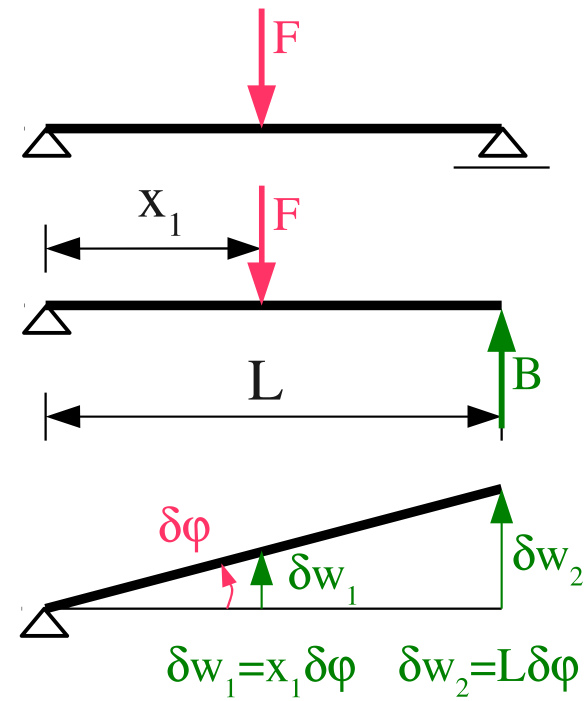
Kinematická metoda výpočtu reakcí staticky určitých soustav

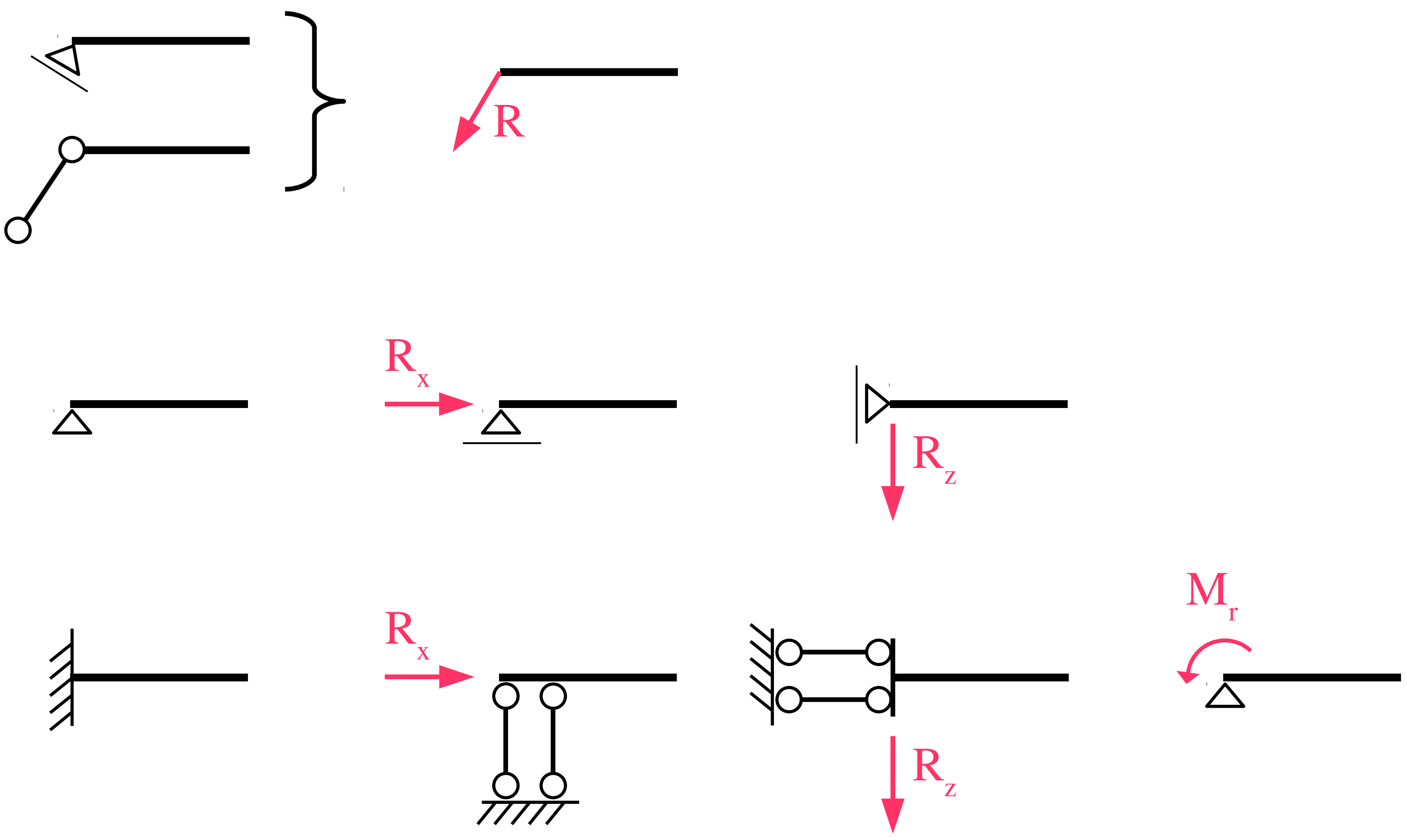
1) Uvolnění jednoho stupně volnosti odpovídající reakci, kterou chceme určit (vytvoření kinematického mechanismu o jednom stupni volnosti). Zavedení neznámé reakce.
2) Zavedeme virtuální přemístění v závislosti na jediném virtuálním parametru (posun, natočení). Přitom nesmíme porušit kinematické vazby.
3) Vyjádříme virtuální práci sil a momentů, včetně neznámé reakce.
4) Z podmínky nulové virtuální práce určíme neznámou velikost reakce.



$$\delta W = -F\,\delta w_1 + \mathbf{B}\,\delta w_2 =$$
$$-F x_1\,\delta\varphi + \mathbf{B} L\,\delta\varphi =$$
$$(-F x_1 + \mathbf{B} L)\,\delta\varphi = 0$$
$$\delta W = 0 \quad \forall\,\delta\varphi$$
$$-F x_1 + \mathbf{B} L = 0$$
$$\mathbf{B} = F\frac{x_1}{L}$$

