

Homogenizace prizmatické konzoly

Alena Somolová, Ing. Jan Zeman, Ph.D.

Katedra stavební mechaniky

Fakulta stavební

České vysoké učení technické v Praze

Anotace

Homogenizační metody se v posledních desetiletích ukázaly jako velmi vhodný nástroj pro modelování heterogenních materiálů. Cílem tohoto příspěvku je představit a detailně ilustrovat základní principy těchto metod na velmi jednoduchém příkladu ohybu heterogenní konzoly složené ze dvou materiálů.

Summary

Homogenization methods have proven themselves to be valuable approaches to modeling and simulation of heterogeneous materials. In the present contribution, the fundamental principles of these methods are thoroughly illustrated on a simple example of bending of a heterogeneous cantilever beam composed from two materials.

Die Zusammenfassung (Die Annotation)

Die Homogenisierungsmethoden haben sich im letzten Jahrzehnt als ein sehr geeignetes Instrument für das Simulieren der heterogenen Materialien herausgestellt. Das Ziel dieses Beitrages ist die Vorstellung und die ausführliche Illustration der elementaren Prinzipien dieser Methode an einem einfachen Beispiel der Biegung der heterogenen Konsole, die aus zwei Materialien zusammengesetzt ist.

Klíčová slova : Homogenizace, ohybová rovnice, chyba homogenizovaného řešení.

1. Úvod

Kompozitní materiály, jako například kompozity vyztužené vlákny a textiliemi, získávají ve stavebnictví stále na větší důležitosti především v oblasti zesilování a rekonstrukci staveb a návrhu konstrukcí v extrémních situacích [1,2]. V posledních letech se též přístupu teorie

kompozitních materiálů stále ve větší míře využívá i při modelování tradičních stavebních materiálů jako je např. beton nebo zdivo. Proto je pochopení a následná předpověď odezvy heterogenních materiálů nezbytným předpokladem k racionálnímu návrhu inženýrských konstrukcí obecně. Jako jedna z nejpoužívanějších metod modelování heterogenních materiálů jsou tzv. *homogenizační metody*, které nahrazují komplikovaný heterogenní materiál jistým fiktivním *homogenizovaným* materiálem, jehož vlastnosti odrážejí vlastnosti jednotlivých složek materiálu a jejich geometrického uspořádání.

V literatuře lze najít celou řadu publikací a textů vztahujících se k teorii homogenizace heterogenních materiálů. První skupina pochází z oblasti aplikované matematiky [3-5]. Zde je odezva homogenizované konstrukce chápána jako (vhodně definovaná) limita odezvy heterogenní konstrukce, kdy se velikost charakteristického rozměru materiálové heterogenity blíží nule. Druhá skupina, vycházející spíše z fyzikálních a inženýrských přístupů, je pak typicky založena na předpokladu konstantního průběhu průměrných polí (např. napětí a deformace) na délkách odpovídajících charakteristické velikosti složek materiálu [6-8]. Obě tyto skupiny publikací jsou však podle našeho názoru poněkud komplikované pro úvod do této problematiky, jelikož předpokládají netriviální znalosti aplikované mechaniky nebo matematiky, případně obou.

Cílem tohoto textu je demonstrovat na co nejjednodušším příkladu základní principy homogenizace konstrukcí složených z nehomogenních materiálů. Naší hlavní snahou bylo, aby pochopení textu vyžadovalo znalost jen základních principů stavební mechaniky a teorie pružnosti (např. v rozsahu [9]). Proto jsou veškerá odvození a úpravy prováděny poněkud podrobněji než je v odborných publikacích běžné, a to s cílem přiblížit tuto problematiku čtenáři, který nemá hlubší znalosti v této oblasti. Dalším důvodem volby tohoto jednoduchého příkladu je možnost názorného porovnání homogenizovaného řešení s řešením přesným, které lze vyjádřit v uzavřeném tvaru. To je ve vícerozměrných případech prakticky nemožné.

Vlastní článek je uspořádán následujícím způsobem. V další kapitole je představena formulace problému ohýbané heterogenní konzoly spolu s motivací homogenizovaného problému. Ve třetí kapitole je uvedeno přesné řešení formulovaného problému. Obsahem čtvrté kapitoly je názorný výklad získání homogenizovaných vlastností pomocí limitního přechodu, tedy v duchu matematické teorie homogenizace. Pátá kapitola pak demonstruje inženýrský přístup k homogenizaci. V šesté kapitole je prezentována řada příkladů ilustrujících získané výsledky.

2. Formulace problému

Uvažujme nehomogenní prizmatickou konzolu délky l skládající se z n intervalů z materiálů s rozdílným modulem pružnosti E_i (pro $i=0$ a i sudé nabývá hodnoty E_A , pro i liché E_B). Bez újmy na obecnosti prezentovaných výsledků je pro jednoduchost uvažována konstrukce s průřezem charakterizovaným konstantním momentem setrvačnosti I . Konzola je zatížena spojitým rovnoměrným silovým zatížením f (viz obr. 1).

Obr. 1 Schéma heterogenní konzoly

Obr. 2 Schéma homogenizované konzoly

Princip homogenizace spočívá v nalezení homogenních parametrů (např. modulu pružnosti), které co nejlépe charakterizují chování původní konstrukce, a v jejich použití při dalších výpočtech. Tím se následné výpočty značně urychlí, neboť získat přesné řešení je velmi pracné a náročné (viz kapitola 3) i při použití výpočetní techniky a v některých případech je s ohledem na dosavadní technické možnosti nalezení přesného řešení nemožné.

V tomto jednoduchém příkladu budeme homogenizovaným modelem konstrukce rozumět konzolu s (zatím neznámým) homogenním modulem pružnosti E_H (viz obr. 2). Délka konzoly, moment setrvačnosti průřezu i působící zatížení zůstávají stejné jako u nehomogenní konzoly.

3. Řešení pro obecné n

Průběh ohybových momentů $M(x)$ na dané konstrukci je vyjádřen vztahem

$$M(x) = -\frac{f}{2}(l^2 - 2xl + x^2). \quad (1)$$

Po dosazení tohoto momentu do ohybové rovnice (viz např. [9], strana 77)

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{E(x)I}, \quad (2)$$

získáme vztah

$$w''(x) = \frac{1}{E(x)I} \frac{f}{2}(x^2 - 2xl + l^2), \quad (3)$$

odkud určíme postupnou integrací rovnice pro pootočení a průhyb konzoly v libovolném bodě x

$$w'_i(x) = \frac{1}{E_i I} \frac{f}{2} \left(\frac{x^3}{3} - x^2 l + x l^2 \right) + c_i, \quad (4)$$

$$w_i(x) = \frac{1}{E_i I} \frac{f}{2} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} l + \frac{x^2}{2} l^2 \right) + c_i x + d_i, \quad (5)$$

kde $w_i(x)$ a $w'_i(x)$ označují průhyb a pootočení i -tého intervalu, $i=0, \dots, (n-1)$ (n je počet intervalů na konzole) a c_i, d_i jsou integrační konstanty na příslušném intervalu. Tyto konstanty získáme použitím okrajových podmínek a podmínek spojitosti průhybů a pootočení mezi jednotlivými intervaly.

