

Úvod

Jan Stránský

D2030a

jan.stransky@fsv.cvut.cz

<http://mech.fsv.cvut.cz/~stransky>

konzultace viz web

Zápočet

- 10 domácích úkolů
 - odevzdání na stránkách předmětu (kontrola) <http://mech.fsv.cvut.cz/student>
 - odevzdání písemně cvičícímu
 - vypracovat smostatně (doporučení), důvěryhodnost zdrojů (mrkev)
- 2 zápočtové testy (min. 14/34, při <17 → +3 domácí úkoly)

Speciální cvičení

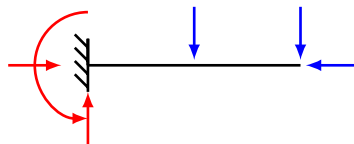
Cvičení

Motivace

Staticky určité konstrukce

počet neznámých reakcí = počet podmínek rovnováhy → podmínky rovnováhy jsou dostačující

Příklad:

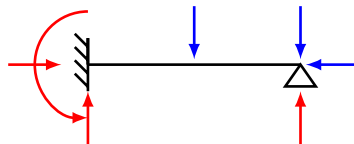


3 neznámé reakce, 3 podmínky rovnováhy ($\rightarrow, \uparrow, \curvearrowleft$) → OK

Staticky neurčitá konstrukce

počet neznámých reakcí > počet podmínek rovnováhy → podmínky rovnováhy nestačí

Příklad:



4 neznámé reakce, 3 podmínky rovnováhy ($\rightarrow, \uparrow, \curvearrowleft$) → podmínky rovnováhy nestačí

Jednoduché konstrukce lze řešit integrací ohybové čáry (viz PRPE), pro větší konstrukce nepraktické.

Shrnutí a důsledky

Staticky určité konstrukce

- lze vyřešit z podmínek rovnováhy
- vnitřní síly a reakce **nezávisí** na tuhosti konstrukce

Staticky neurčitá konstrukce

- **nelze** vyřešit z podmínek rovnováhy, jsou potřeba další podmínky
- vnitřní síly a reakce **závisí** na tuhosti konstrukce

SM3

Systematické metody pro řešení staticky neurčitých konstrukcí

Opakování PRPE

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -f_z(x) \quad \rightarrow \quad [10] \quad Q(x) = - \int f_z(x) dx$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = Q(x) \quad \rightarrow \quad [10] \quad M(x) = \int Q(x) dx$$

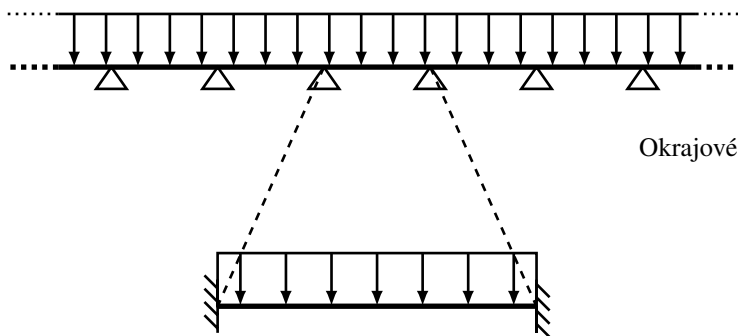
$$M(x) = EI\kappa(x) \quad \rightarrow \quad [10] \quad \kappa(x) = \frac{1}{EI}M(x)$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \kappa(x) \quad \rightarrow \quad [10] \quad \varphi(x) = \int \kappa(x) dx$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = -\varphi(x) \quad \rightarrow \quad [10] \quad w(x) = - \int \varphi(x) dx$$

$$EIw^{(4)}(x) = f_z(x)$$

Příklad 1



Okrajové podmínky:

$$w(0) = 0$$

$$\varphi(0) = 0$$

$$w(L) = 0$$

$$\varphi(L) = 0$$

$$f_z(x) = f$$

$$Q(x) = - \int f_z(x) dx = -fx + C_1$$

$$M(x) = \int Q(x) dx = -\frac{1}{2}fx^2 + C_1x + C_2$$

$$\kappa(x) = \frac{1}{EI}M(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}fx^2 + C_1x + C_2 \right)$$

$$\varphi(x) = \int \kappa(x) dx = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6}fx^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x \right) + C_3$$

$$w(x) = \int \varphi(x) dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{24}fx^4 - \frac{1}{6}C_1x^3 - \frac{1}{2}C_2x^2 \right) - C_3x + C_4$$