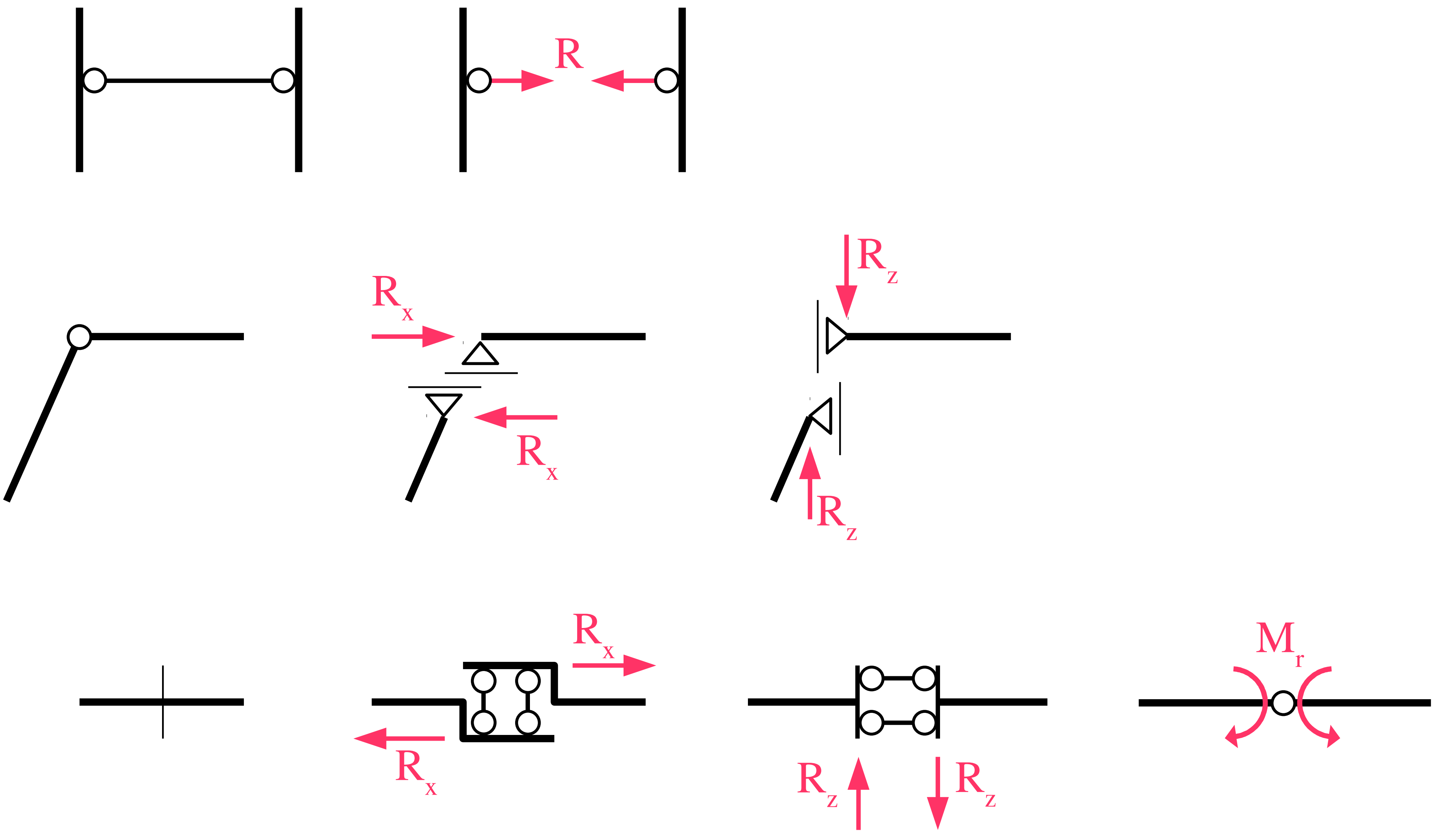
Ad 1) Uvolnění vazeb a zavedení reakcí

- Vnější vazby v rovině



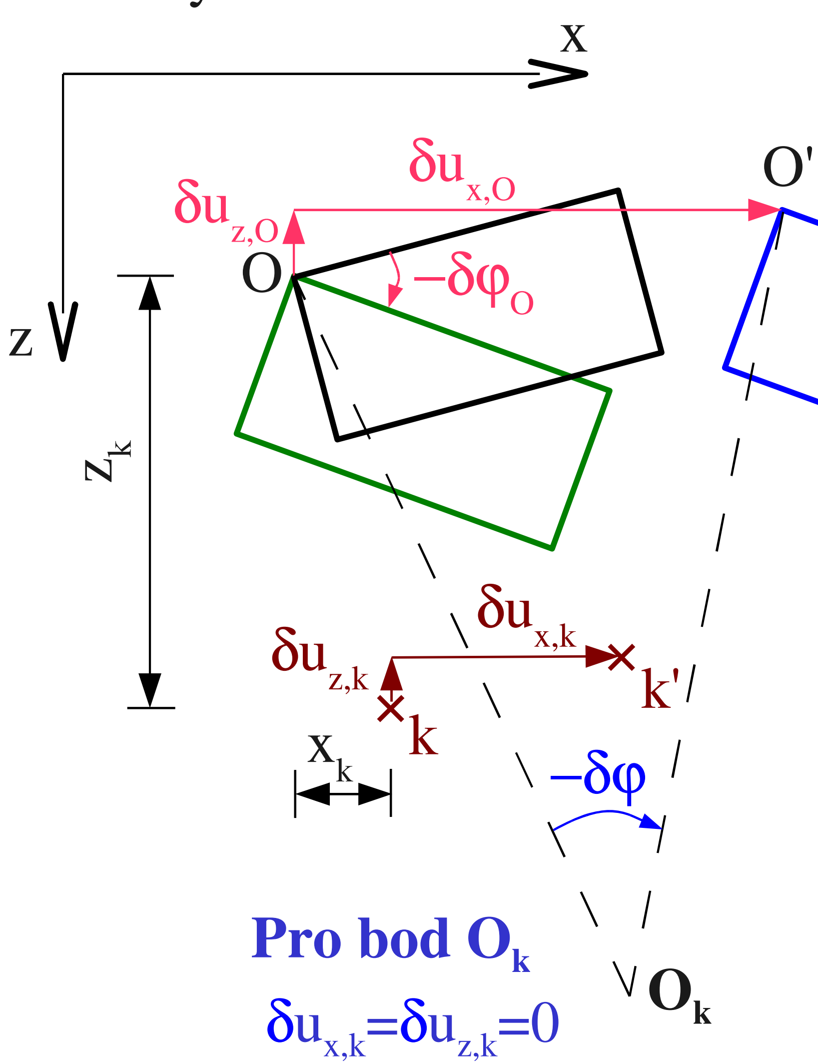
Ad 1) Uvolnění vazeb a zavedení reakcí

- Vnitřní vazby v rovině

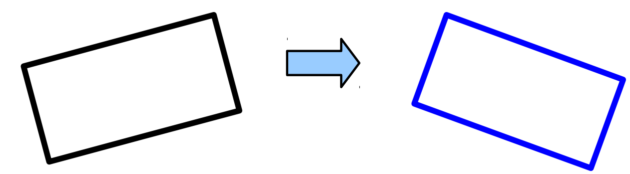


Ad 2) Popis kinematicky přípustného virtuálního přemístění

- Středy otáčení desek



Pro dané virtuální přemístění závisí virtuální posuny $\delta u_{x,O}$, $\delta u_{z,O}$ a natočení $\delta\varphi_O$ na volbě bodu O

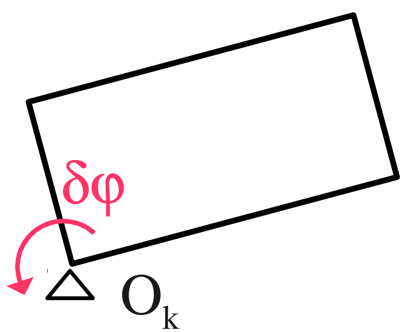


Pro každou desku lze však nalézt <u>absolutní střed otáčení desky O_k</u>, pro který lze veškeré virtuální přemístění popsat pouze rotací $\delta\varphi$ okolo O_k

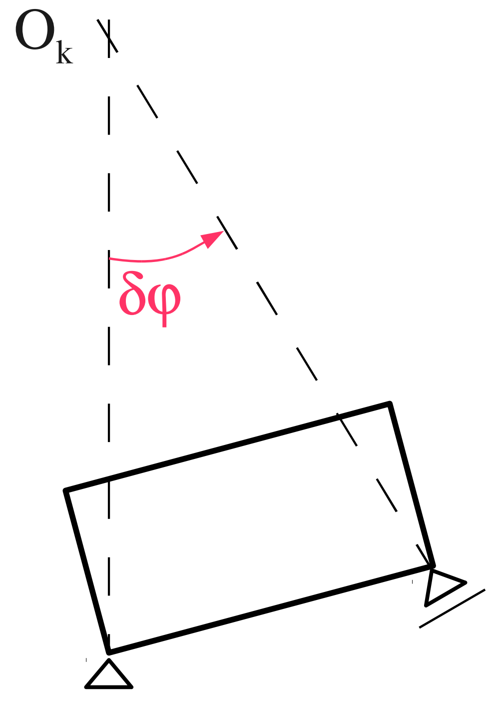
$$\delta u_{x,k} = \delta u_{x,0} + z_k \delta\varphi = 0$$
$$\delta u_{z,k} = \delta u_{z,0} - x_k \delta\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \quad z_{Ok} = -\frac{\delta u_{x,0}}{\delta\varphi} \qquad x_{Ok} = \frac{\delta u_{z,0}}{\delta\varphi}$$

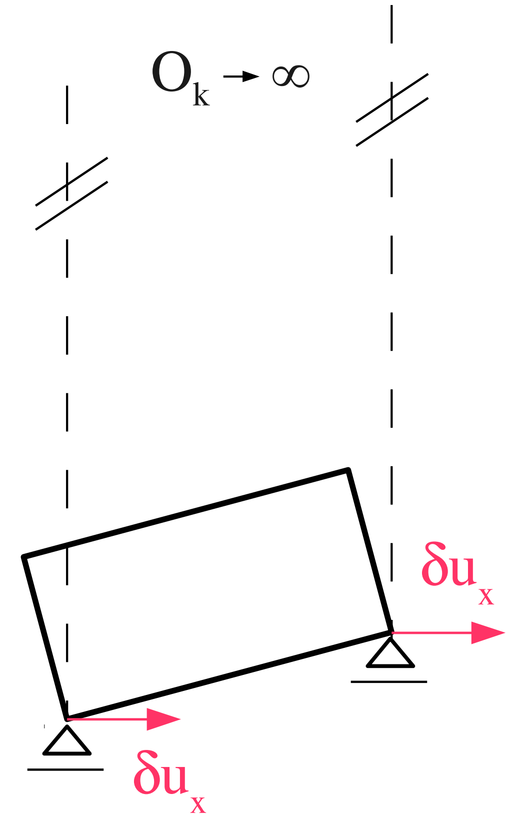
Poloha středu otáčení O_k závisí na vnitřních a vnějších vazbách desky



Vnitřní i vnější kloub



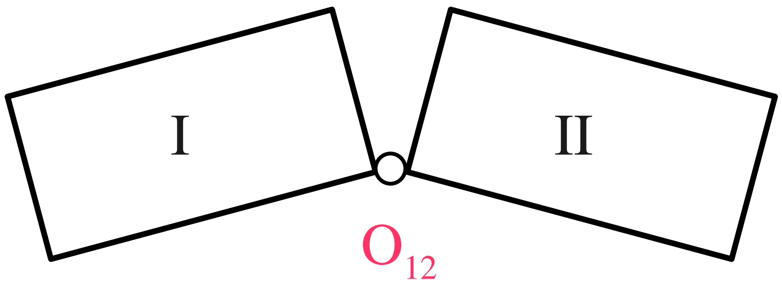
O_k leží na průsečíku kolmic k vodícím přímkám vazeb

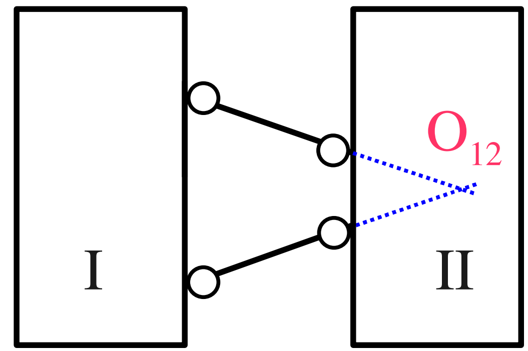


O_k leží v nekonečnu

Vzájemný střed otáčení dvou desek

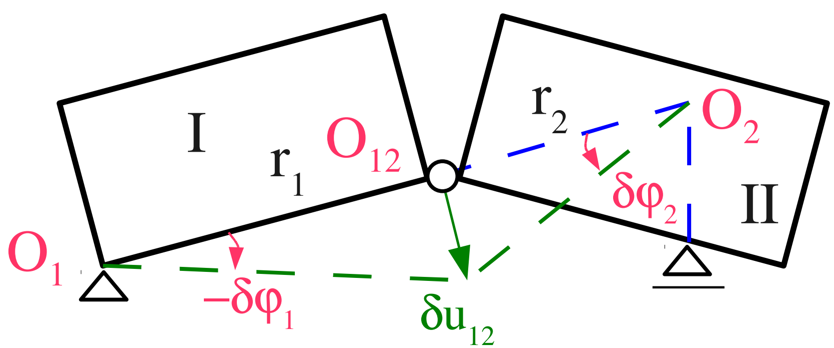
bod, kolem kterého se desky vzájemně otáčejí





První třípólová věta :