Připomeňme, že okrajové podmínky ve vetknutí jsou

- pro pootočení

$$w'_0(0) = 0, \quad (6)$$

- pro průhyb

$$w_0(0) = 0. \quad (7)$$

Podmínky spojitosti na rozhraní intervalů mají tvar ($x=i\Delta l, i=1, \dots, (n-1)$, kde $\Delta l=l/n$)

- pro pootočení

$$w'_{i-1}(x) = w'_i(x), \quad (8)$$

- pro průhyb

$$w_{i-1}(x) = w_i(x) \quad (9)$$

První dvě konstanty získáme z okrajových podmínek. Pro interval $i=0$ dosadíme $x=0$ do rovnic pro pootočení a průhyb (4) a (5) a použitím okrajových podmínek (6) a (7) získáme

$$w'_0(0) = c_0 = 0,$$

$$w_0(0) = d_0 = 0.$$

Vzájemný vztah mezi zbylými $2(n-1)$ integračními konstantami lze získat použitím podmínek spojitosti. Dosazením $x=i\Delta l$ do rovnic (4) a (5) dostáváme

- pro interval ($i-1$)

$$w'_{i-1}(i\Delta l) = \frac{1}{E_{i-1} I} \frac{f}{2} \left(\frac{i^3 \Delta l^3}{3} - i^2 \Delta l^2 n \Delta l + i \Delta l n^2 \Delta l^2 \right) = \frac{1}{E_{i-1} I} \frac{f}{2} \Delta l^3 \left(\frac{i^3}{3} - i^2 n + i n^2 \right) + c_{i-1},$$

$$w_{i-1}(i\Delta l) = \frac{1}{E_{i-1}I} \frac{f}{2} \left(\frac{i^4 \Delta l^4}{12} - \frac{i^3 \Delta l^3}{3} n \Delta l + \frac{i^2 \Delta l^2}{2} n^2 \Delta l^2 \right) = \frac{1}{E_{i-1}I} \frac{f}{2} \Delta l^4 \left(\frac{i^4}{12} - \frac{i^3}{3} n + \frac{i^2}{2} n^2 \right) + {}_{i-1}x + d_{i-1},$$

- pro interval i

$$w'_i(i\Delta l) = \frac{1}{E_i I} \frac{f}{2} \left(\frac{i^3 \Delta l^3}{3} - i^2 \Delta l^2 n \Delta l + i \Delta l n^2 \Delta l^2 \right) = \frac{1}{E_i I} \frac{f}{2} \Delta l^3 \left(\frac{i^3}{3} - i^2 n + i n^2 \right) + c_i,$$

$$w_i(i\Delta l) = \frac{1}{E_i I} \frac{f}{2} \left(\frac{i^4 \Delta l^4}{12} - \frac{i^3 \Delta l^3}{3} n \Delta l + \frac{i^2 \Delta l^2}{2} n^2 \Delta l^2 \right) = \frac{1}{E_i I} \frac{f}{2} \Delta l^4 \left(\frac{i^4}{12} - \frac{i^3}{3} n + \frac{i^2}{2} n^2 \right) + {}_i x + d_i.$$

Použitím podmínek spojitosti (8) a (9) a po rozvážení vztahu mezi moduly pružnosti E_A a E_B na jednotlivých intervalech snadno získáme po několika početních úpravách vztahy pro integrační konstanty ve tvaru

$$c_i = c_{i-1} + (-1)^{i+1} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \frac{f}{2I} \Delta l^3 \left(\frac{i^3}{3} - i^2 n + i n^2 \right),$$

$$d_i = d_{i-1} - i \Delta l (-1)^{i+1} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \frac{f}{2I} \Delta l^3 \left(\frac{i^3}{3} - i^2 n + i n^2 \right) + (-1)^{i+1} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \frac{f}{2I} \Delta l^4 \left(\frac{i^4}{12} - \frac{i^3}{3} n + \frac{i^2}{2} n^2 \right).$$

Označíme-li

$${}_i = (-1)^{i+1} \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_B} \right) \frac{f}{2} \Delta l^3 \left(\frac{i^3}{3} - i^2 n + i n^2 \right) \quad (10)$$

a

$$B_i = (-1)^{i+1} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \frac{f}{2I} \Delta l^4 \left(\frac{i^4}{12} - \frac{i^3}{3} n + \frac{i^2}{2} n^2 \right), \quad (11)$$

můžeme psát vztahy pro integrační konstanty v následujícím tvaru

$${}_i = {}_{i-1} + A_i, \quad c_i = 0,$$

tedy

$${}_i = \sum_{k=0}^i A_k \quad (12)$$

a

$${}_i = {}_{i-1} - i \Delta l {}_i + B_i, \quad d_i = 0,$$

po úpravě

$$i = \sum_{k=0}^i (B_k - \Delta A_k). \quad (13)$$

Tímto postupem získáváme vztahy pro průhyb v libovolném bodě x konzoly pro obecné n .

4. Homogenizace pomocí průhybu na konci

V této části představíme první možnost odvození vztahu pro homogenizovaný modul pružnosti E_H . Vztah pro E_H určíme z podmínky rovnosti přesného a homogenizovaného průhybu na konci konzoly ($x=l$)

$$w_{n-1}(l) = w_H(l). \quad (14)$$

pro $\rightarrow \infty$. Průhyb nehomogenní konzoly w_{n-1} vyjádříme tedy pro obecné n vztahem (5), kde integrační konstanty c_1 a d_{n-1} plynou z výrazů (12) a (13).

Rovnici pro průhyb homogenní konzoly učíme integrací ohybové rovnice pro konzolu s konstantním modulem pružnosti E_H . S uvážením okrajových podmínek ve vetknutí (6) a (7) lze průhyb jednoduše vyjádřit ve tvaru

$$w_H = \frac{1}{E_H I} \frac{f}{2} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} l + \frac{x^2}{2} l^2 \right). \quad (15)$$

Dosazením $x=l$ do vztahů (5) a (15) získáme rovnice

$$\begin{aligned} w_{n-1}(l) &= \frac{1}{E_{n-1} I} \frac{f}{2} \left(\frac{l^4}{12} - \frac{l^4}{3} + \frac{l^4}{2} \right) + c_{n-1} l + d_{n-1} = \frac{1}{8} \frac{f}{E_{n-1} I} l^4 + \sum_{k=0}^{n-1} A_k l + \sum_{k=0}^{n-1} (B_k - k \Delta A_k) \\ &= \frac{1}{8} \frac{f}{E_{n-1} I} l^4 + \sum_{k=0}^{n-1} (A_k l + B_k - k \Delta A_k) \end{aligned} \quad (16)$$

$$w_H(l) = \frac{1}{E_H} \frac{f}{2} \left(\frac{l^4}{12} - \frac{l^4}{3} + \frac{l^4}{2} \right) = \frac{f}{8} \frac{1}{E_H} l^4. \quad (17)$$

Nyní upravíme sumační výraz do následujícího tvaru

$$\sum_{k=0}^{n-1} (A_k l + B_k - k \Delta A_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[(-1)^{k+1} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E} \right) \frac{f}{2I} \Delta l^4 \left(nk^3 - \frac{3}{2} k^2 n^2 + n^3 k - \frac{1}{4} k^4 \right) \right]$$

a například pomocí programu Maple® sečteme předchozí řadu. Po dosazení do rovnice průhybu na konci konzoly (16) získáváme výraz ve tvaru

$$w_{n-1}(l) = \frac{f}{8} \frac{1}{E_{n-1} I} l^4 + \frac{f}{2I} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E} \right) \Delta l^4 \left(\frac{1}{8} n^4 (-1)^n - \frac{1}{8} n + \frac{1}{4} n^3 \right).$$

Vypočítáme limitu průhybu $w_{n-1}(l)$ pro $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} w_{n-1}(l) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{8} \frac{1}{E_{n-1} I} l^4 + \frac{1}{2I} \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E} \right) \Delta l^4 \left(\frac{1}{8} n^4 (-1)^n - \frac{1}{8} n + \frac{1}{4} n^3 \right) \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{8} \frac{1}{E_{n-1} I} l^4 + \frac{1}{2I} \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E} \right) l^4 \left(\frac{1}{8} \frac{n^4}{n^4} - \frac{1}{8} \frac{n}{n^4} + \frac{1}{4} \frac{n^3}{n^4} \right) \right] = \\ &= \frac{l^4}{8I} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{E_{n-1}} + \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E} \right) \left(\frac{1}{2} (-1)^n - \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{n} \right) \right] \end{aligned}$$

Pro sudé n je tedy¹

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_{n-1}(l) = \frac{f l^4}{8} \left(\frac{1}{E_B} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \right). \quad (18)$$

Dosazením vztahů (17) a (18) do podmínky rovnosti přesného a homogenizovaného průhybu na konci konzoly (14) získáme rovnici ve tvaru

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{E_B} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_B} \right) \right) = \frac{1}{8} \frac{1}{E_H}.$$

Po několika úpravách získáme finální vztah pro E_H ve tvaru

$$E_H = \frac{2E_A E_B}{E_A + E_B}. \quad (19)$$

5. Inženýrský přístup k homogenizaci

V této kapitole odvodíme vztah (19) poněkud jiným přístupem, který vychází ze studia přemístění průřezů studované konzoly. Konkrétně náš výklad založíme na velmi názorné představě tzv. víceúrovňové kinematiky, která byla ke studiu homogenizačních problémů mechaniky využita v [10].

