

VOLNÉ KROUCENÍ MASÍVNÍCH PRUTŮ

Geometrické předpoklady

-pootočení průřezu jako tuhé desky

$$1) \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{yz} = 0 ,$$

$$2) \quad \varepsilon_x = 0 \quad \dots \text{není bráněno } \textit{deplanaci} \text{ průřezu}$$

$$3) \quad u = \Theta(x)\psi(y, z)$$

2) splněn pro $\Theta(x) = konst.$ (pokud $\psi \neq 0$)

Potom **DEFORMACE** jsou

$$\gamma_{xy} = \Theta \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right],$$

$$\gamma_{xz} = \Theta \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right]$$

NAPJATOST

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}.$$

NAPJATOST NA OKRAJI PRŮŘEZU

$$\frac{dz}{-dy} = \frac{\tau_{xz}}{-\tau_{xy}} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

STATICKÉ ROVNICE

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0$$

+ pro $\Theta = \textit{konst.}$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0$$

VNITŘNÍ SÍLY

$$M_x = \int_A (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dA$$

DEFORMAČNÍ METODA

Délková hustota potenciální energie při konstantním kroucení

$$\frac{1}{l}\Pi = \int_A \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2) dA - \bar{M} \frac{[\varphi(l) - \varphi(0)]}{l}$$

Po dosazení a úpravě

$$\frac{1}{l}\Pi = \frac{G\Theta^2}{2} \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)^2 \right] dy dz - \bar{M}\Theta$$

Nalezneme minimum funkcionálu

$$\begin{aligned}
 \delta\left(\frac{1}{l}\Pi\right) &= \delta\left\{\frac{G\Theta^2}{2}\int_A\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-z\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}+y\right)^2\right]dydz-\overline{M}\Theta\right\}= \\
 &\left\{G\Theta\int_A\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-z\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}+y\right)^2\right]dydz-\overline{M}\right\}\delta\Theta+ \\
 &+\left\{G\Theta^2\int_A\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}-z\right)\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}+y\right)\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right]dydz\right\}=0
 \end{aligned}$$

Integrací per partes posledního integrálu bude

$$\left\{ G\Theta^2 \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] dy dz \right\} =$$

$$G\Theta^2 \left\{ - \int_A \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \delta \psi dy dz + \oint \left[\frac{\partial \psi}{\partial n} - (z \cos \alpha - y \sin \alpha) \right] \delta \psi ds \right\}$$

Musí tedy platit pro libovolné $\delta\psi, \delta\Theta$

$$G\Theta \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)^2 \right] dydz = \overline{M}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad \dots \text{ uvnitř průřezu}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = z \cos \alpha - y \sin \alpha \quad \dots \text{ po obrysu}$$

Z vyjádření okrajového momentu zavedeme

$$I_K = \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)^2 \right] dydz$$

Integrál

$$\int_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] dydz$$

ze kterého plynou diferenciální podmínky rovnováhy a napjatostní podmínka na okraji vyjadřuje podmínku minima I_K .

Pro znalost I_k tedy musíme zjistit průběh ψ po průřezu.

Aproximace

$$\psi = Nr$$

N...řádková mat. bazových fcí

r...sloupcový vektor uzlových posunů

Po dosazení apxce do podmínky minima I_k dostaneme

$$\delta r^T K r - \delta r^T \bar{R} = 0 ,$$

$$K = \int_A \left(\frac{\partial N^T}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial N^T}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial z} \right) dA$$

$$\bar{R} = \int_A \left(\frac{\partial N^T}{\partial y} z - \frac{\partial N^T}{\partial z} y \right) dA$$

Vyřešíme soustavu

$$Kr = \bar{R} ,$$

a vyjádřené apxce dosadíme do vzorce pro I_k .

$$\tilde{I}_K = \int_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)^2 \right] dy dz =$$

$$= r^T K r - 2 r^T \overline{R} + \int_A (z^2 + y^2) dA =$$

$$= -r^T \overline{R} + \int_A (z^2 + y^2) dA$$

Z rovnice

$$G\Theta I_K = \overline{M}$$

určíme Θ a vyjádříme napjatost v průřezu

$$\tau_{xy} = G\Theta \left(\frac{\partial N}{\partial y} r - z \right)$$

$$\tau_{xz} = G\Theta \left(\frac{\partial N}{\partial z} r + y \right)$$

Matematická podobnost rovnic

$$C_1 w - C_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \bar{p}_z$$

pro $C_1 = 0$ a $C_2 = 1$, $\bar{p}_z = 0$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

PVp-obecný princip rovnováhy-podobně –dostaneme stejné matice tuhosti pro prvek podloží i pro prvek krouceného průřezu.