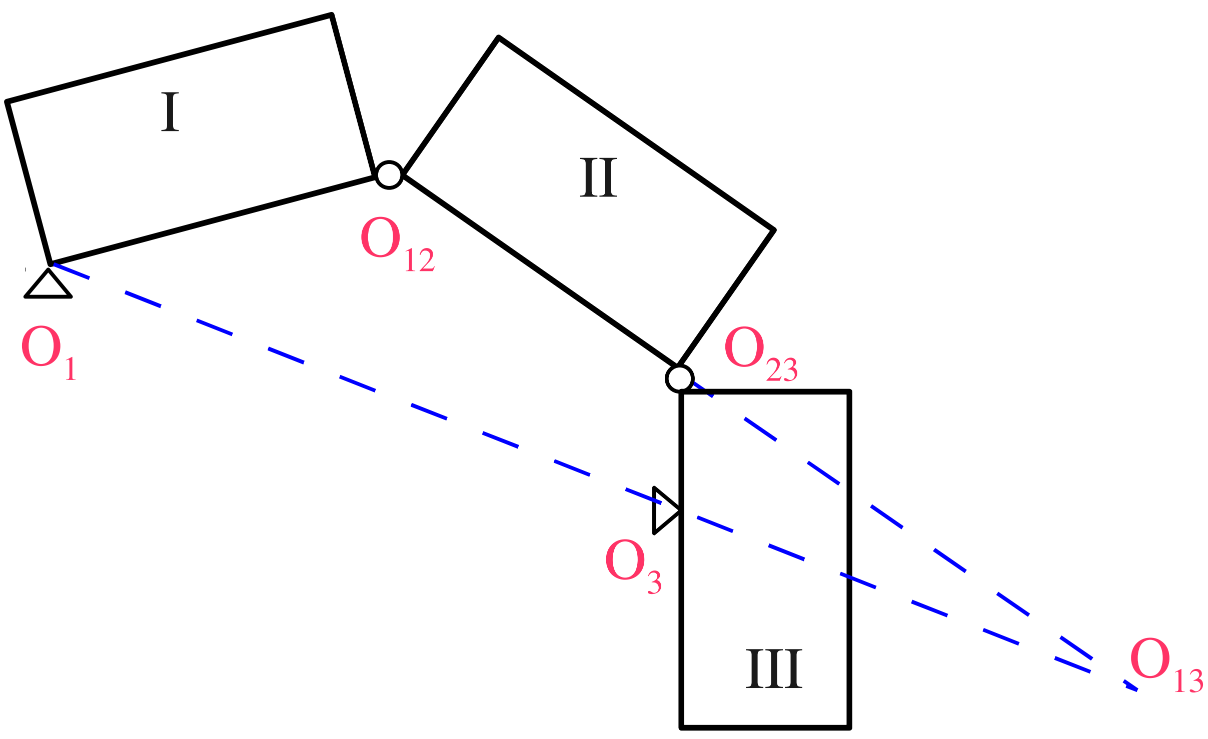
Středy otáčení desky I (O_1) a desky II (O_2) leží na jedné přímce s vzájemným středem O_{12}



$$\left.\begin{aligned}\delta u_{12} &= -\delta\varphi_1 r_1 \\ \delta u_{12} &= \delta\varphi_2 r_2\end{aligned}\right\} \quad \delta\varphi_2 = \frac{-r_1}{r_2}\delta\varphi_1$$

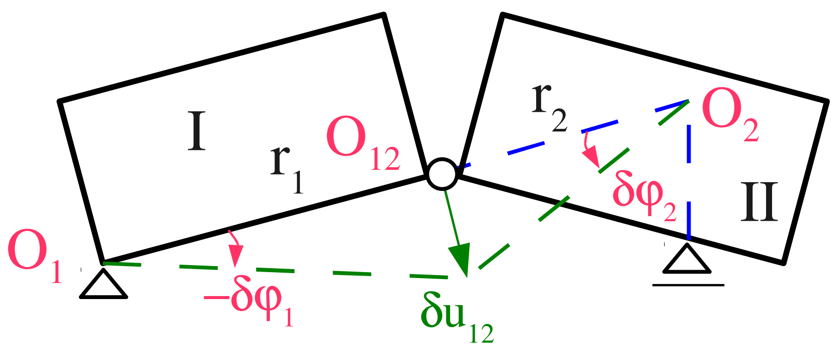
Druhá třípólová věta :

Tři vzájemné středy otáčení tří desek leží na jedné přímce



Příklady možných poloh středů otáčení desek

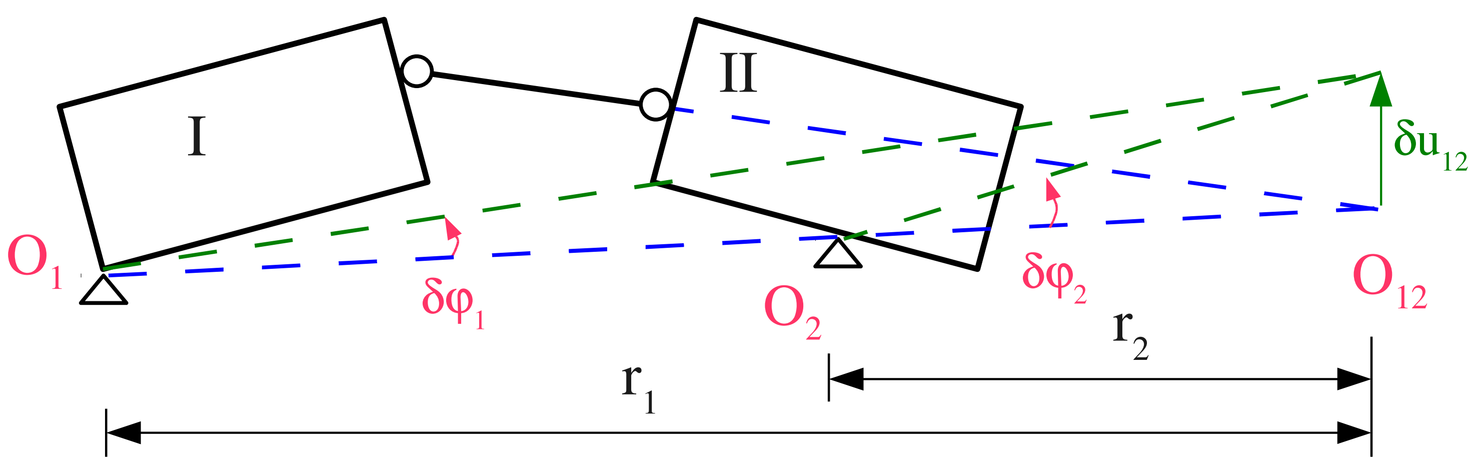
a) O_{12} leží mezi O_1 a O_2



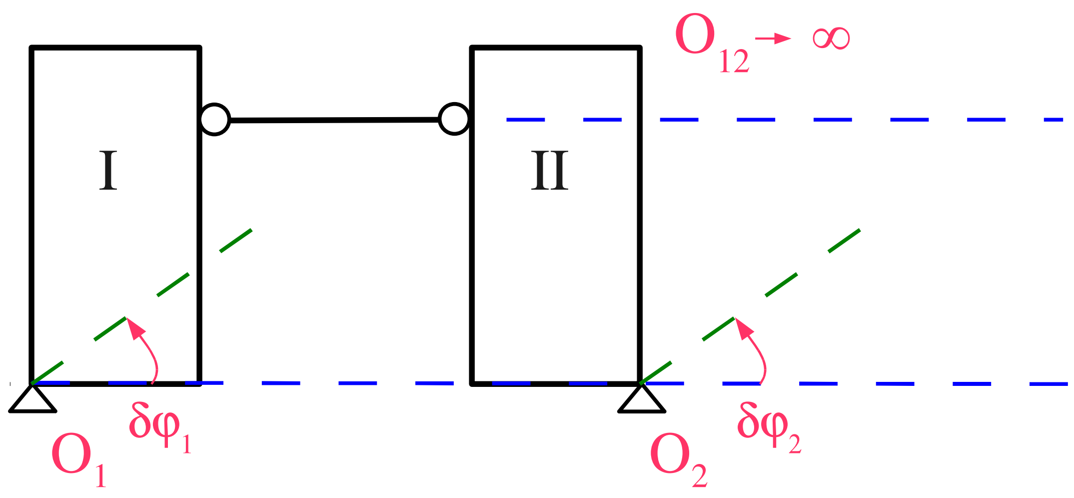
$$\left.\begin{aligned} \delta u_{12} &= -\delta \varphi_1 r_1 \\ \delta u_{12} &= \delta \varphi_2 r_2 \end{aligned}\right\} \quad \delta \varphi_2 = \frac{-r_1}{r_2} \delta \varphi_1$$

b) O_{12} leží vně O_1 a O_2

$$\left.\begin{aligned} \delta u_{12} &= \delta \varphi_1 r_1 \\ \delta u_{12} &= \delta \varphi_2 r_2 \end{aligned}\right\} \quad \delta \varphi_2 = \frac{r_1}{r_2} \delta \varphi_1$$