V našem případě založíme úvahy na vztahu mezi ohybovým momentem M a křivostí $\kappa = w''$, viz rovnice (2). Pokud by studovaná konzola byla homogenní, křivost κ by byla jako funkce x dostatečně hladká a umožňovala rozvinutí pootočení $\varphi = w'$ v okolí libovolného bodu x do Taylorovy řady

¹ Pokud bychom zvolili pro výpočet n liché, získali bychom po úpravách výsledný vztah pro E_H stejný.

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi'(x)y + \frac{1}{2}\varphi''(x)y^2 \approx \varphi(x) + \kappa(x)y,$$

a tedy pro dostatečně malé hodnoty y by bylo možné uvažovat průběh pootočení jako *l neární* vzhledem k proměnné y . Tento předpoklad však není splněn pro studovanou heterogenní konzolu. Skutečně, pokud umístíme bod x na rozhraní mezi dvěma intervaly s různými moduly pružnosti, z výrazu (3) vyplývá, že graf funkce $\varphi(x)$ bude mít v tomto bodě hrot, což je v rozporu s předchozím tvrzením. Toto tvrzení je též bohatě dokumentováno v následující kapitole celou řadou numerickým příkladů. Abychom zohlednili tuto skutečnost, vyjádříme průběh pootočení ve tvaru

$$\varphi(x+y) \approx \varphi(x) + \kappa(x)y + \varphi^*(x,y), \quad (20)$$

kde funkce $\varphi^*(x,y)$ vystupuje v předchozím výrazu v důsledku heterogenity studované konstrukce a závisí obecně jak na poloze v konstrukci x , tak i na poloze y v rámci tzv. *jednotkové buňky* (viz obr. 3). Pokud bude počet intervalů n dostatečně velký, lze díky hladkému průběhu momentů očekávat, že korekce $\varphi^*(x,y)$ bude mít pro stejné body y v rámci jednotkové buňky podobné hodnoty, i když nebudeme uvažovat rozvoj (20) v okolí stejných bodů x . To vede ke následujícímu předpokladu o pootočení jednotlivých průřezů

$$\varphi(x+y) \approx \varphi(x) + \kappa(x)y + \varphi^*(y), \quad (21)$$

kde nyní funkce $\varphi^*(y)$ nezávisí na proměnné x a vzhledem k proměnné y je *periodická* s periodou $\langle -\Delta l \Delta l \rangle$. Dále předpokládáme, že uvedený rozvoj platí pro obecné x , nejenom na rozhraní mezi jednotlivými intervaly.

Obr. 3 Inženýrská interpretace homogenizace

Předchozí úvahy vedou k následující interpretaci homogenizačního problému, (viz též obr. 3): Pro daný bod x předepíšeme pro danou jednotkovou buňku, která nyní vystupuje jako materiálový bod, průměrnou (tzv. makroskopickou) křivost $\kappa(x)$ pomocí vztahu (21). Pro tuto předepsanou průměrnou hodnotu vyjádříme průběh pootočení $\varphi^*(y)$ a ohybových momentů

$M(x,y)$ na úrovni jednotkové buňky (tzv. mikroúrovni) v závislosti na proměnné y . Vztah mezi průměrnou křivostí $\kappa(x)$ a průměrným ohybovým momentem

$$\langle M(x) \rangle = \frac{1}{2\Delta l} \int_{-\Delta l}^{\Delta l} M(x,y) dy \quad (22)$$

pak definuje hledaný homogenizovaný konstitutivní vztah, který nahrazuje rovnici (3).

Naznačený postup lze pak snadno rozšířit na obecné lineární a nelineární úlohy mechaniky, viz [10].

Ve studovaném příkladu je řešení tohoto problému podstatně jednodušší. Vzhledem ke skutečnosti, že studovaná konstrukce je staticky určitá, nezávisí hodnota ohybového momentu na souřadnici y . Na *mikroúrovni* pak platí ohybová rovnice (2) v závislosti na proměnné y ve tvaru

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{M(x)}{I} \right) = -\kappa(x).$$

Po dosazení kinematických předpokladů (21) do předchozí rovnice dostáváme

$$\frac{d}{dy} (\varphi(x) + \kappa(x)y + \varphi^*(y)) = \kappa(x) + \frac{d\varphi^*(y)}{dy} = -\frac{M(x)}{E(y)I}.$$

To nám umožňuje vyjádřit pootočení ve tvaru

$$\varphi^*(y) = - \int_{-\Delta l}^y \left(\frac{M(x)}{E(y)I} + \kappa(x) \right) dy + C.$$

Podmínky periodicity lze v tomto případě vyjádřit ve tvaru

$$\varphi^*(\Delta l) = - \left(\frac{M(x)}{E} + \frac{M(x)}{E_B} \right) \Delta l - 2\kappa(x)\Delta l + C = \varphi^*(-\Delta l).$$

Hledaný vztah mezi momentem $M(x)$ a $\kappa(x)$ má tedy tvar

$$\kappa(x) = -2 \left(\frac{1}{E_A I} + \frac{1}{E_B I} \right)^{-1} \kappa(x) = -2I \left(\frac{E_A + E_B}{E_A E_B} \right)^{-1} \kappa(x) = -E_H I \kappa(x), \quad (23)$$

tedy stejný výsledek jako jsme dostali v předchozí kapitole. Na závěr poznamenejme, že funkce $\varphi^*(y)$ plynoucí z řešení problému na mikroúrovni je definovaná až na integrační konstantu C . To lze řešit například dodatečnou podmínkou $\varphi^*(-\Delta l) = \varphi^*(\Delta l) = 0$.

6. Rozdíl mezi homogenizovaným řešením a přesným řešením

Nyní podrobně demonstrujeme rozdíl mezi homogenizovaným řešením a skutečným průhybem nehomogenní konzoly. Cílem tohoto porovnání je prezentovat nakolik idealizované homogenizované řešení reprezentuje skutečné chování heterogenní konstrukce. Pozornost je věnována vlivu poměru modulů pružnosti jednotlivých materiálů, počtu intervalů a rozdílnému charakteru pootočení a průhybu konstrukce.

Následujících grafy 1—4 dokumentují vztah mezi

- přesným pootočením a průhybem,
- pootočením a průhybem vypočteným použitím průměrného modulu pružnosti $2E_P = E_A + E_B$,
- pootočením a průhybem vypočteným použitím homogenizovaného modulu pružnosti E_H ,

v závislosti na proměnném počtu intervalů n a poměru modulů pružnosti E_B/E_A . Pro srovnání jsou v grafech vyneseny i pootočení a průhyby vypočtené použitím modulu pružnosti E_A (resp. E_B) pro celou konzolu.²

Graf 1 Průběh pootočení pro počet intervalů $n=10$, (a) $E_B/E_A=2$, (b) $E_B/E_A=10$, (c) $E_B/E_A=100$

Graf 2 Průběh průhybů pro počet intervalů $n=10$, (a) $E_B/E_A=2$, (b) $E_B/E_A=10$, (c) $E_B/E_A=100$

Graf 3 Průběh pootočení pro počet intervalů $n=50$, (a) $E_B/E_A=2$, (b) $E_B/E_A=10$, (c) $E_B/E_A=100$

Graf 4 Průběh průhybů pro počet intervalů $n=50$, (a) $E_B/E_A=2$, (b) $E_B/E_A=10$, (c) $E_B/E_A=100$

² Poznamenejme, že ve všech prezentovaných výpočtech byla hodnota modulu pružnosti E_A uvažována rovna jedné.