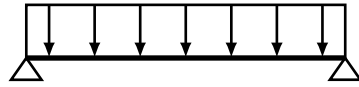
$$w(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

$$\varphi(0) = 0 \rightarrow C_3 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} w(L) = 0 \rightarrow \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{24}fL^4 - \frac{1}{6}C_1L^3 - \frac{1}{2}C_2L^2 \right) = 0 \\ \varphi(L) = 0 \rightarrow \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6}fL^3 + \frac{1}{2}C_1L^2 + C_2L \right) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 = -\frac{1}{12}fL^2 \\ C_2 = \frac{1}{2}fL \end{array} \right.$$

- $C_1, C_2 \dots$ viz tabulky
- odhad průběhu momentu z tvaru průhybové čáry

Srovnání s prostým nosníkem



Okrajové podmínky:

$$w(0) = 0$$

$$M(0) = 0$$

$$w(L) = 0$$

$$M(L) = 0$$

$$f_z(x) = f$$

$$Q(x) = - \int f_z(x) dx = -fx + C_1$$

$$M(x) = \int Q(x) dx = -\frac{1}{2}fx^2 + C_1x + C_2$$

$$\kappa(x) = \frac{1}{EI}M(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}fx^2 + C_1x + C_2 \right)$$

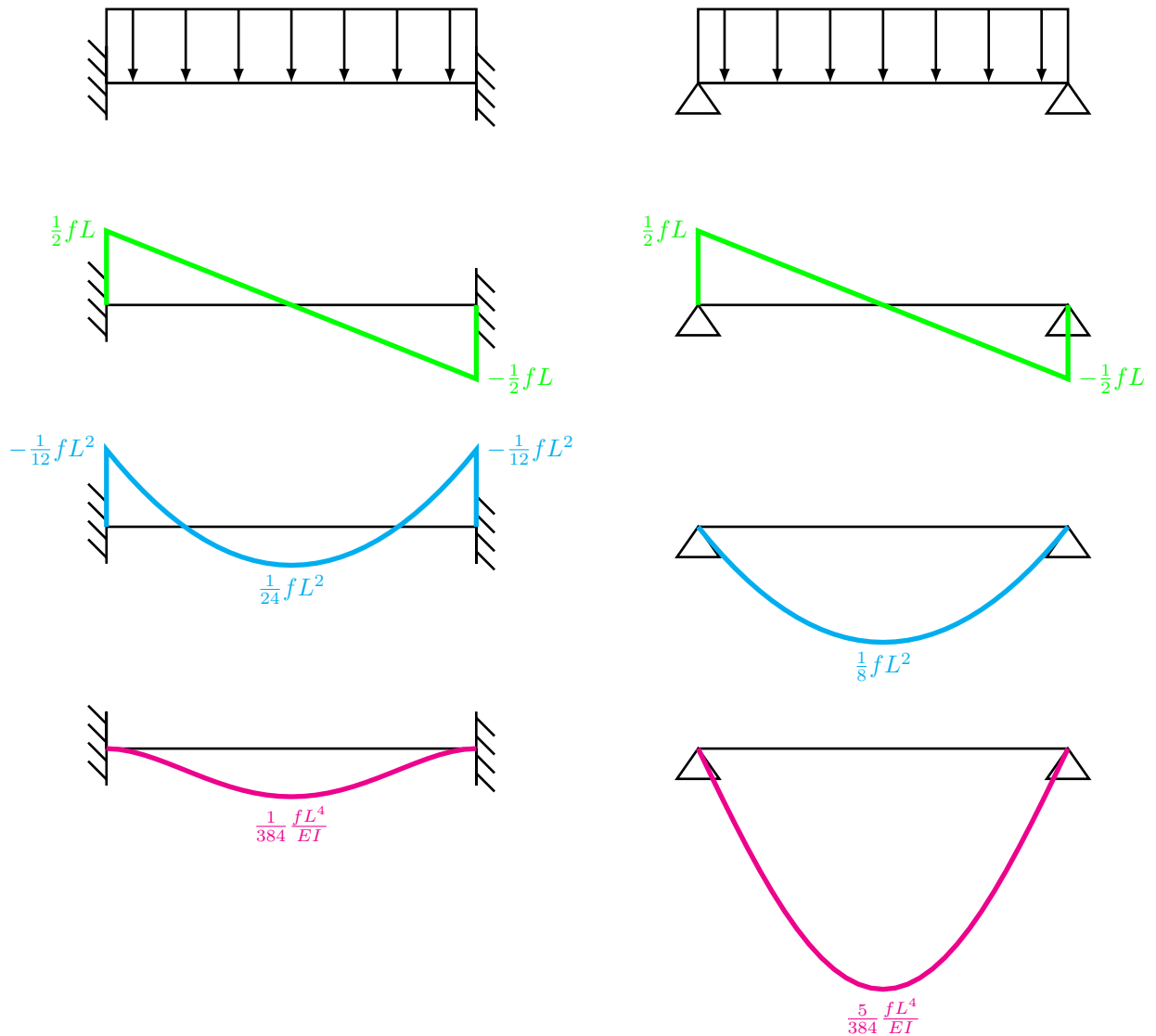
$$\varphi(x) = \int \kappa(x) dx = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6}fx^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x \right) + C_3$$