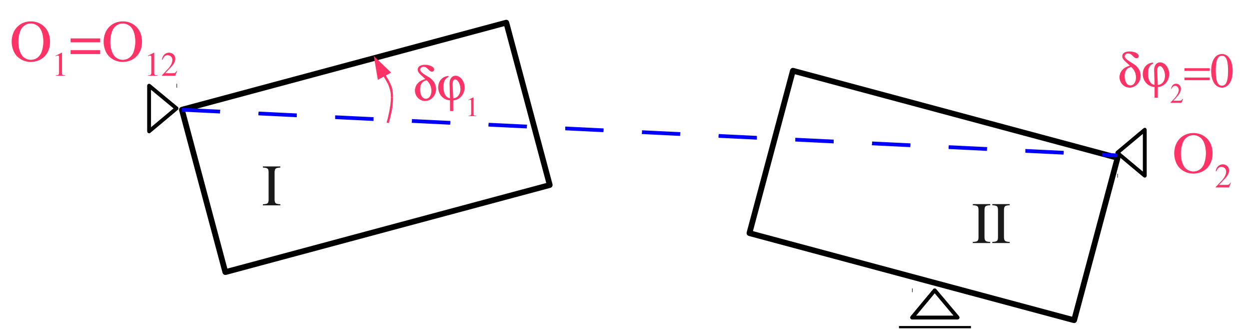


c) O_{12} leží v nevlastním bodě

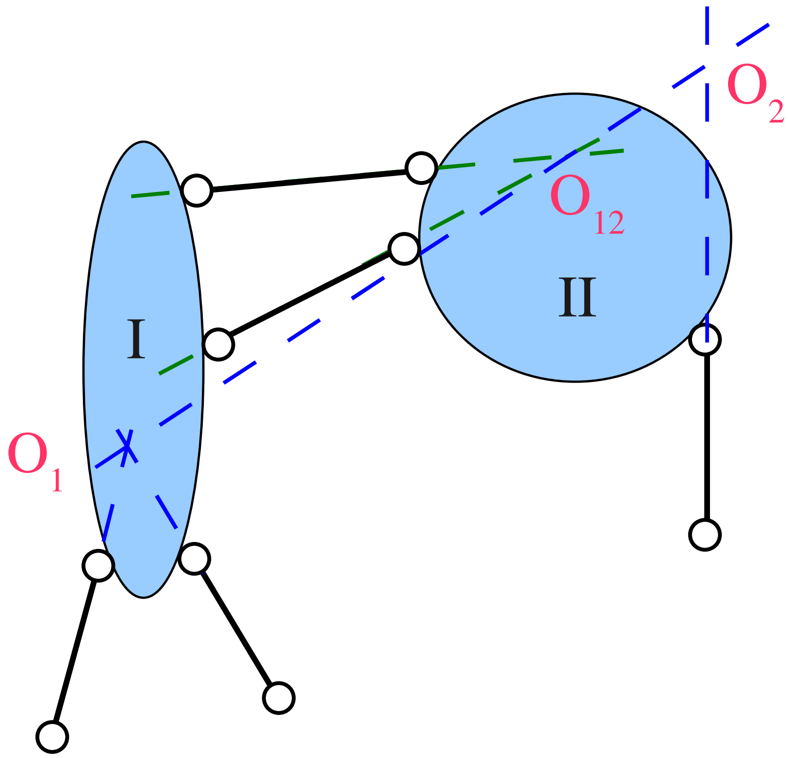


$$\delta\varphi_2 = \delta\varphi_1$$

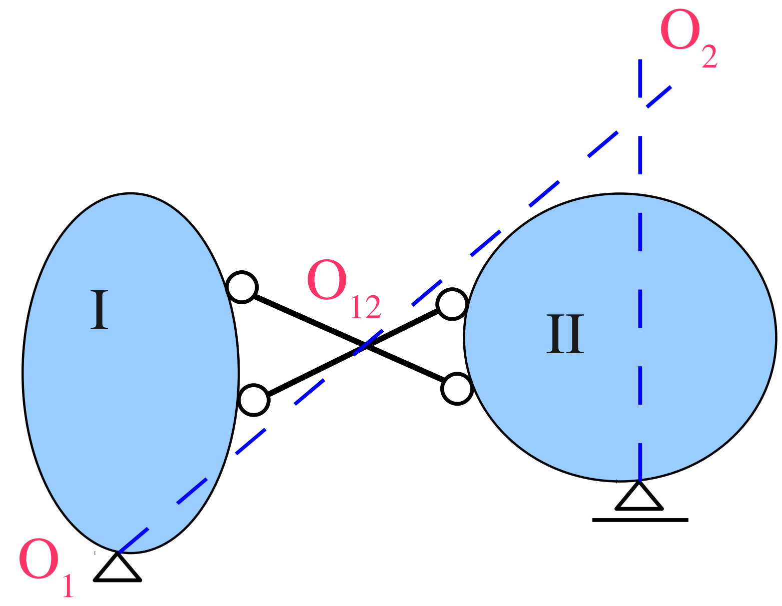
d) $O_1 = O_{12}$, deska II je nepohyblivá, bod O_2 lze volit libovolně na desce II



e) další příklady složených soustav a středů otáčení

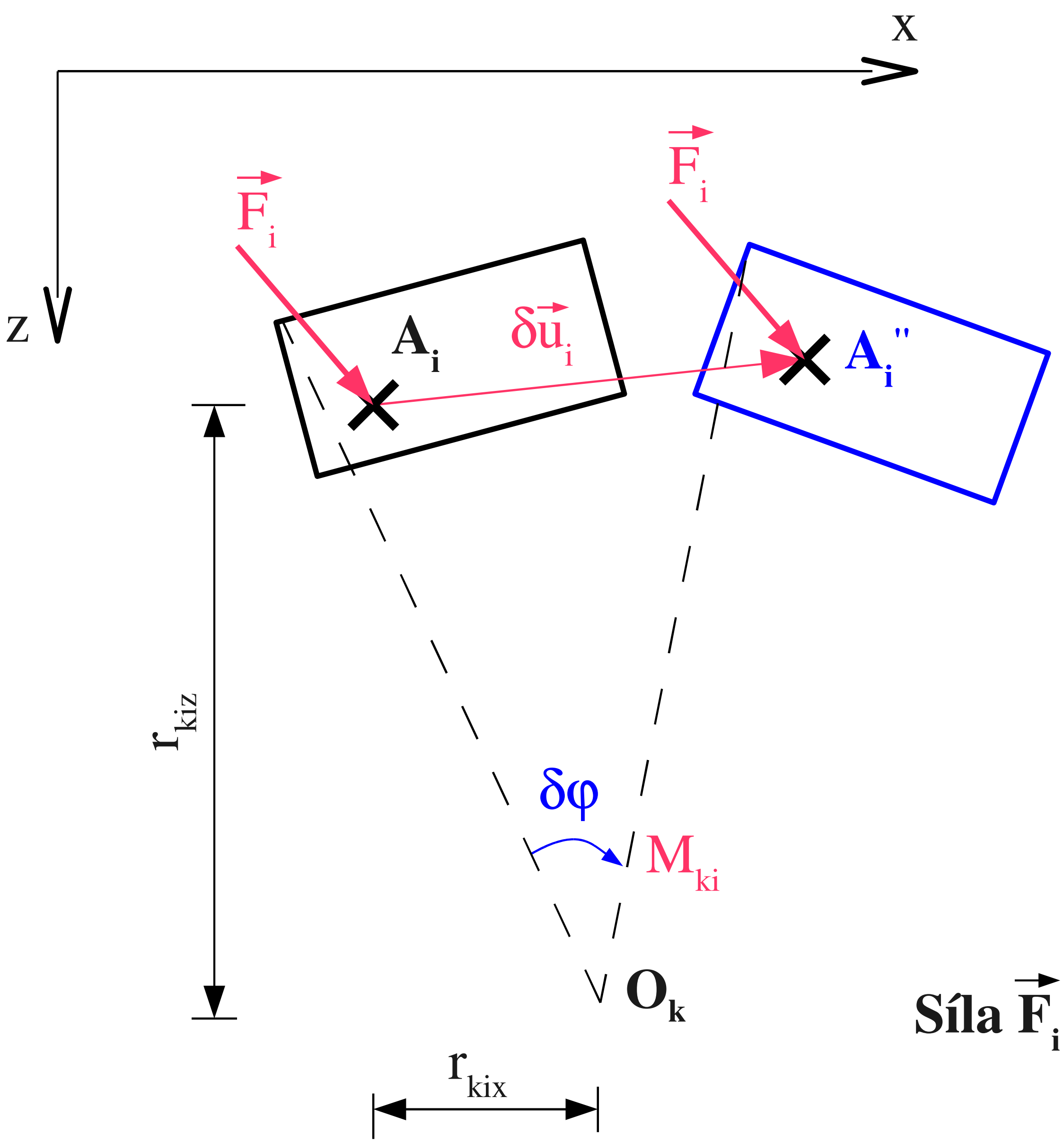


$s = 2x3^o - 5^o = +1^o$



$s = 2x3^o - 5^o = +1^o$

Ad 3) Výpočet virtuální práce



$$\delta \vec{u}_i = (\delta u_{ix} ; \delta u_{iy})$$

$$\delta u_{ix} = \mathrm{r}_{kiz} \delta \varphi$$

$$\delta u_{iz} = -\mathrm{r}_{kix} \delta \varphi$$

Virtuální práce

$$\delta W = \vec{F}_i \delta \vec{u}_i = F_{ix} r_{kiz} \delta \varphi - F_{iz} r_{kix} \delta \varphi$$