Z uvedených grafů 1—4 je zřejmé, že od určité hodnoty n se pootočení a průhyb homogenizované konzoly dostatečně přibližují přesnému řešení (viz grafy pro $n=50$). Při zvětšujícím se poměru modulů pružnosti E_B/E_A se zvětšuje odchylka mezi přesným a homogenizovaným řešením. Dále je patrné, že použití průměrné hodnoty modulů pružnosti jednotlivých materiálů pro celou konzolu je velmi nepřesné (zvláště při velkém poměru modulů pružnosti E_B/E_A).

Pro názornost a další demonstraci tohoto chování jsou do následujícího grafu vyneseny dohromady přesná pootočení a průhyby konzol s různým počtem intervalů n ve srovnání s pootočením a průhybem homogenní konzoly.

Graf 5 Průběh (a) pootočení a (b) průhybů na konzole pro poměru modulů pružnosti $E_B/E_A=2$ v závislosti na počtu intervalů n .

Míru nepřesnosti pootočení (resp. průhybu) způsobenou použitím homogenizovaného modulu pružnosti E_H vystihují nejlépe odchylka přesného a homogenního pootočení (resp. průhybu) konzoly, jejíž průběh na konzole je znázorněn na následujícím grafu. Jak je z následujícího grafu zřejmé, v okolí podpory dochází k oscilacím rozdílu mezi homogenizovaným a skutečným řešením. Ty jsou způsobeny skutečností, že v okolí podpor je předpoklad (21) o pootočení jednotlivých průřezů v rozporu s okrajovou podmínkou $\varphi(0) = 0$.

Graf 6 Průběh odchylky přesného a homogenního (a) pootočení (b) průhybu konzoly ($n=10$)

Maximální chyba homogenního průhybu se projeví na volném konci konzoly. Její velikost v závislosti na počtu intervalů n zobrazuje následující graf. Jak je zřejmé, na dané závislosti lze vysledovat dvě oblasti. Pro malý počet intervalů je výstižnost řešení poměrně malá, již od cca deseti intervalů je z hlediska průhybu na konci intervalu přesnost řešení uspokojivá. Dále je zjevný dominantní vliv počtu intervalů vzhledem k poměru modulů pružnosti jednotlivých materiálů.

Graf 7 Závislost chyby na konci konzoly na počtu intervalů n

7. Závěr

Již při takto jednoduchém příkladu, kdy lze přesné řešení poměrně snadno určit, jsou patrné výhody homogenizace konstrukcí skládajících se z materiálů o rozdílných modulech pružnosti. Mezi hlavní přednosti homogenizace patří zejména urychlení výpočtu při dosažení dostatečně přesného řešení. Naopak přístupy založené na průměrování materiálových charakteristik jsou zatíženy značnou chybou, především pro vyšší rozdíl modulů pružností jednotlivých materiálů. Jak plyne z demonstrovaných příkladů, reprezentativnost a přesnost homogenizovaného řešení závisí především na následujících faktorech:

- „počtu intervalů“ konstrukce (poměr velikosti jednotkové buňky a konstrukce),
- poměru tuhostí jednotlivých materiálů,
- poloze v makroskopické oblasti (okolí podpor, koncentrovaných zatížení).

Na určení homogenizovaných vlastností pak naopak nemá vliv:

- charakter ani intenzita spojitého zatížení f ,
- absolutní rozměr jednotkové buňky Δl ,

neboť ani jedna z těchto veličin nevystupuje ve výrazu pro homogenizovaný modul pružnosti E . Všechny tyto poznatky lze přímo zobecnit na řešení složitějších nehomogenních konstrukcí, kde přesné řešení není dosažitelné.

Poděkování. Tato práce vznikla v rámci grantu 103/04/P254.

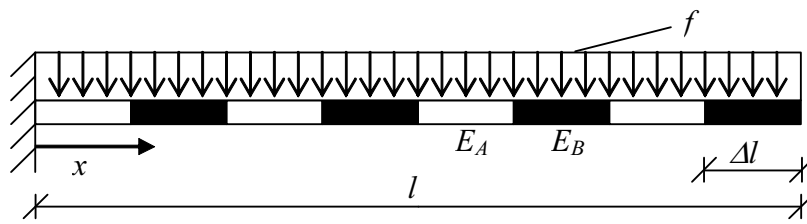
Seznam použité literatury

[1] Kabele, P.: Assessment of Structural Performance of Engineered Cementitious Composites by Computer Simulation. CTU Reports, **4**, 2001, No. 5.

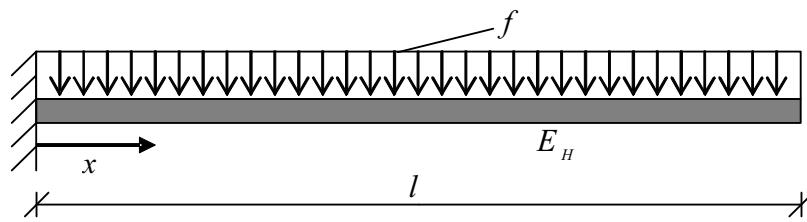
[2] Poděbradská, J.: Termofyzikální parametry kompozitních materiálů na bázi cementu v oblasti vysokých teplot. Disertační práce, ČVUT v Praze, 2004.

[3] Bensoussan, A. – Lions, J.-L. – Papanicolaou, G.: Asymptotic Analysis for Periodic Structures. Studies in Mathematics and its Applications, **5**, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford, 1978.

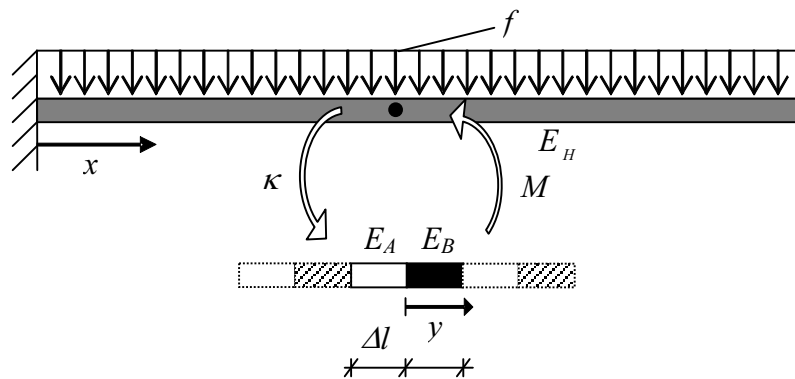
- [4] Jikov, V.V. – Kozlov, S.M. – Oleinik, O.A.: Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals. Springer-Verlag, 1994.
- [5] Cioranescu, D. – Donato, P.: An Introduction to Homogenization. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, Oxford University Press, Oxford, 1999.
- [6] Šejnoha, M.: Micromechanical Analysis of Unidirectional Fibrous Composite Plies and Laminates, CTU Reports, **3**, 1999, No. 3.
- [7] Procházka, P.: Základy mechaniky složených materiálů. Academia, Praha, 2001.
- [8] Milton, G.W.: The Theory of Composites. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, **6**, Cambridge University Press, 2002.
- [9] Šejnoha, J. – Bittnarová, J.: Pružnost a pevnost 10. ČVUT v Praze, 2002.
- [10] Terada, K. – Kikuchi, N.: A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **190**, 2001, No. 40—41, pp. 5427-5464.



