

Úvod

Jan Stránský

D2030a

jan.stransky@fsv.cvut.cz

<http://mech.fsv.cvut.cz/~stransky>

konzultační hodiny: viz web

Zápočet

- 5 domácích úkolů
 - odevzdání na stránkách předmětu (kontrola) <http://mech.fsv.cvut.cz/student>
 - odevzdání písemně cvičícímu
 - vypracovat samostatně (doporučení), důvěryhodnost zdrojů (mrkev - neopisovat nesmysly)
 - úprava
 - grafy - popis os, jednotky, měřítko (alespoň zhruba)
 - **před odevzdáním zkontrolovat zadání, zda řešení obsahuje všechny body zadání**
- zápočtový test (min. 10/25, 1 možná oprava, body ke zkoušce)

Speciální cvičení

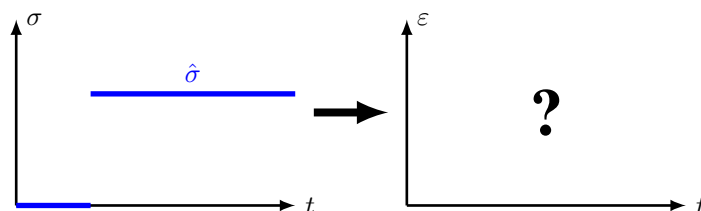
PPMA

Rozšíření lineární pružnosti o nepružné (plasticita, poškození, lomová mechanika) a časově závislé jevy (dotvarování). Základní modely pro popis.

Cvičení

Viskoelasticita, závislost na čase, rychlosti zatěžování ...

Dotvarovací zkouška



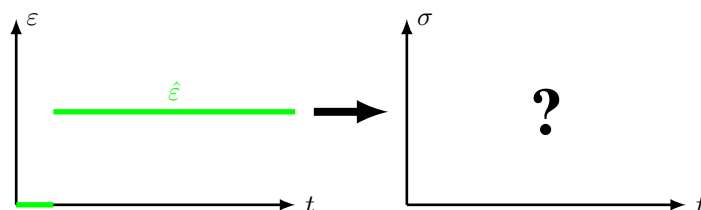
$$\sigma(t) = \hat{\sigma}, \dot{\sigma} = 0 \rightarrow \varepsilon(t),$$

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\hat{\sigma}}$$

$J(t)$... funkce poddajnosti

$[J] = 1/\text{Pa}$ (poddajnost)

Relaxační zkouška

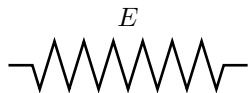


$$\varepsilon(t) = \hat{\varepsilon}, \dot{\varepsilon} = 0 \rightarrow \sigma(t),$$

$$R(t) = \frac{\sigma(t)}{\hat{\varepsilon}}$$

$R(t)$... relaxační funkce

$[R] = \text{Pa}$ (tuhost)

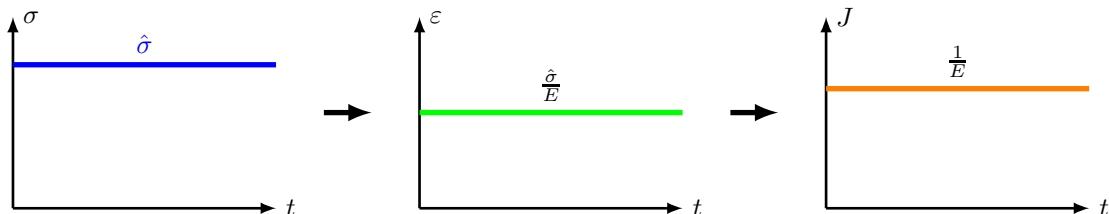
Pružina

$$[E] = \text{Pa}$$

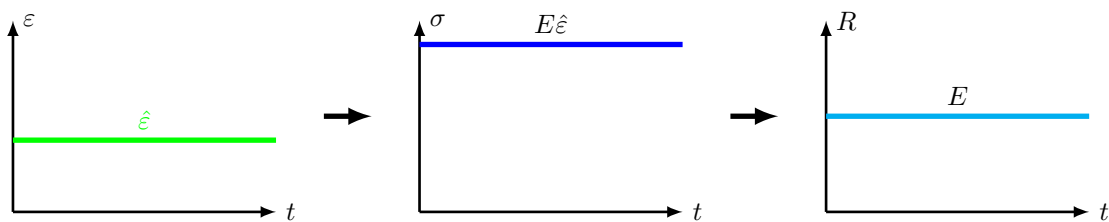
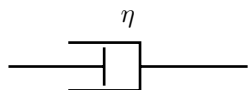
$$\sigma = E\varepsilon \rightarrow \dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}$$