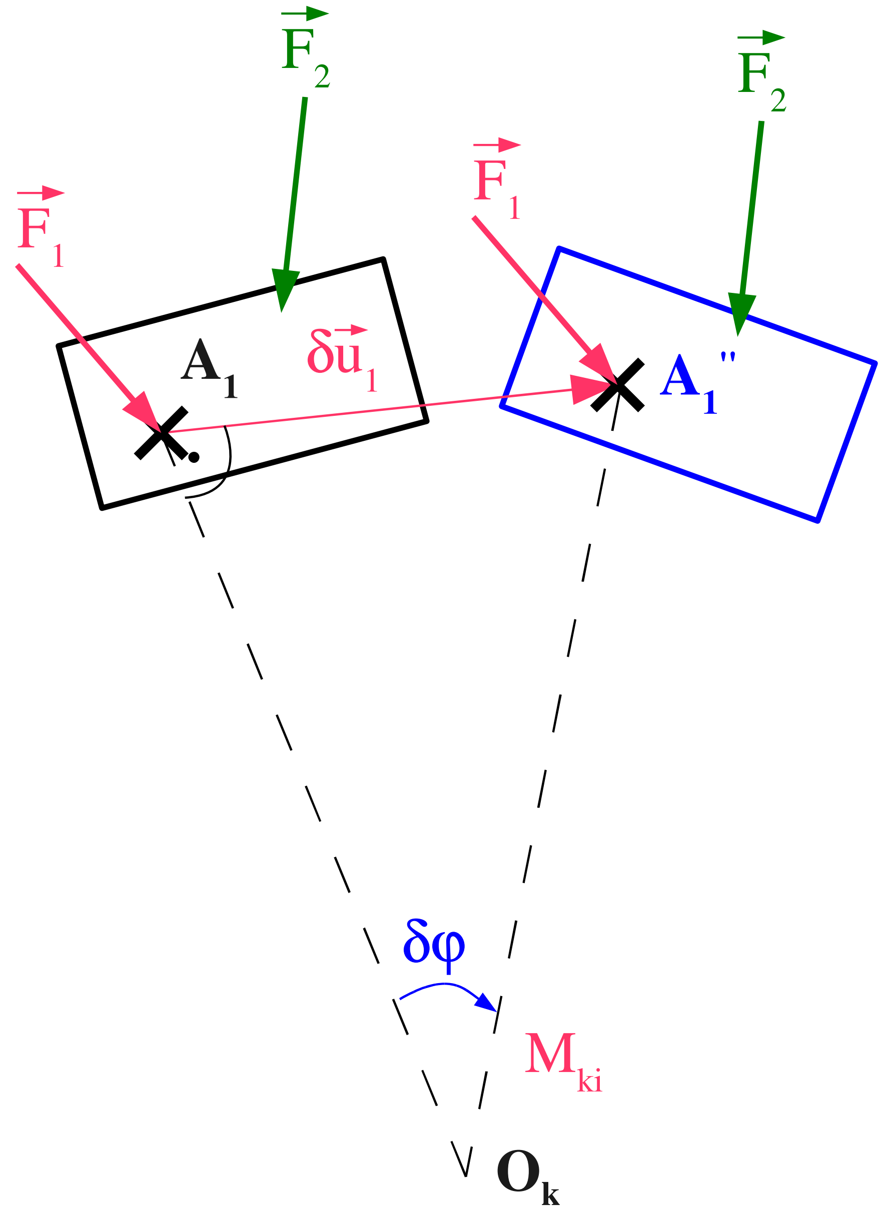
$$\delta W = M_{ki} \delta \varphi$$

$$(\delta u_z = \delta u_x = 0)$$

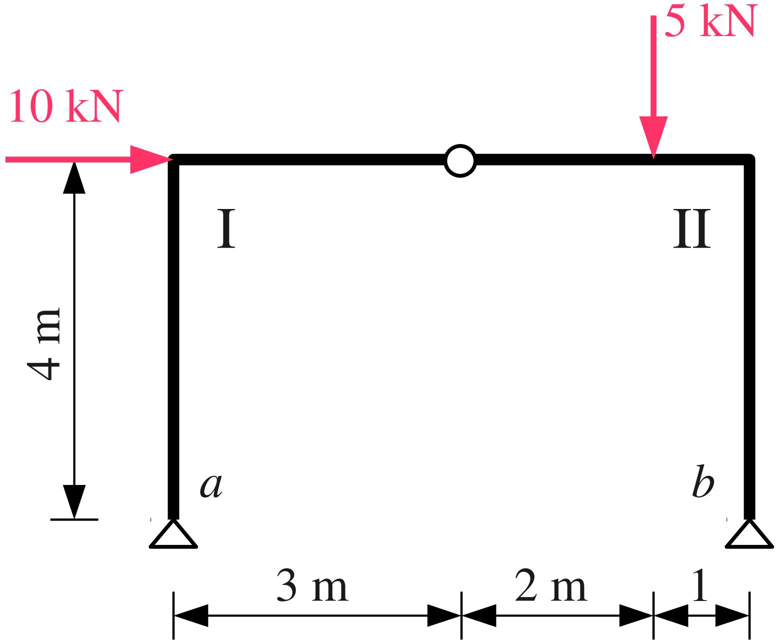
Síla $\vec{F}_i$ způsobuje moment M_{ki} k bodu O_k

Virtuální práci soustavy sil F_i lze vypočítat superpozicí jako virtuální práci momentů M_{ki} od sil F_i ke středu otáčení desky O_k

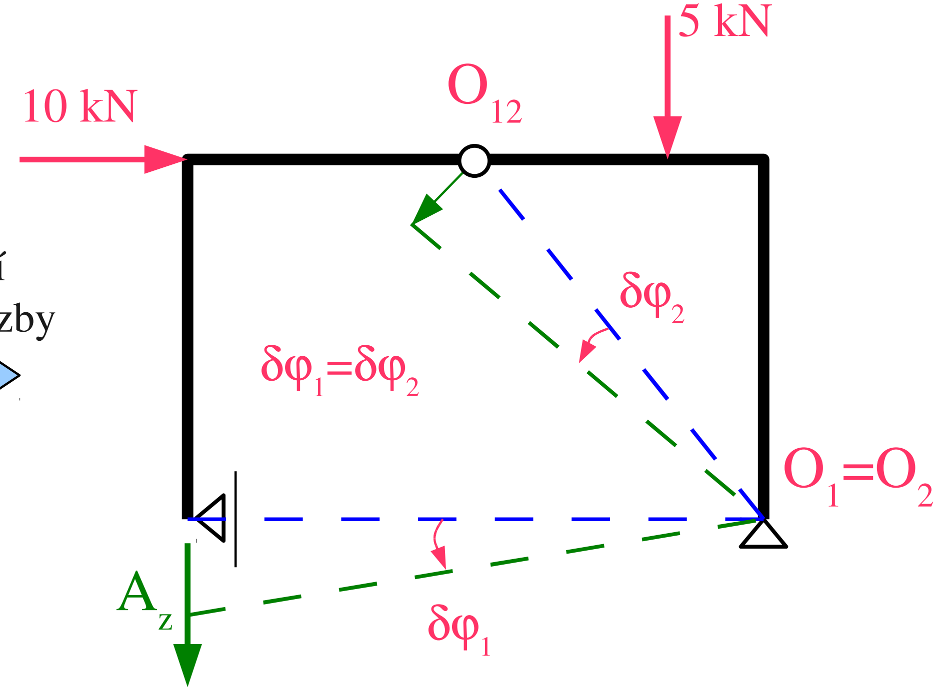
$$\delta W = \sum_i M_{ki}\,\delta\varphi = \delta\varphi \sum_i M_{ki}$$



Vyřešte reakce v kloubu *a* kinematickou metodou

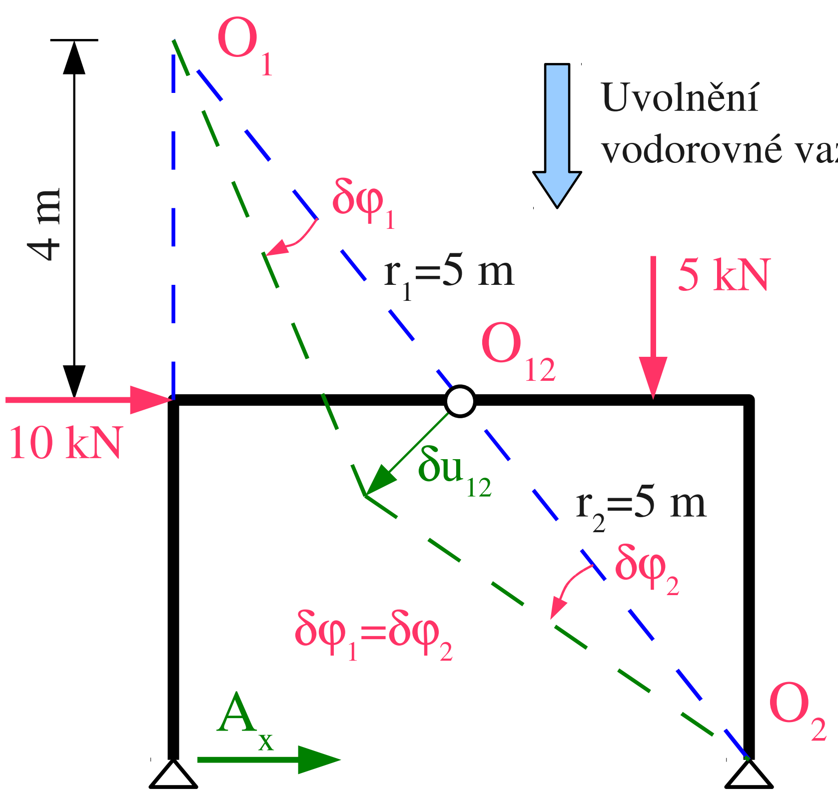


Uvolnění
svislé vazby



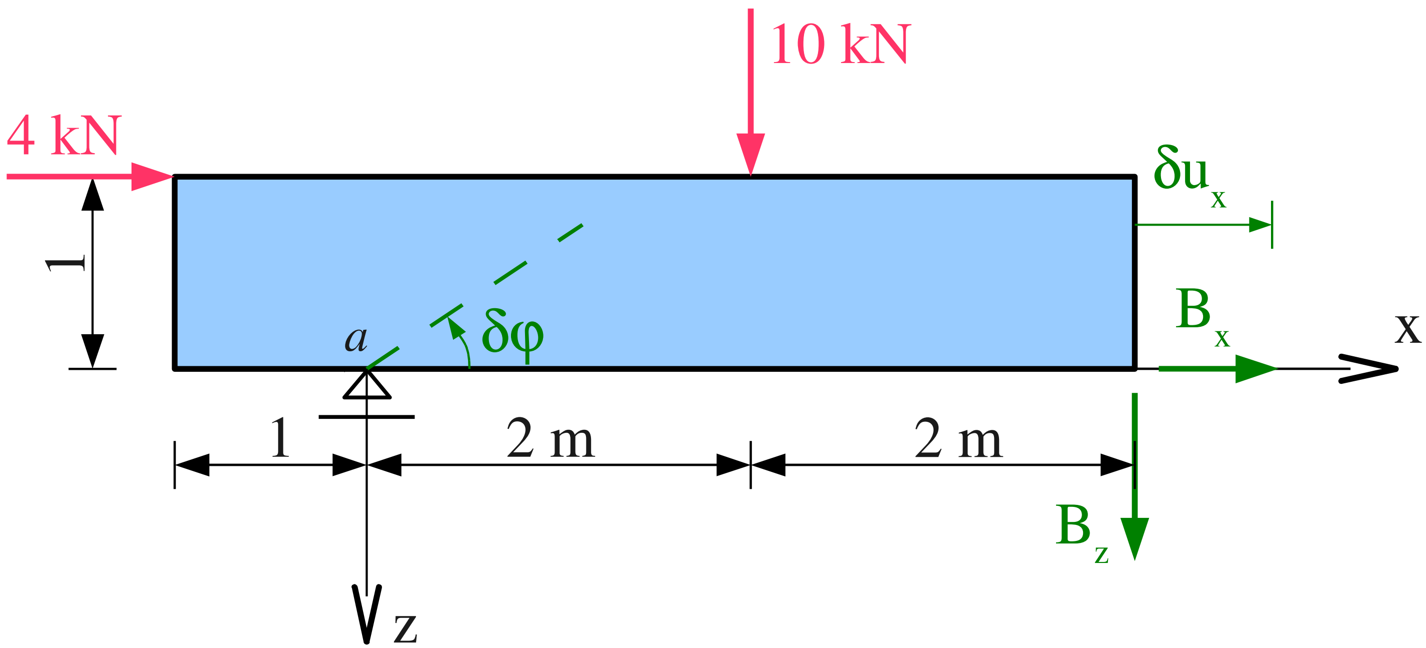
$$\delta W=(6A_z-4\cdot 10)\delta\varphi_1+1\cdot 5\delta\varphi_2=$$
$$(6A_z-4\cdot 10+1\cdot 5)\delta\varphi_2=0$$
$$A_z=5.833\,\text{kN}$$

Uvolnění
vodorovné vazby



$$\delta W=(-8A_x-4\cdot 10)\delta\varphi_1+1\cdot 5\delta\varphi_2=$$
$$(-8A_x-4\cdot 10+1\cdot 5)\delta\varphi_2=0$$
$$A_x=-4.375\,\text{kN}$$