$$w(x) = \int \varphi(x) dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{24}fx^4 - \frac{1}{6}C_1x^3 - \frac{1}{2}C_2x^2 \right) - C_3x + C_4$$

$$w(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

$$M(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

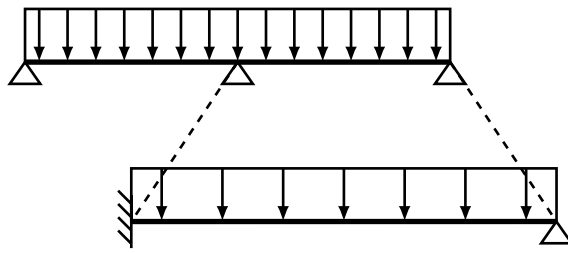
$$\left. \begin{array}{l} w(L) = 0 \rightarrow \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{24}fL^4 - \frac{1}{6}C_1L^3 \right) - C_3L = 0 \\ M(L) = 0 \rightarrow -\frac{1}{2}fL^2 + C_1L = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{1}{2}fL \\ C_3 = -\frac{1}{24} \frac{fL^3}{EI} \end{array} \right.$$



Významné body - nulová hodnota (resp. změna znaménka) jedné veličiny → významný bod pro jinou veličinu:

- $Q = 0$ → extrémní M
- $M = 0$ → změna konvexity/konkávity průhybu

Příklad 2



Okrajové podmínky:

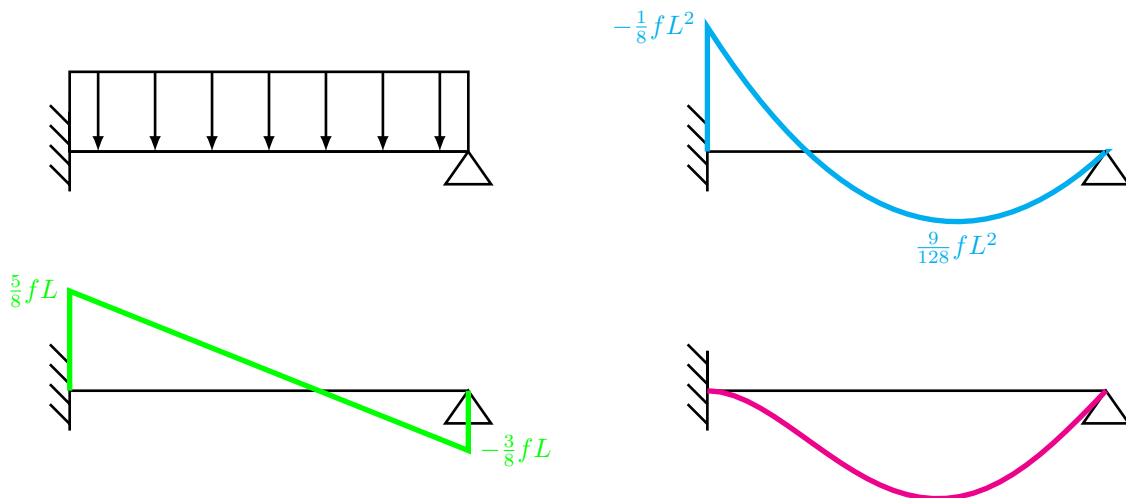
$$\begin{aligned} w(0) &= 0 \\ \varphi(0) &= 0 \\ w(L) &= 0 \\ M(L) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_z(x) &= f \\ Q(x) &= - \int f_z(x) dx = -fx + C_1 \\ M(x) &= \int Q(x) dx = -\frac{1}{2}fx^2 + C_1x + C_2 \\ \kappa(x) &= \frac{1}{EI}M(x) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{2}fx^2 + C_1x + C_2 \right) \\ \varphi(x) &= \int \kappa(x) dx = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6}fx^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x \right) + C_3 \\ w(x) &= \int \varphi(x) dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{24}fx^4 - \frac{1}{6}C_1x^3 - \frac{1}{2}C_2x^2 \right) - C_3x + C_4 \end{aligned}$$