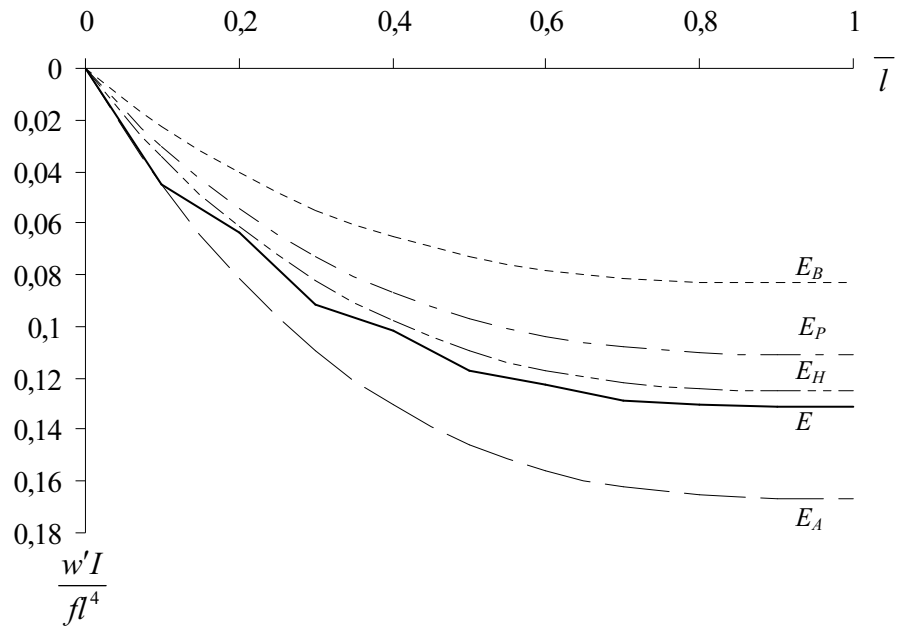
Obr. 1 Schéma heterogenní konzoly



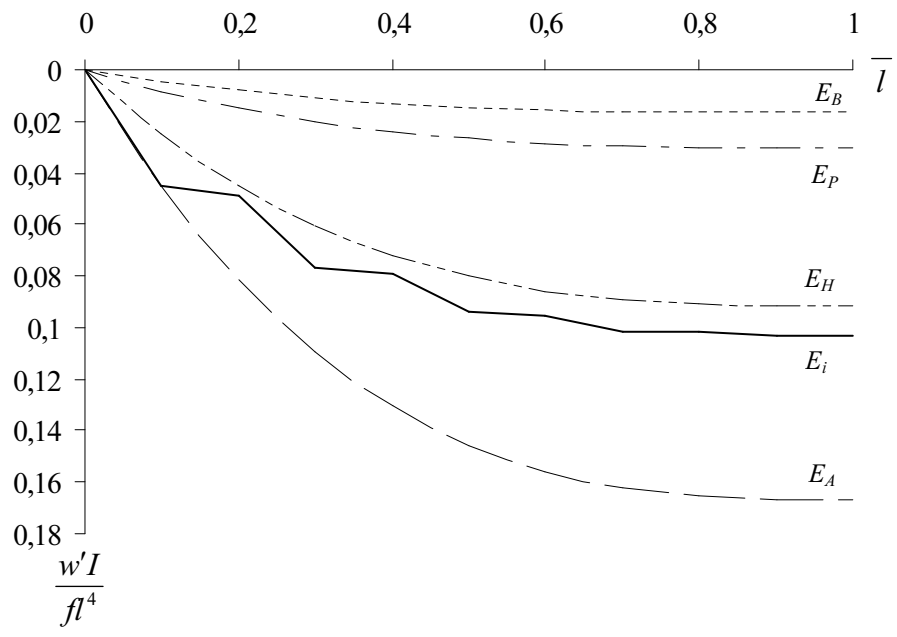
Obr. 2 Schéma homogenizované konzoly



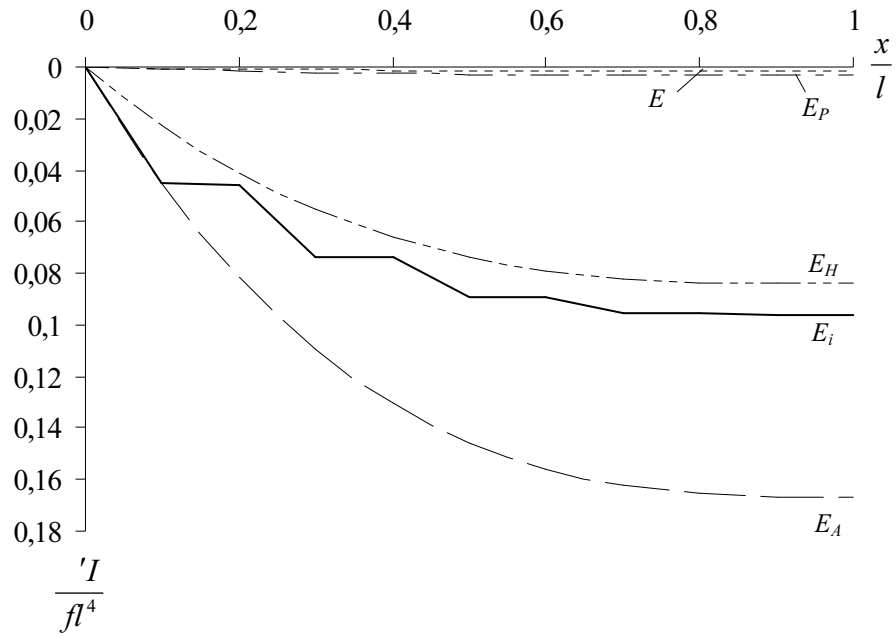
Obr. 3 Inženýrská interpretace homogenizace



(a)

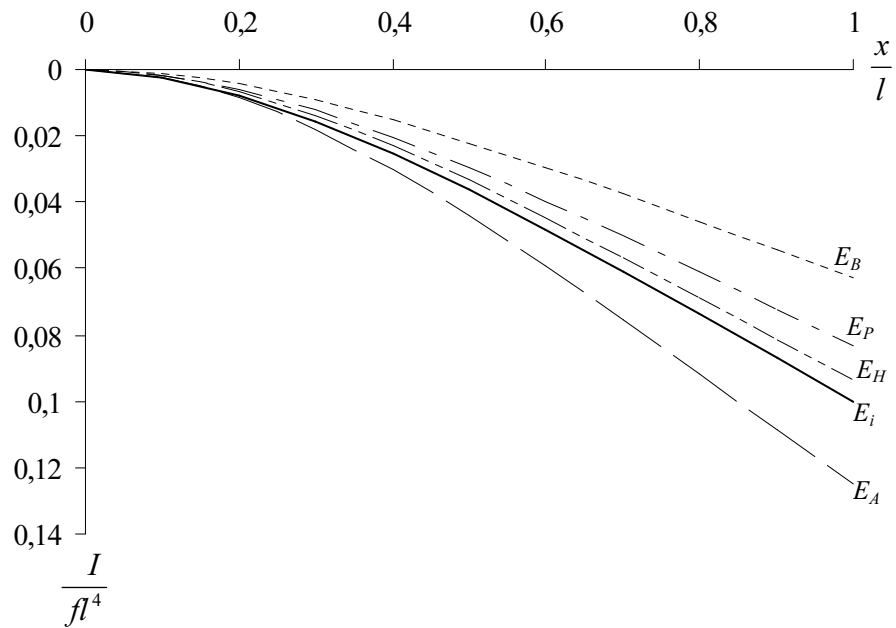


(b)

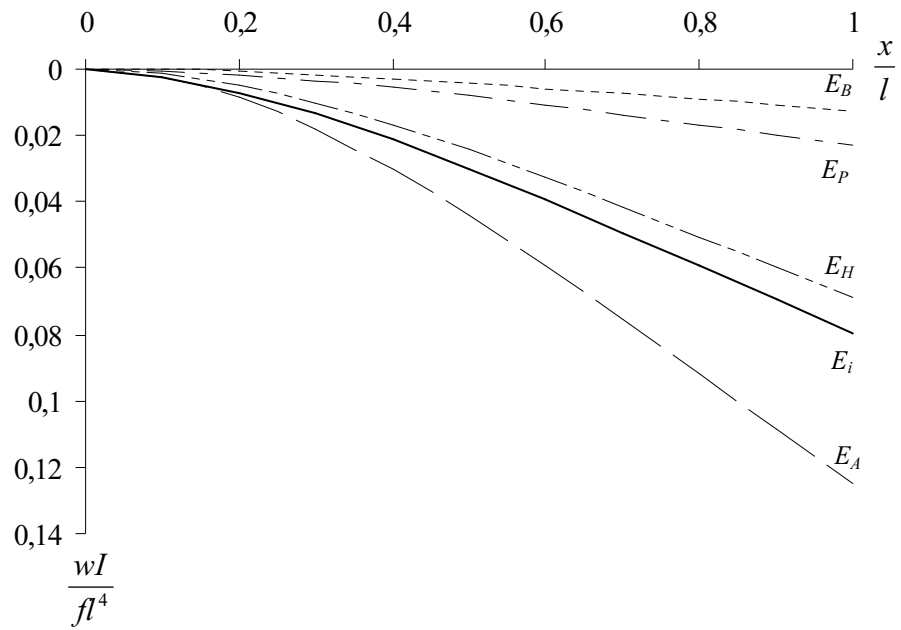


(c)