Určete velikosti reakcí B_x a B_z kinematickou metodou



Dvě nezávislá virtuální přemístění δu_x a $\delta\varphi$

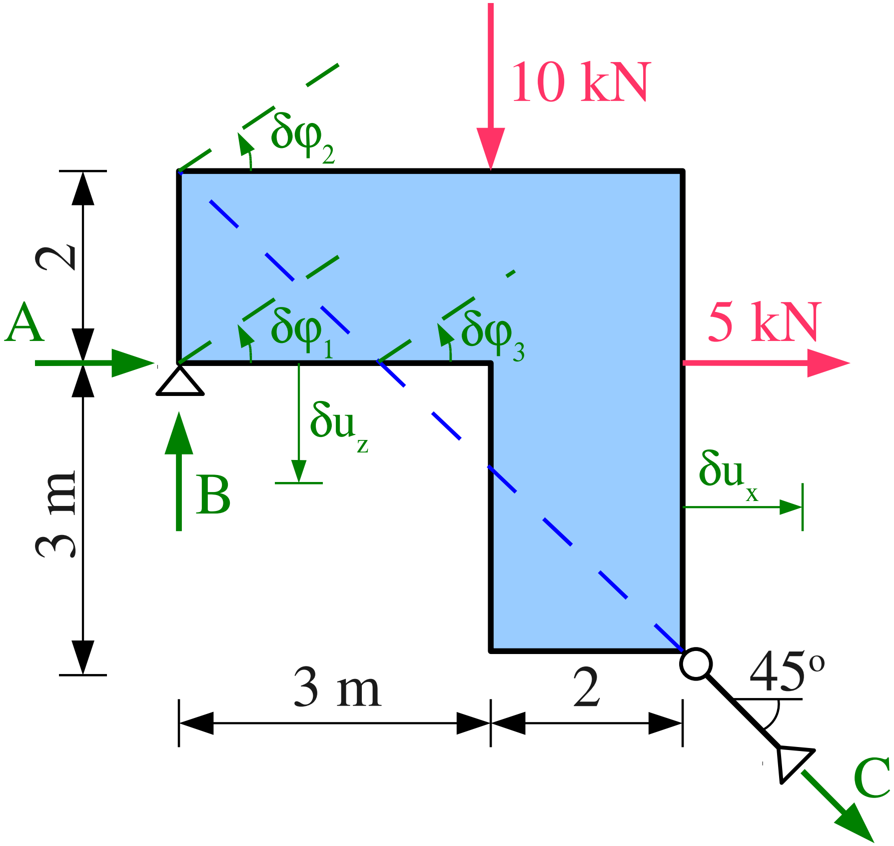
$$\delta W = (4+\mathbf{B_x})\delta u_x + (-1\cdot 4 - 2\cdot 10 - 4\mathbf{B_z})\delta\varphi = 0$$

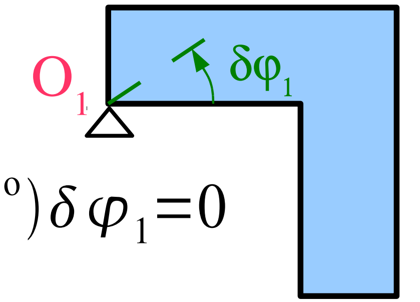
Podmínka nulové virtuální práce se rozpadne na dvě nezávislé rovnice

$\rightarrow \quad 4+\mathbf{B_x}=0, \quad B_x=-4\,\text{kN}$

$\curvearrowleft a \quad -1\cdot 4-2\cdot 10-4\mathbf{B_z}=0, \quad B_z=-6\,\text{kN}$

Určete všechny reakce kinematickou metodou

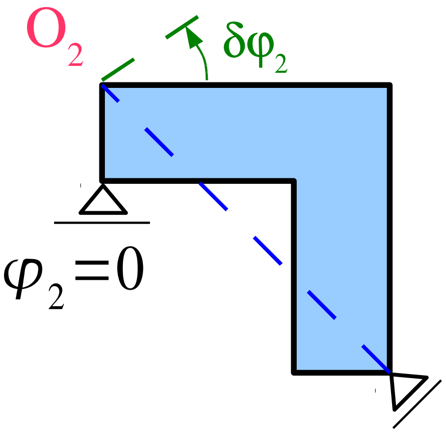




Výpočet reakce C

$$\delta W = (-3 \cdot 10 - 2\,\mathbf{C} \cos 45^{\circ})\,\delta\varphi_1 = 0$$

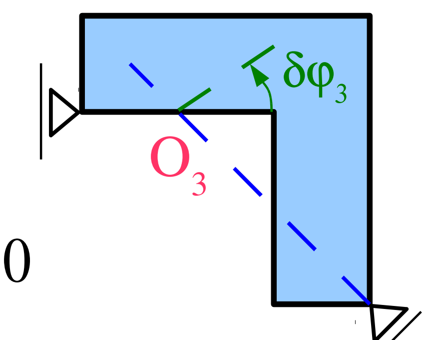
$$C = -21{,}213\ \mathrm{kN}$$



Výpočet reakce A

$$\delta W = (2\,\mathbf{A} - 3 \cdot 10 + 2 \cdot 5)\,\delta\varphi_2 = 0$$

$$A = 10\ \mathrm{kN}$$



Kontrola

$$\delta W = (A + 5 + C \cos 45^{\circ})\,\delta u_x = 0, \quad \mathrm{OK}$$

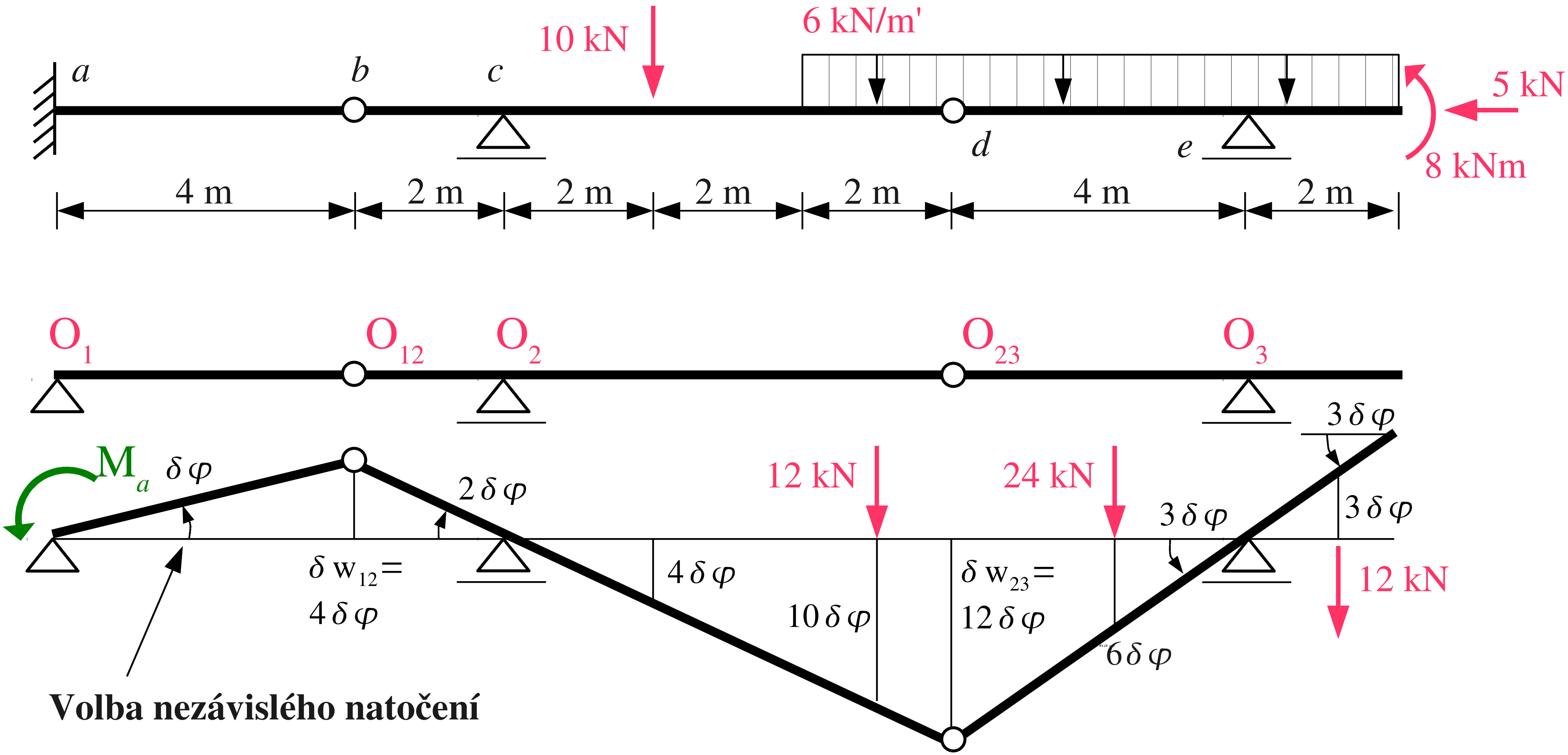
$$\delta W = (-B + 10 + C \sin 45^{\circ})\,\delta u_z = 0, \quad \mathrm{OK}$$