(to samé jako minule)

$$\begin{aligned} w(0) = 0 &\rightarrow C_4 = 0 \\ \varphi(0) = 0 &\rightarrow C_3 = 0 \\ \left. \begin{aligned} w(L) = 0 &\rightarrow \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{24}fL^4 - \frac{1}{6}C_1L^3 - \frac{1}{2}C_2L^2 \right) = 0 \\ M(L) = 0 &\rightarrow -\frac{1}{2}fL^2 + C_1L + C_2 = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{5}{8}fL \\ C_2 = -\frac{1}{8}fL^2 \end{cases} \end{aligned}$$

- $C_1, C_2 \dots$ viz tabulky
- odhad průběhu momentu z tvaru průhybové čáry
- poloha a hodnota momentového extrému



Příklad 3



Okrajové podmínky:
 $w(0) = 0$
 $\varphi(0) = \bar{\varphi}$
 $w(L) = 0$
 $M(L) = 0$

$$f_z(x) = 0$$

$$Q(x) = - \int f_z(x) dx = C_1$$

$$M(x) = \int Q(x) dx = C_1x + C_2$$

$$\kappa(x) = \frac{1}{EI}M(x) = \frac{1}{EI} (C_1x + C_2)$$

$$\varphi(x) = \int \kappa(x) dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x \right) + C_3$$

$$w(x) = \int \varphi(x) dx = \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6}C_1x^3 - \frac{1}{2}C_2x^2 \right) - C_3x + C_4$$

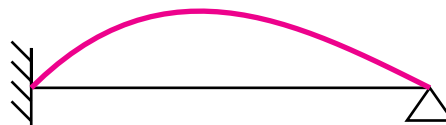
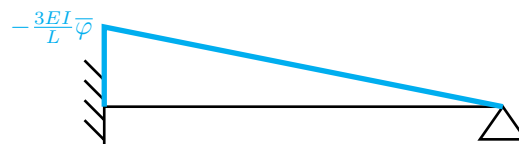
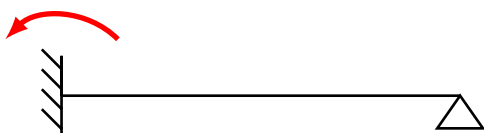
(skoro to samé jako minule)

$$w(0) = 0 \rightarrow C_4 = 0$$

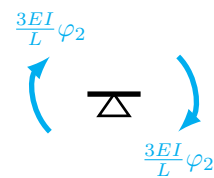
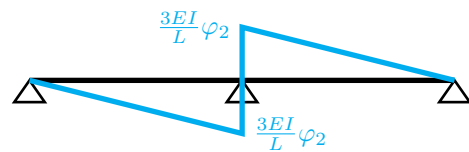
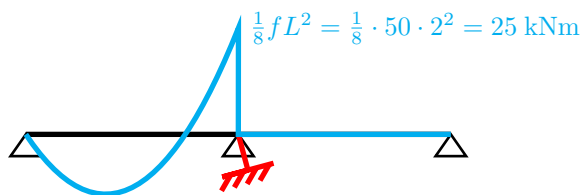
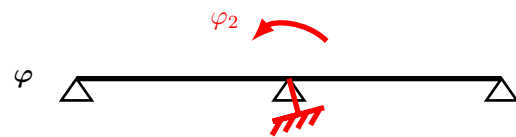
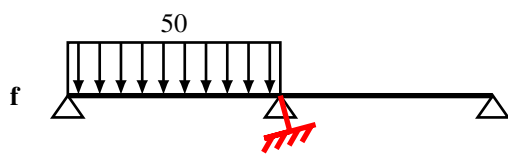
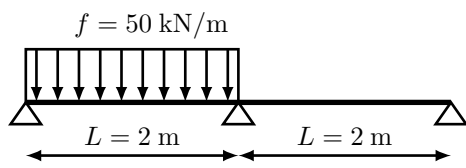
$$\varphi(0) = \bar{\varphi} \rightarrow C_3 = \bar{\varphi}$$

$$\left. \begin{array}{l} w(L) = 0 \rightarrow \frac{1}{EI} \left(-\frac{1}{6}C_1L^3 - \frac{1}{2}C_2L^2 \right) - \bar{\varphi}L = 0 \\ M(L) = 0 \rightarrow C_1L + C_2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{3EI}{L^2}\bar{\varphi} \\ C_2 = -\frac{3EI}{L}\bar{\varphi} \end{array} \right.$$