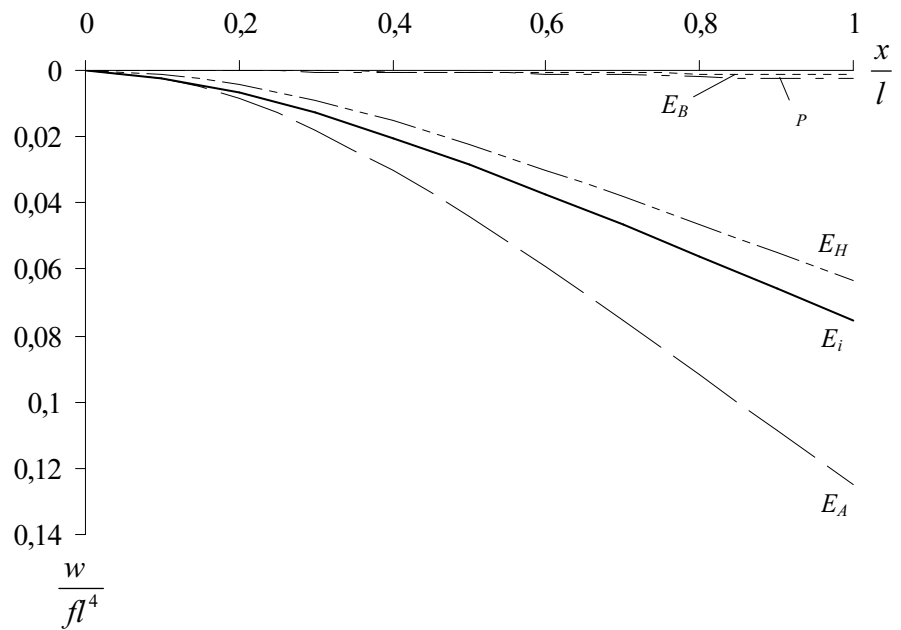
Graf 1 Průběh pootočení pro počet intervalů $n=10$, (a) $E_B/E_A = 2$, (b) $E_B/E_A = 10$, (c) $E_B/E_A = 100$



(a)

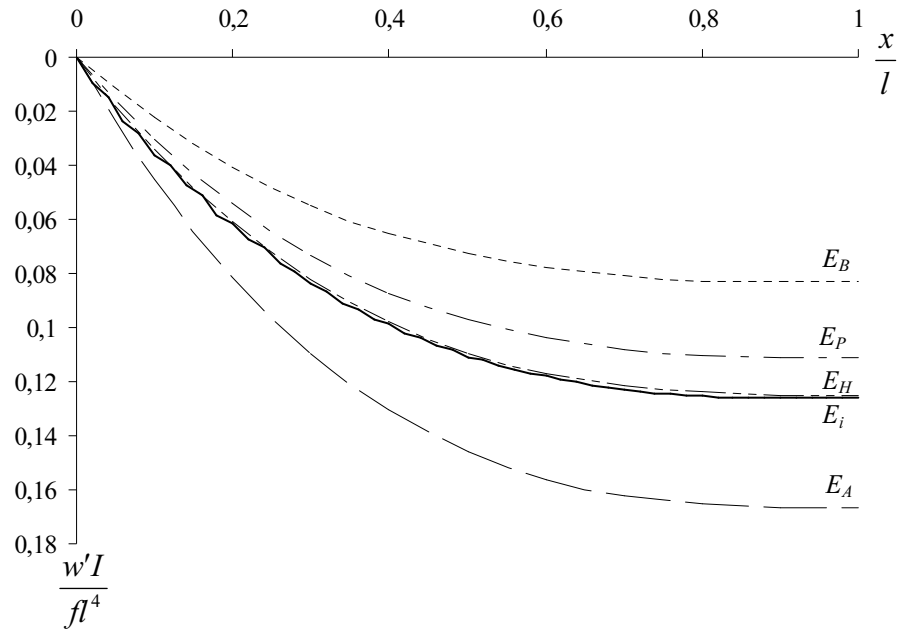


(b)

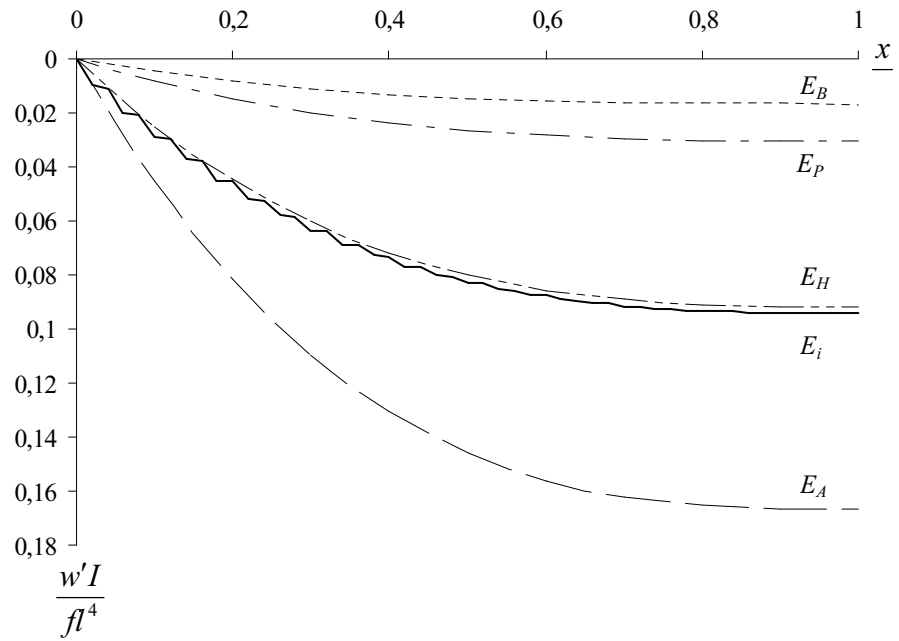


(c)

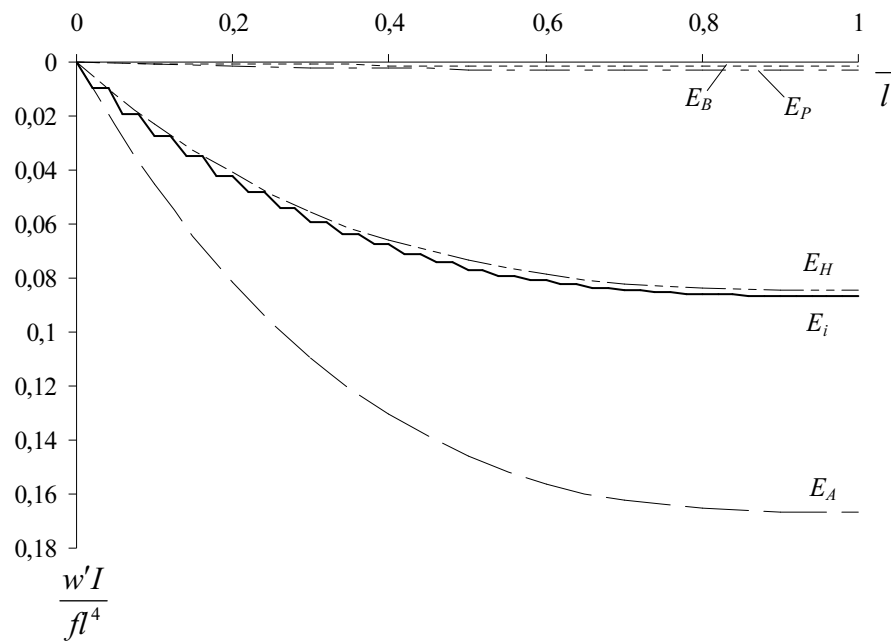
Graf 2 Průběh průhybů pro počet intervalů $n=10$, (a) $E_B/E_A=2$, (b) $E_B/E_A=10$, (c) $E_B/E_A=100$