Výpočet reakce B

$$\delta W = (-2\,\mathbf{B} - 1 \cdot 10)\,\delta\varphi_3 = 0$$

$$B = -5\ \mathrm{kN}$$

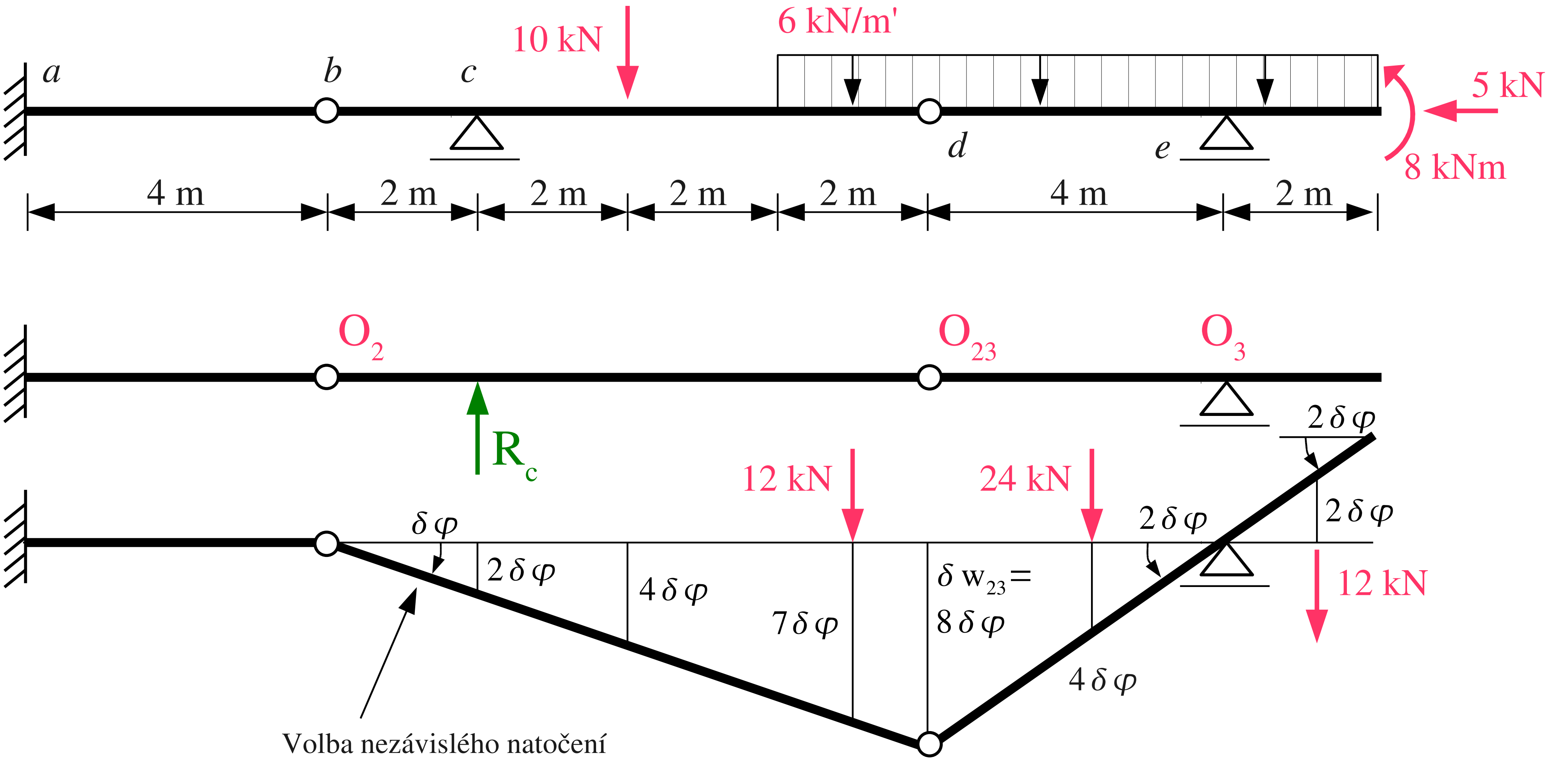
Určete moment ve vetknutí Gerberova nosníku pomocí PVp



$$\delta W = (\mathbf{M}_a + 4\cdot 10 + 10\cdot 12 + 6\cdot 24 - 3\cdot 12 + 3\cdot 8)\,\delta\varphi = 0,\quad \mathrm{M}_a = -292\,\mathrm{kNm}$$

Pozn. Virtuální práci od osamělých sil lze počítat buď jako součin síly a virtuálního posunu či jako součin momentu od síly a virtuálního natočení

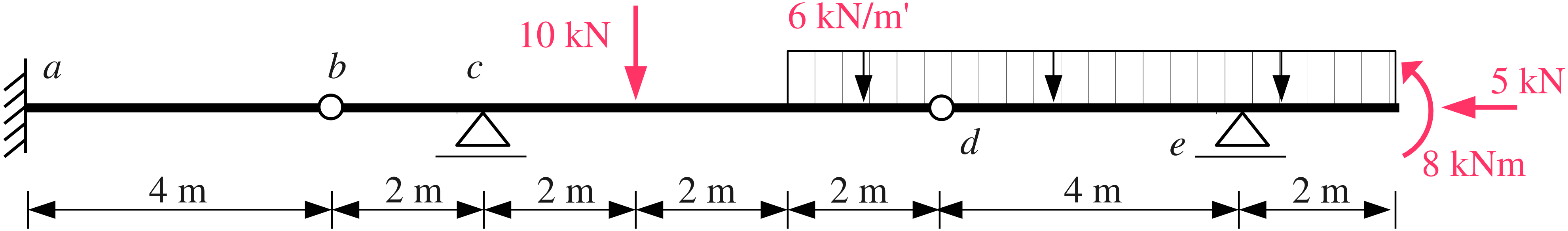
Určete reakci v podpoře *c* pomocí PVp

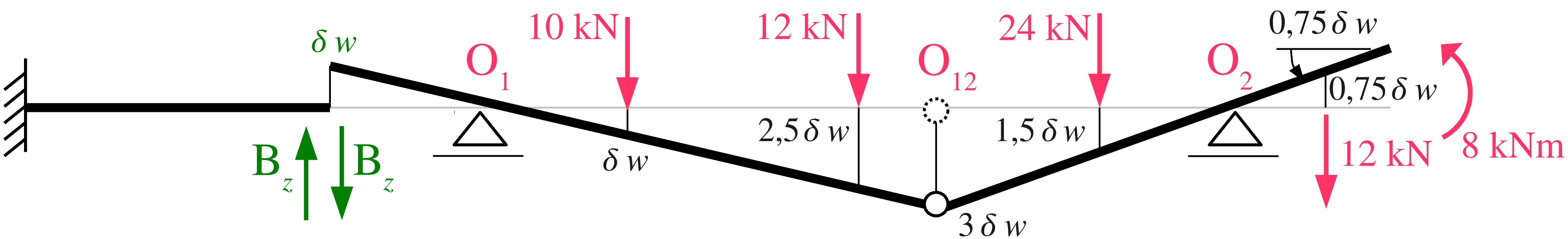


$$\delta W = \left(-2\,\mathbf{R_c} + 4\cdot 10 + 7\cdot 12 + 4\cdot 24 - 2\cdot 12 + 2\cdot 8\right)\delta\varphi = 0,\quad R_c = 106\,\text{kN}$$

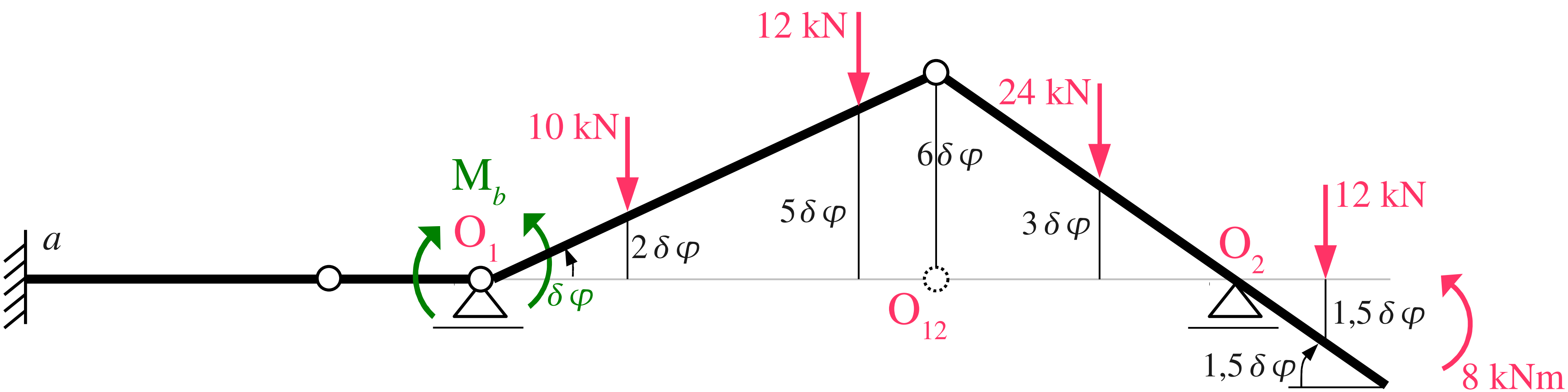
<u>Pozn</u>. Místo virtuálního natočení v kloubu *b* lze zvolit virtuální posun pod reakcí R_c. Konzola je nesoucí část, zatížení na konzole tedy nemá vliv na reakci R_c.