- $C_1, C_2 \dots$ viz tabulky
- odhat průběhu momentu z tvaru průhybové čáry



Příklad 4



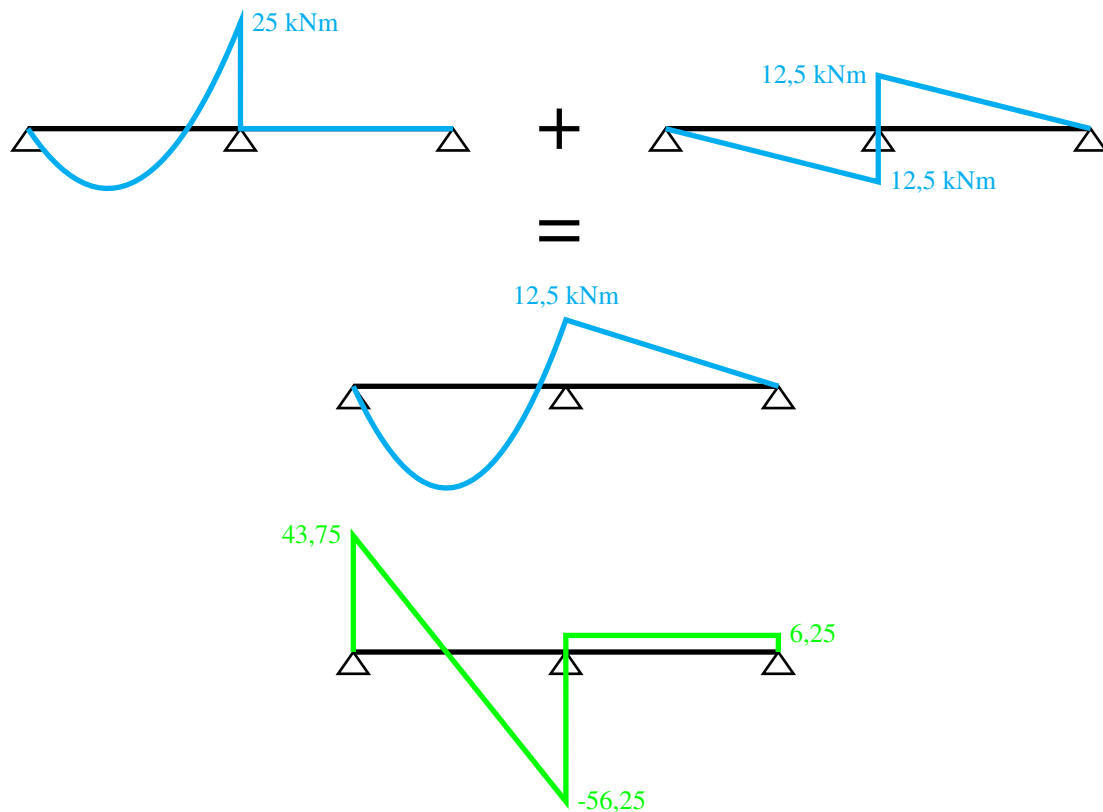
Momentová podmínka rovnováhy $\hat{2}$:

$$25 - \frac{3EI}{L} \varphi_2 - \frac{3EI}{L} \varphi_2 = 0$$

$$25 - \frac{6EI}{L} \varphi_2 = 0$$

$$25 - \frac{6 \cdot 25}{2} \varphi_2 = 0$$

$$\varphi_2 = 0,3333 \text{ mrad}, \quad \frac{3EI}{L} \varphi_2 = \frac{3 \cdot 35}{2} 0,3333 = 12,5 \text{ kNm}$$



$$\frac{x_{ext}}{L} = \frac{43,75}{43,75 + 56,25} \rightarrow x_{ext} = 2 \frac{43,75}{43,75 + 56,25} = 0,875 \text{ m}$$

$$\left(\frac{x_{ext}}{L} = \frac{Q(0)}{fL} \rightarrow x_{ext} = \frac{Q(0)}{f} \right)$$

$$M_{ext} = M(0) + \int Q dx = 0 + \frac{1}{2} x_{ext} Q(0) = \frac{1}{2} \cdot 0,875 \cdot 43,75 = 19,14 \text{ kNm}$$

$$\left(M_{ext} = \frac{1}{2} x_{ext} Q(0) = \frac{1}{2} \frac{Q(0)^2}{f} \right)$$

Námět: vnitřní síly pro různé tuhosti jednotlivých polí

V případě nalezení chyb, nejasností či dotazů mi prosím napište na jan.stransky@fsv.cvut.cz

verze 01, 18.2.2015