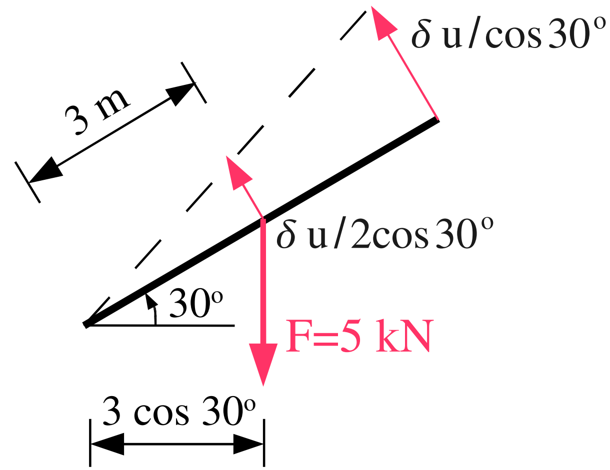
$$\delta W = F\,\delta u - G\,\delta u = \delta u \underbrace{(F - G)}_{F=G} = 0$$

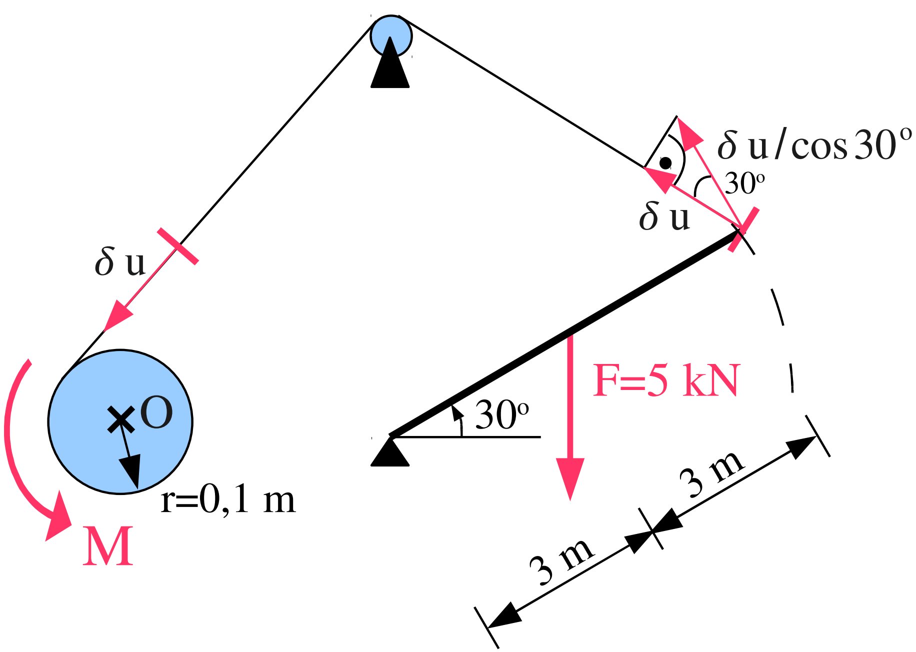
Výpočet δW ze součinu moment k O $\times$ virtuální otočení

$$\delta W = Fr\,\delta\varphi - Gr\,\delta\varphi = \delta\varphi\, r \underbrace{(F - G)}_{F=G} = 0$$

Pomocí PVp určete moment M, který je v rovnováze se zatížením







<u>*Alt. 1*</u>

$$\delta W = M\frac{\delta u}{r} - 3\cos 30^{\circ} F\cdot\frac{\delta u}{6\cos 30^{\circ}} = 0$$

$$\delta W = \delta u\left(\frac{M}{r} - \frac{F}{2}\right) = 0$$

$$M = \frac{rF}{2} = 250\ \mathrm{Nm}$$

<u>*Alt. 2*</u>

$$\delta W = \frac{M}{r}\delta u - F\cos 30^{\circ}\frac{\delta u}{2\cos 30^{\circ}} = 0$$

$$\delta W = \delta u\left(\frac{M}{r} - \frac{F}{2}\right) = 0$$

Otázky

- Které dva principy plynou z PVP ?
- Co je přímým důsledkem PVp ?
- Lze úlohy rovnováhy řešit PVp ?
- Jak velké mohou být virtuální posuny a natočení, lze určit libovolně jejich velikosti ?
- Čemu se rovná virtuální práce kinematicky určitě podepřeného tuhého tělesa ?
- Proč musíme uvolnit alespoň jednu vazbu při výpočtu virtuální práce na kinematicky určitých soustavách ?
- Lze PVP řešit i staticky neurčité konstrukce ?
- Obsahuje virtuální práce v PVp silové i momentové příspěvky ?
- Jaké jsou jednotky virtuální práce ?
- Kolik virtuálních posunutí a natočení má smysl definovat na tuhé desce ?
- Kolik na tuhém tělese v prostoru ?

Přednášky z předmětu SM1, Stavební fakulta ČVUT v Praze

Autor Vít Šmilauer

Náměty, připomínky, úpravy, vylepšení zasílejte prosím na

vit.smilauer@fsv.cvut.cz

Created 12/2007 in OpenOffice 2.3, ubuntu linux 6.06

Last update Feb 21, 2011