(a)

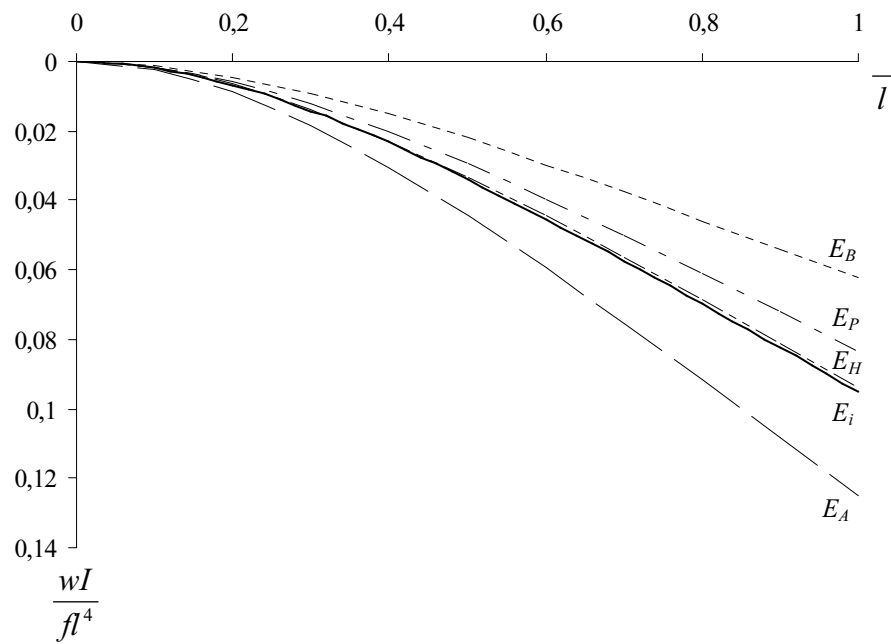


(b)

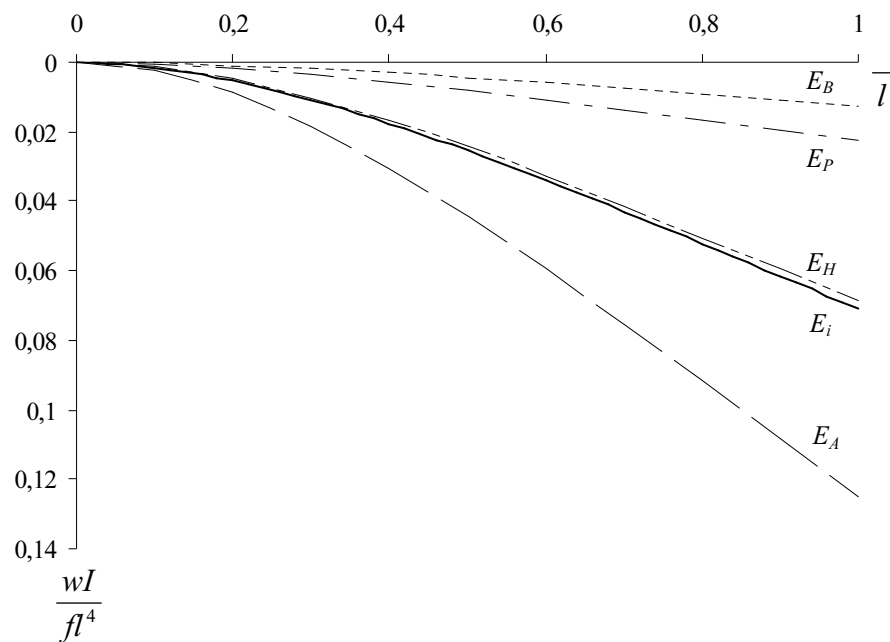


(c)

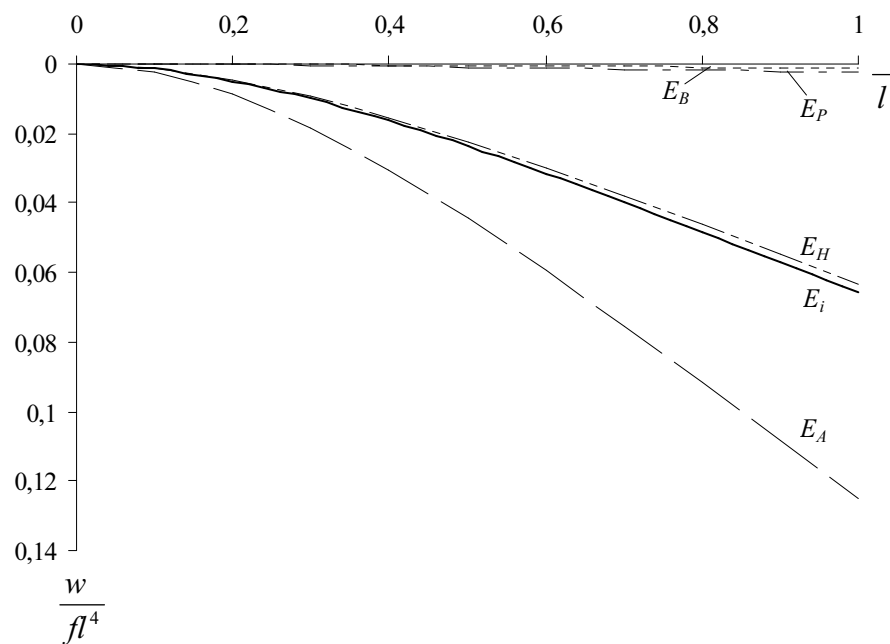
Graf 3 Průběh pootočení pro počet intervalů $n=50$, (a) $E_B/E_A=2$, (b) $E_B/E_A=10$, (c) $E_B/E_A=100$



(a)

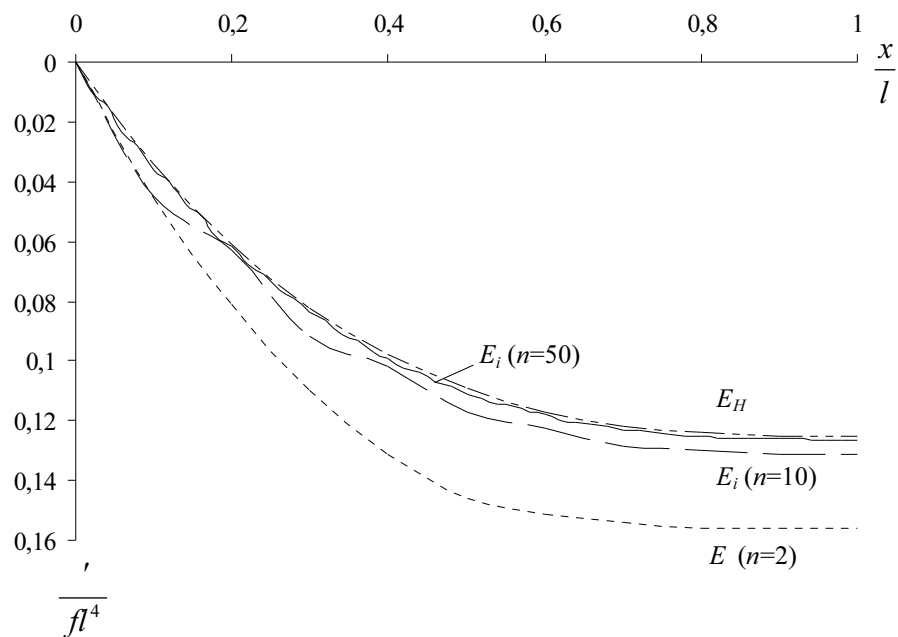


(b)