Dotvarovací zkouška

$$\varepsilon(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E} \rightarrow J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\hat{\sigma}} = \frac{1}{E}$$

**Relaxační zkouška**

$$\sigma(t) = E\hat{\varepsilon} \rightarrow R(t) = \frac{\sigma(t)}{\hat{\varepsilon}} = E$$

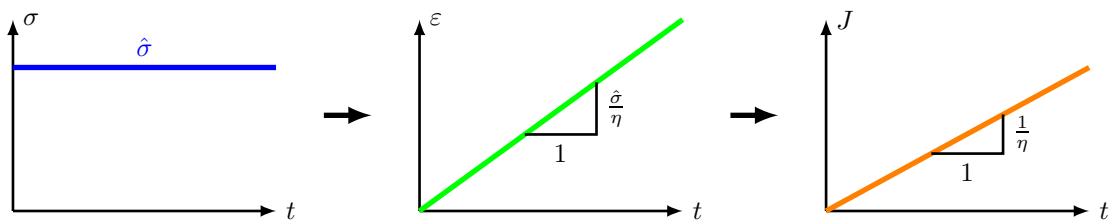
**Tlumič**

$$[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$$

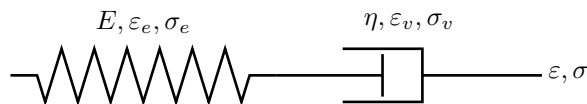
$$\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$$

Dotvarovací zkouška

$$\hat{\sigma} = \eta\dot{\varepsilon}, \varepsilon(0) = 0 \rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\hat{\sigma}}{\eta}t \rightarrow J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\hat{\sigma}} = \frac{t}{\eta}$$

**Relaxační zkouška**

pro tlumič nemá smysl

Maxwellův model

kinematické r.: $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v$ ($\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_v$)

materiálové r.: $\sigma_e = E\varepsilon_e$ ($\dot{\sigma}_e = E\dot{\varepsilon}_e$)

$\sigma_v = \eta\dot{\varepsilon}_v$

statické r.: $\sigma = \sigma_e$ ($\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_e$)

$\sigma = \sigma_v$ ($\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_v$)

kombinace rovnic (každou použít alespoň jednou)

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v \rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_v = \frac{\dot{\sigma}_e}{E} + \frac{\sigma_v}{\eta} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

Dotvarovací zkouška

$$\sigma(t) = \hat{\sigma}, \dot{\sigma} = 0$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\hat{\sigma}}{\eta}$$

$$\int d\varepsilon = \int \frac{\hat{\sigma}}{\eta} dt$$

$$\varepsilon = \frac{\hat{\sigma}}{\eta}t + C$$

$$\varepsilon(0) = \frac{\hat{\sigma}}{E} \rightarrow C = \frac{\hat{\sigma}}{E}$$

$$\varepsilon(t) = \hat{\sigma} \left(\frac{t}{\eta} + \frac{1}{E} \right)$$

$$J(t) = \frac{t}{\eta} + \frac{1}{E} = J_{\text{tlumič}}(t) + J_{\text{pružina}}(t)$$

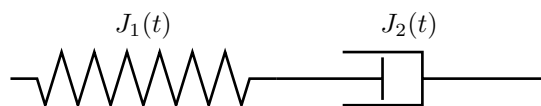
Analogie, sériové zapojení pružin



$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}$$

(celková poddajnost = součet dílčích poddajností)

↓



$$J(t) = J_1(t) + J_2(t)$$

(celková funkce poddajnost = součet dílčích funkcí poddajnosti)

Relaxační zkouška

$$\varepsilon(t) = \hat{\varepsilon}, \dot{\varepsilon} = 0$$

$$0 = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{E}{\eta}\sigma$$

$$\int \frac{d\sigma}{\sigma} = \int -\frac{E}{\eta} dt$$

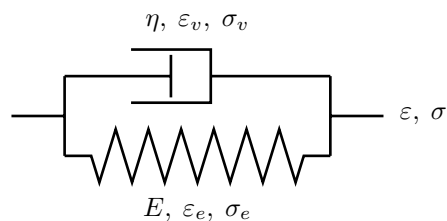
$$\ln \sigma = -\frac{E}{\eta}t + \overline{C} = \ln e^{-\frac{E}{\eta}t} + \ln C = \ln C e^{-\frac{E}{\eta}t}$$

$$\sigma = C e^{-\frac{E}{\eta}t}$$

$$\sigma(0) = E\hat{\varepsilon} \rightarrow C = E\hat{\varepsilon}$$

$$\sigma(t) = E e^{-\frac{E}{\eta}t} \hat{\varepsilon}$$

$$R(t) = E e^{-\frac{E}{\eta}t}$$

Kelvinův modelkinematické r.: $\varepsilon = \varepsilon_e$

$$\varepsilon = \varepsilon_v$$

materiálové r.: $\sigma_e = E\varepsilon_e$

$$\sigma_v = \eta\dot{\varepsilon}_v$$

statické r.: $\sigma = \sigma_e + \sigma_v$

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v = E\varepsilon_e + \eta\dot{\varepsilon}_v = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \rightarrow \sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$$