SILOVÁ METODA

Funkce napětí Φ

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

silová okrajová podmínka

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos n\hat{y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos n\hat{z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \left(-\frac{dy}{ds} \right) = \frac{d\Phi}{ds} = 0$$

tedy $\Phi|_{\Gamma} = \text{const.}$

$$M_x = - \int_A \left(y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) dA = - \int_{\Gamma} (y \cos n\hat{y} + \sin n\hat{z}) \Phi ds + 2 \int_A \Phi dA$$

$$M_x = 2 \int_A \Phi dA$$

Necht' je dán $\overline{\Theta}$

Pak komplementární energie prutu

$$\frac{1}{l} \Pi^* = \frac{1}{G} \int_A \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dA - \overline{\Theta} \left(2 \int_A \Phi dA \right)$$

Zavedením

$$\Phi^* = \frac{\Phi}{G\Theta}$$

Moment tuhosti

$$I_K = 2 \int_A \Phi^* dA$$

Vyjádření variace funkcionálu pomocí Φ^*

$$\frac{1}{l} \delta \Pi^* = \int_A \left[\frac{\partial}{\partial y} (\delta \Phi^*) \frac{\partial \Phi^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} (\delta \Phi^*) \frac{\partial \Phi^*}{\partial z} \right] dA - 2 \int_A \delta \Phi^* dA = 0$$

Aproximace

$$\Phi^* = N\beta$$

N ...řádková matice bázových funkcí

β ...sloupcový vektor uzlových hodnot Φ^*

Dosazením do variace získáme

$$P\beta = \bar{\Delta}$$

$$P = \int_A \left(\frac{\partial N^T}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial N^T}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial z} \right) dA$$

$$\bar{\Delta} = 2 \int_A N^T dA$$

$$\tilde{I}_K = \beta^T \left(2 \int_A N^T dA \right) = \beta^T \bar{\Delta}$$

Napjatost

$$\tau_{xy} = G \bar{\Theta} \frac{\partial N}{\partial z} \beta, \quad \tau_{xz} = -G \bar{\Theta} \frac{\partial N}{\partial y} \beta$$

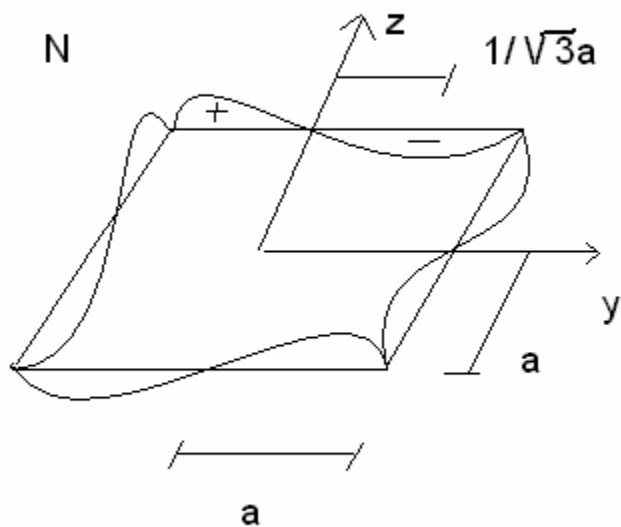
Porovnání

$$\tilde{I}_K \geq I_K \geq \tilde{\tilde{I}}_K$$

...kompatibilitní model **tužší** než skutečná kce

...rovnovážný model **měkčí**

Příklady



$$\psi \approx [\eta^3 \varsigma - \varsigma^3 \eta] \frac{3}{2} \sqrt{3} r = N(\eta, \varsigma) r$$

Deformační metoda

$$\tilde{I}_K = 2.25186 a^4$$

Silová metoda

$$\tilde{\tilde{I}}_K = 2.2222 a^4$$

Odhad

$$\hat{I}_K = \frac{A^4}{40 I_P} = 2.4000 a^4$$

Porovnání

$$\tilde{I}_K = 2.25186 a^4 \geq I_K = 2.2496 a^4 \geq \tilde{\tilde{I}}_K = 2.2222 a^4$$

Př.2

Položíme $\Phi = \alpha g(y, z)$

Kde $g(y, z) = 0$ na obrysu průřezu

Pro obdélník b, h

$$g(y, z) = \left(y - \frac{b}{2}\right) \left(y + \frac{b}{2}\right) \left(z - \frac{h}{2}\right) \left(z + \frac{h}{2}\right) = 0$$

$$M_x = 2\alpha \int_A g(y, z) dA = 2\alpha \frac{b^3 h^3}{36}$$

$$\tau_{xy} = \alpha \frac{\partial g}{\partial z} = -\frac{36M_x z}{b^3 h^3} \left[\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right]$$

$$\tau_{xz} = \alpha \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{36M_x y}{b^3 h^3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right]$$

Dosadíme do rovnice kompatibility

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = -2G\Theta$$

$$-\frac{36M_x}{b^3 h^3} \left[\left(\frac{b}{2} \right)^2 + \left(\frac{h}{2} \right)^2 - (y^2 + z^2) \right] = -2G\Theta$$

...není splněna

$$I_K = \frac{M_x}{G\Theta} = \frac{(bh)^4}{36 \frac{1}{12} (b^3h + bh^3)} = \frac{A^4}{36I_p}$$

Pro úzké obdélníky $\left(\frac{b}{h} \gg 1\right)$ po úpravě

$$I_k = \frac{b^3h}{3 \left[\left(\frac{b}{h} \right)^2 + 1 \right]} \cong \frac{1}{3} b^3h$$