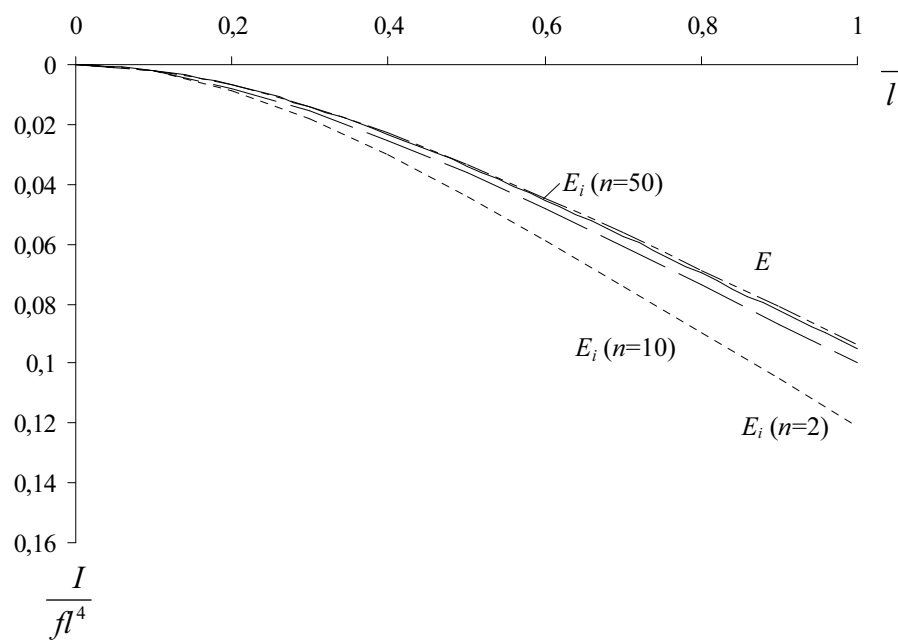


(c)

Graf 4 Průběh průhybů pro počet intervalů $n=50$, (a) $E_B/E_A=2$, (b) $E_B/E_A=10$, (c) $E_B/E_A=100$

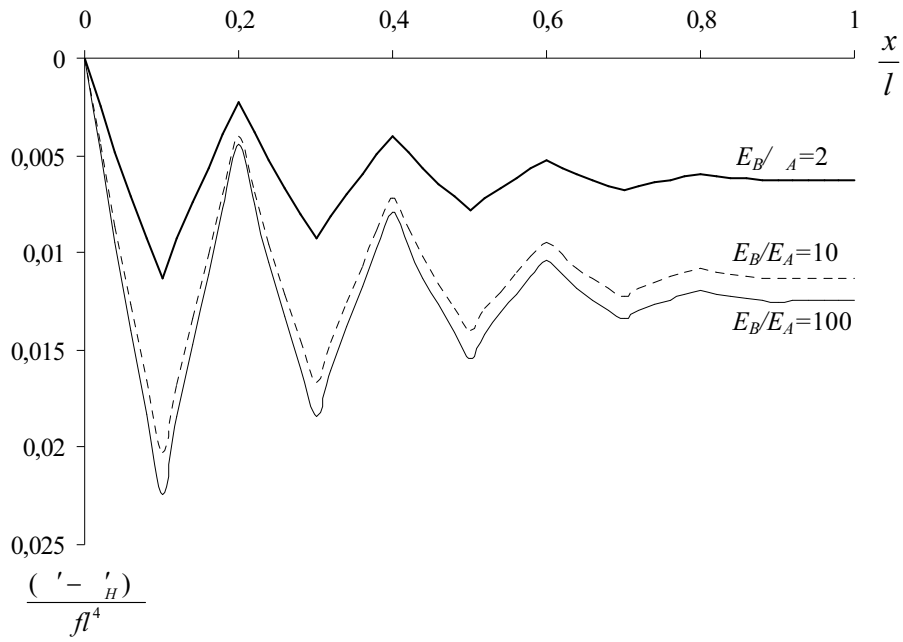


(a)

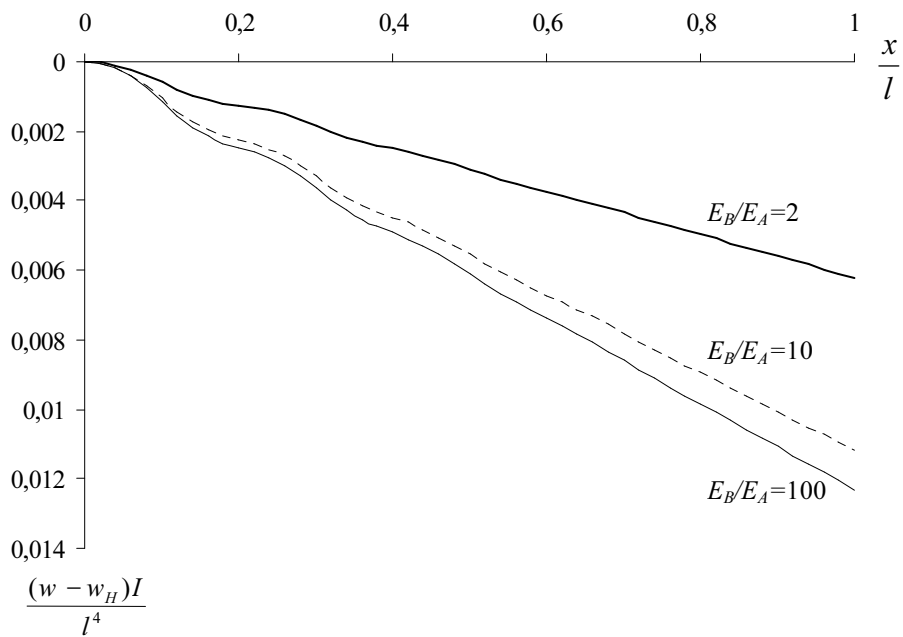


(b)

Graf 5 Průběh (a) pootočení a (b) průhybů na konzole pro poměru modulů pružnosti $E_B/E_A=2$ v závislosti na počtu intervalů n

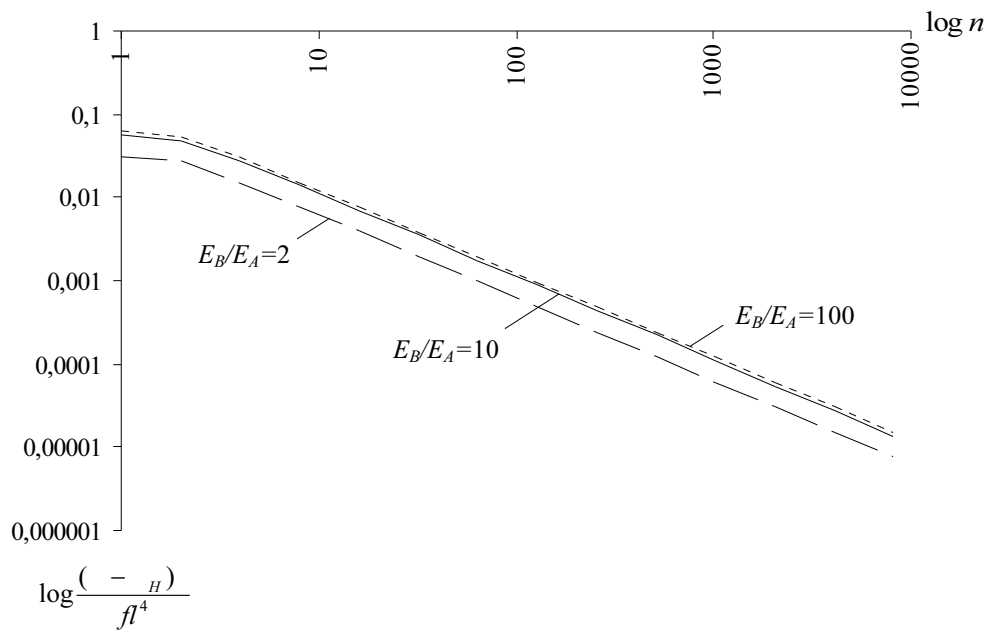


(a)



(b)

Graf 6 Průběh odchylky přesného a homogenního (a) pootočení (b) průhybu konzoly ($n=10$)



Graf 7 Závislost chyby na konci konzoly na počtu intervalů n