Dotvarovací zkouška

$$\sigma(t) = \hat{\sigma}, \dot{\sigma} = 0$$

$$\hat{\sigma} = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \rightarrow \dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta}\varepsilon = \frac{\hat{\sigma}}{\eta}$$

homogenní řešení

$$\dot{\varepsilon}_H = -\frac{E}{\eta}\varepsilon_H \rightarrow \varepsilon_H = Ce^{-\frac{E}{\eta}t}$$

partikulární řešení

$$\varepsilon_P = C_2 \rightarrow \dot{\varepsilon}_P = 0$$

$$\dot{\varepsilon}_P + \frac{E}{\eta}\varepsilon_P = \frac{\hat{\sigma}}{\eta}$$

$$0 + \frac{E}{\eta}C_2 = \frac{\hat{\sigma}}{\eta} \rightarrow C_2 = \varepsilon_P = \frac{\hat{\sigma}}{E}$$

celkové řešení

$$\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_P = Ce^{-\frac{E}{\eta}t} + \frac{\hat{\sigma}}{E}$$

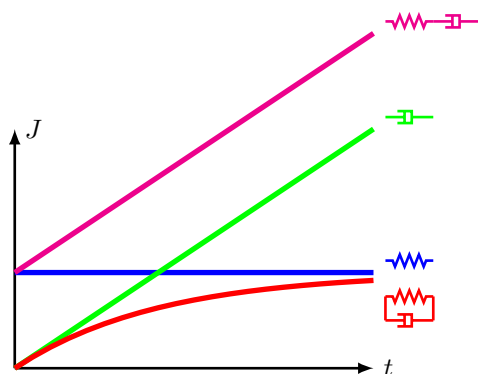
$$\varepsilon(0) = 0 \rightarrow C = -\frac{\hat{\sigma}}{E}$$

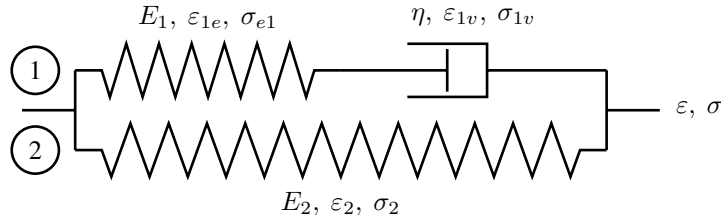
$$\varepsilon(t) = \frac{\hat{\sigma}}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right)$$

$$J(t) = \frac{1}{E} \left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right)$$

Relaxační zkouška

nemá smysl, stejně jako u tlumiče

Porovnání funkcí poddajnosti

Zenerův modelkinematické r.: $\varepsilon = \varepsilon_1$

$$\varepsilon = \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1e} + \varepsilon_{1v}$$

materiálové r.: $\sigma_{1e} = E_1 \varepsilon_{1e}$

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2$$

$$\sigma_{1v} = \eta \dot{\varepsilon}_{1v}$$

statické r.: $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$

$$\sigma_1 = \sigma_{1e}$$

$$\sigma_1 = \sigma_{1v}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_{1e} + \sigma_2 = E_1 \varepsilon_{1e} + E_2 \varepsilon_2 = E_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_{1v}) + E_2 \varepsilon_2 = E_1 (\varepsilon - \varepsilon_{1v}) + E_2 \varepsilon \\ \dot{\sigma} &= E_1 (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{1v}) + E_2 \dot{\varepsilon} = E_1 \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma_{1v}}{\eta} \right) + E_2 \dot{\varepsilon} = E_1 \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma_1}{\eta} \right) + E_2 \dot{\varepsilon} = E_1 \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma - \sigma_2}{\eta} \right) + E_2 \dot{\varepsilon} = \\ &= E_1 \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma - E_2 \varepsilon_2}{\eta} \right) + E_2 \dot{\varepsilon} = E_1 \left(\dot{\varepsilon} - \frac{\sigma - E_2 \varepsilon}{\eta} \right) + E_2 \dot{\varepsilon} \\ \dot{\sigma} + \frac{E_1}{\eta} \sigma &= (E_1 + E_2) \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta} \varepsilon \end{aligned}$$