Určete svislé síly v kloubu *b* a moment nad podporou *c* pomocí PVp



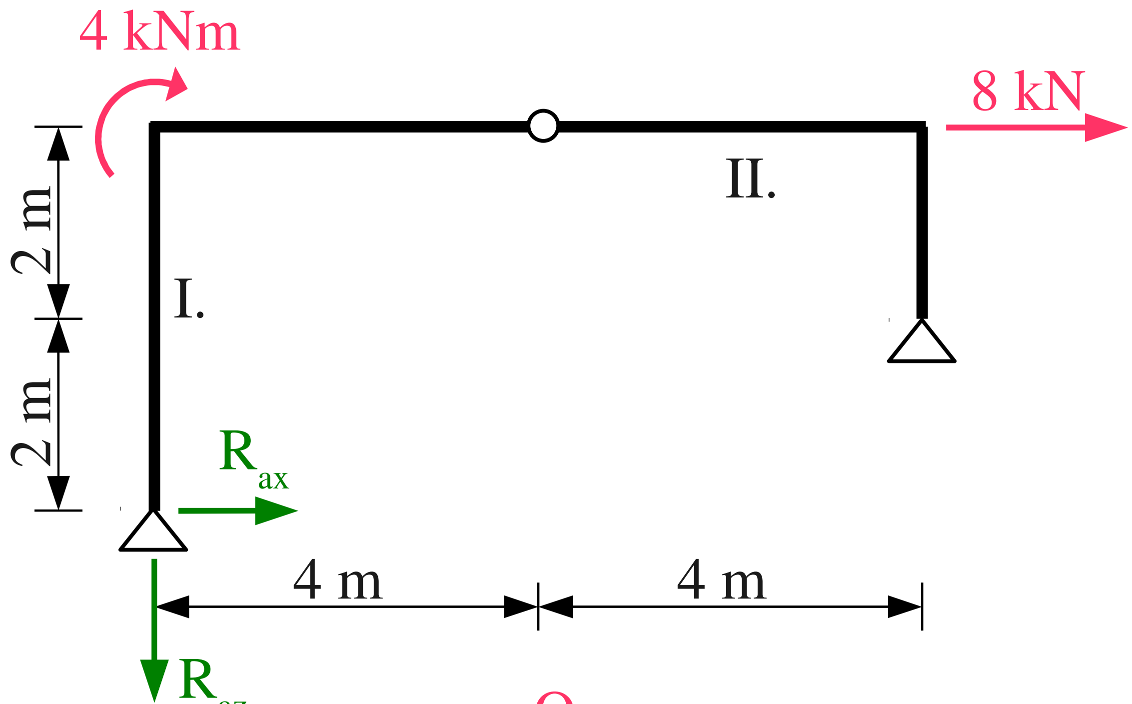


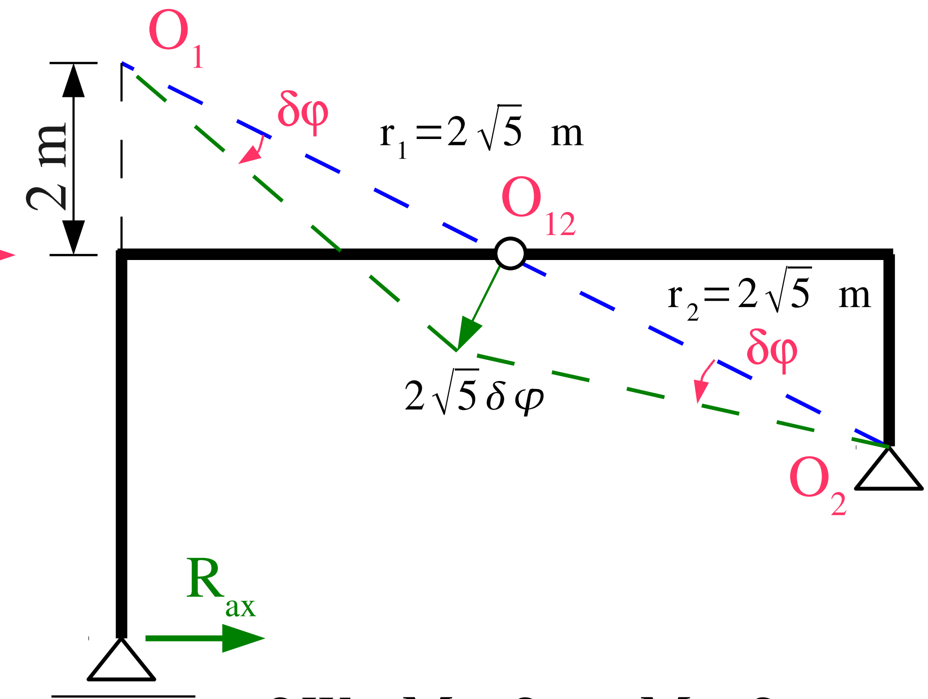
$$\delta W = \left(-1\cdot \mathbf{B}_z + 1\cdot 10 + 2{,}5\cdot 12 + 1{,}5\cdot 24 - 0{,}75\cdot 12 + 0{,}75\cdot 8\right)\delta w = 0,\quad \mathrm{B}_z = 73\,\mathrm{kN}$$



$$\delta W = \left(1\cdot \mathbf{M}_b - 2\cdot 10 - 5\cdot 12 - 3\cdot 24 + 1{,}5\cdot 12 - 1{,}5\cdot 8\right)\delta \varphi = 0,\quad \mathrm{M}_b = -146\,\mathrm{kN}$$

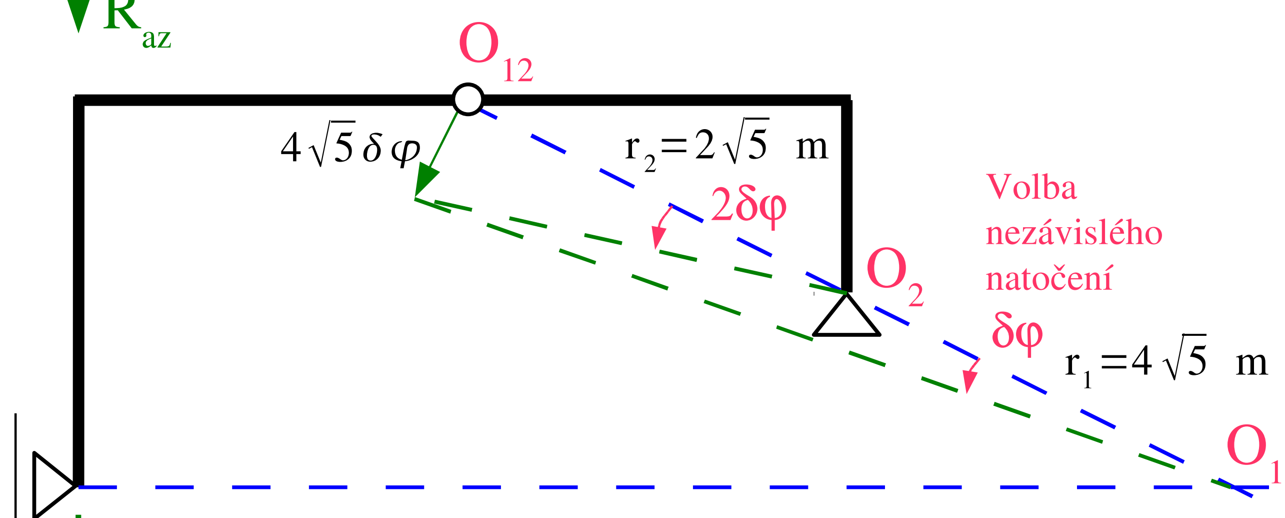
Určete reakce R_{ax} a R_{az} pomocí PVp





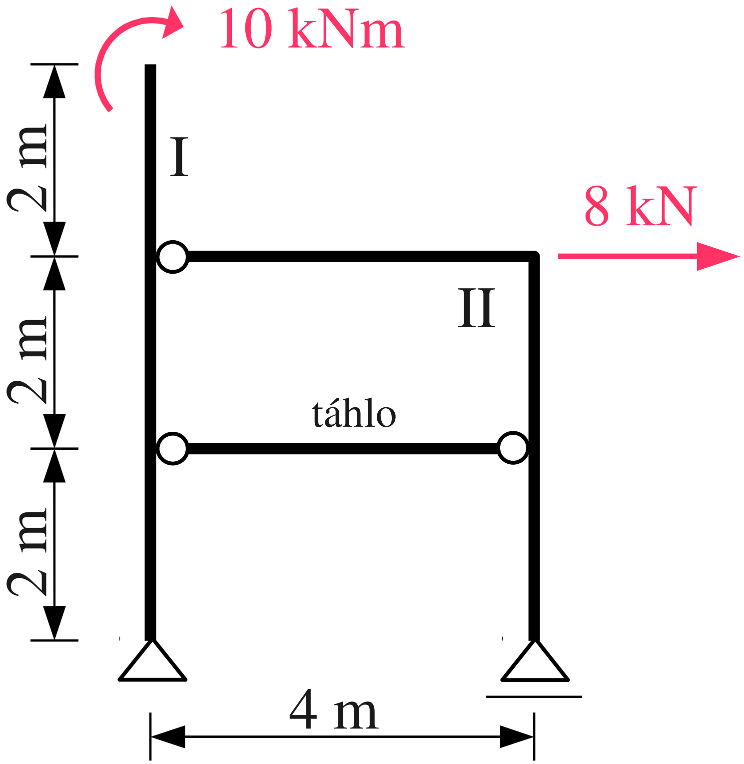
$$\delta W = M_{O1}\,\delta\varphi + M_{O2}\,\delta\varphi =$$
$$(4 - 6\,\mathbf{R_{ax}} - 2\cdot 8)\,\delta\varphi = 0$$
$$R_{ax} = -2\ \text{kN}$$

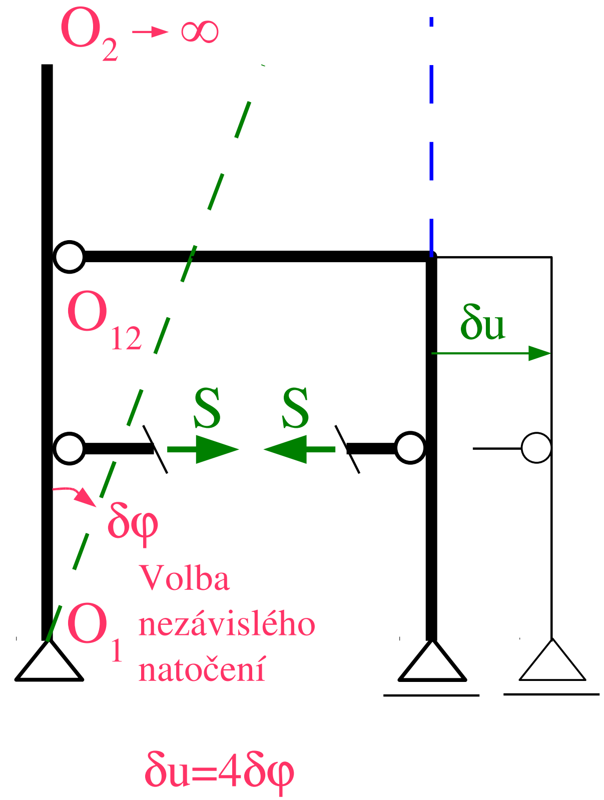
<u>Pozn.</u> v klasickém výpočtu reakcí je nutné řešit soustavu dvou rovnic



$$\delta W = M_{O1}\,\delta\varphi + M_{O2}\,2\,\delta\varphi = (12\,\mathbf{R_{az}} - 4 - 2\cdot 2\cdot 8)\,\delta\varphi = 0$$
$$R_{az} = 3\ \text{kN}$$

Určete sílu v táhle pomocí PVp





Virtuální přemístění na desce II vyjádříme kvůli nevlastnímu absolutnímu středu otáčení O_2 pomocí posunu δu

$$\delta W = M_{O1}\delta\varphi + F_x \delta u = (2\mathbf{S}+10)\delta\varphi + (8-\mathbf{S})\underbrace{\delta u}_{4\delta\varphi} = 0$$

$$\delta W = [(2-4)\mathbf{S} + 10 + 4\cdot 8]\delta\varphi = 0$$

$$-2\mathbf{S} + 42 = 0, \quad S = 21\,\mathrm{kN}$$

Otázky

- Lze na každé uvolněné tuhé desce vždy nalézt absolutní střed otáčení při libovolně zadaných virtuálních posunech a natočení ?
- Kde je vzájemný střed otáčení dvou desek ?
- Jak se pohlíží na kyvný prut, který spojuje dvě tuhé desky ?
- Kdy je vzájemný střed otáčení třech desek v nekonečnu ?
- Kolik vazeb můžeme nanejvýše uvolnit ve vetknutí prutu ?
- Lze poznat z kinematického mechanismu, které síly přispívají k určité reakci na Gerberově nosníku ?
- Kolik lineárně nezávislých podmínek z PVp lze sestavit na staticky určité soustavě tvořené ze třech tuhých desek ?
- Konají reakce ve vazbách virtuální práci ?

Přednášky z předmětu SM1, Stavební fakulta ČVUT v Praze

Autor Vít Šmilauer

Náměty, připomínky, úpravy, vylepšení zasílejte prosím na

vit.smilauer@fsv.cvut.cz

Created 12/2007 in OpenOffice 2.3, ubuntu linux 6.06

Last update Feb 21, 2011