Dotvarovací zkouška

$$\sigma(t) = \hat{\sigma}, \dot{\sigma} = 0$$

$$\frac{E_1}{\eta} \hat{\sigma} = (E_1 + E_2) \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta} \varepsilon$$

homogenní řešení

$$0 = (E_1 + E_2) \dot{\varepsilon}_H + \frac{E_1 E_2}{\eta} \varepsilon_H \rightarrow \dot{\varepsilon}_H = -\frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2) \eta} \varepsilon_H \rightarrow \varepsilon_H = C e^{-\frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2) \eta} t}$$

partikulární řešení

$$\varepsilon_P = C_2, \dot{\varepsilon}_P = 0$$

$$\frac{E_1}{\eta} \hat{\sigma} = (E_1 + E_2) \dot{\varepsilon}_P + \frac{E_1 E_2}{\eta} \varepsilon_P$$

$$\frac{E_1}{\eta} \hat{\sigma} = \frac{E_1 E_2}{\eta} C_2 \rightarrow C_2 = \varepsilon_P = \frac{1}{E_2} \hat{\sigma}$$

celkové řešení

$$\varepsilon = \varepsilon_H + \varepsilon_P = C e^{-\frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2) \eta} t} + \frac{1}{E_2} \hat{\sigma}$$

$$\varepsilon(0) = \frac{\hat{\sigma}}{E_1 + E_2} \rightarrow C = \hat{\sigma} \left(\frac{1}{E_1 + E_2} - \frac{1}{E_2} \right)$$

$$\varepsilon(t) = \hat{\sigma} \left[\frac{1}{E_2} + \left(\frac{1}{E_1 + E_2} - \frac{1}{E_2} \right) e^{-\frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2) \eta} t} \right]$$

$$J(t) = \frac{1}{E_2} + \left(\frac{1}{E_1 + E_2} - \frac{1}{E_2} \right) e^{-\frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2) \eta} t}$$

Relaxační zkouška

$$\varepsilon(t) = \hat{\varepsilon}, \dot{\varepsilon} = 0$$

$$\dot{\sigma} + \frac{E_1}{\eta} \sigma = \frac{E_1 E_2}{\eta} \hat{\varepsilon}$$

homogenní řešení

$$\dot{\sigma}_H + \frac{E_1}{\eta} \sigma_H = 0 \rightarrow \sigma_H = C e^{-\frac{E_1}{\eta} t}$$

partikulární řešení

$$\sigma_P = C_2, \dot{\sigma}_P = 0$$

$$\dot{\sigma}_P + \frac{E_1}{\eta} \sigma_P = \frac{E_1 E_2}{\eta} \hat{\varepsilon} \rightarrow \frac{E_1}{\eta} C_2 = \frac{E_1 E_2}{\eta} \hat{\varepsilon} \rightarrow C_2 = E_2 \hat{\varepsilon}$$

celkové řešení

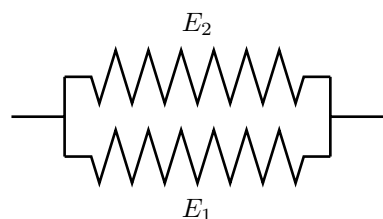
$$\sigma = \sigma_H + \sigma_P = C e^{-\frac{E_1}{\eta} t} + E_2 \hat{\varepsilon}$$

$$\sigma(0) = (E_1 + E_2) \hat{\varepsilon} \rightarrow C = E_1 \hat{\varepsilon}$$

$$\sigma(t) = \left(E_1 e^{-\frac{E_1}{\eta} t} + E_2 \right) \hat{\varepsilon}$$

$$R(t) = E_1 e^{-\frac{E_1}{\eta} t} + E_2 = R_{\text{Maxwell}}(t) + R_{\text{pružina}}(t)$$

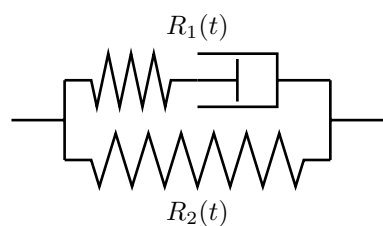
Analogie, paralelní zapojení pružin



$$E = E_1 + E_2$$

(celková tuhost = součet dílčích tuhostí)

↓



$$R(t) = R_1(t) + R_2(t)$$

(celková relaxační funkce = součet dílčích relaxačních funkcí)

V případě nalezení chyb, nejasností či dotazů mi prosím napište na jan.stransky@fsv.cvut.cz

verze 02, 24.9.2014