Tvorba konečněprvkových sítí pomocí Delaunayovy triangulace

Jiří Kunecký

Tvorba konečněprvkových sítí

Máme-li dánu oblast, můžeme ji rozdělit na části nekonečně mnoha způsoby. Pro potřeby MKP však potřebujeme obdržet pouze rozdělení na tvary prvků, a to zejména na:

- ve 2D - trojúhelníky a čtyřúhelníky
- ve 3D - tetraedry a hexaedry

Hlavní kritéria na tvorbu sítě

- vytvořená síť by měla co nejdokonaleji aproximovat původní tvar oblasti
- počet elementů by měl být přiměřený tak, abychom dostali dostatečně přesný výpočet a aby netrval příliš dlouho (velikost výsledné matice tuhosti).
- úhly uvnitř elementů by měly být pokud možno stejné(ve 2D 60° u trojúhelníků a 90° pokud se jedná o čtyřúhelníky). Což souvisí s:
- poměr mezi nejdelší a nejkratší stranou (*aspect ratio*) by měl být pokud možno 1:1 (tzn. rovnostranný trojúhelník, či čtverec...). Za špatný se považuje 1:5 a menší.
- čas vyvoření sítě by měl být co nejmenší. Důležité u velkých úloh.
- pozor i na jednotlivé elementy s extrémními tvary - např. úhly, úloha pak hůře konverguje díky extrémním hodnotám v matici tuhosti.
- orientace elementů

Typy tvorby `meshe`:

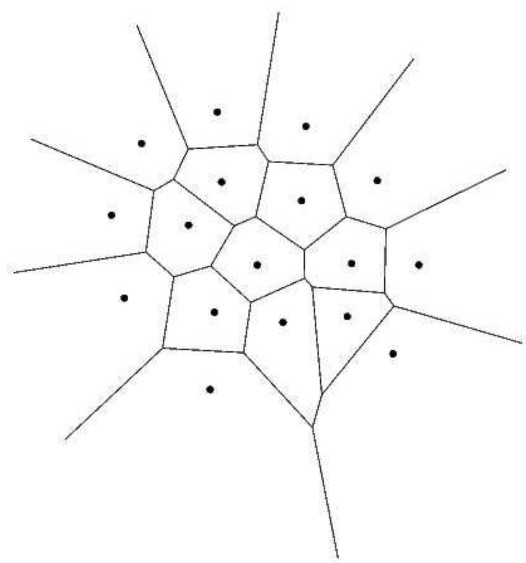
- **strukturovaný**
  - výhodou je dobrá kontrola nad tvarem elementů
  - ve 2D obvykle čtvercová síť, ve 3D krychle
  - nevýhodou: nevyplníme okraje oblasti, tzn. nepoužitelné u složitých tvarů, čehož můžeme docílit různou jemností strukturovanéhho meshe, čímž se blíží k nestrukturovanému
- **nestrukturovaný**
  - vyplní takřka jakýkoli tvar pomocí prvků různých velikostí i úhlů
  - Steinerovy body...body, které napatří do vstupních bodů, které jsou bud povoleny či zakázány

Voronoiův diagram

- "poštovní problém"
- Definice:

Uvažujme množinu bodů S z roviny $\mathbb{R}^2$. Pak Voronoiovým diagramem je rozdělení roviny do Voronoiových regionů $VR(p)$ pro každý bod $p \in S$ takové, aby pro jakýkoliv bod $q \in \mathbb{R}^2$ platilo, že p je jeho nejbližší bod z množiny S.

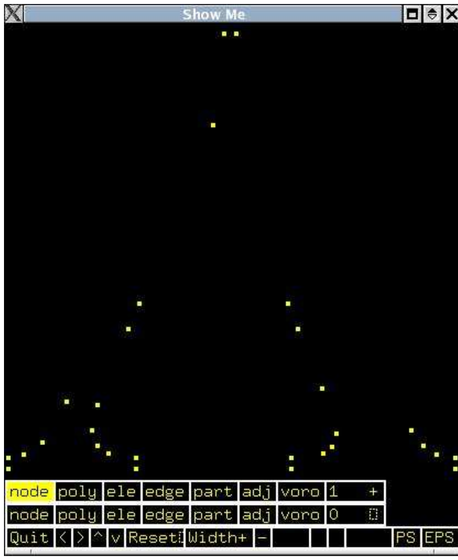
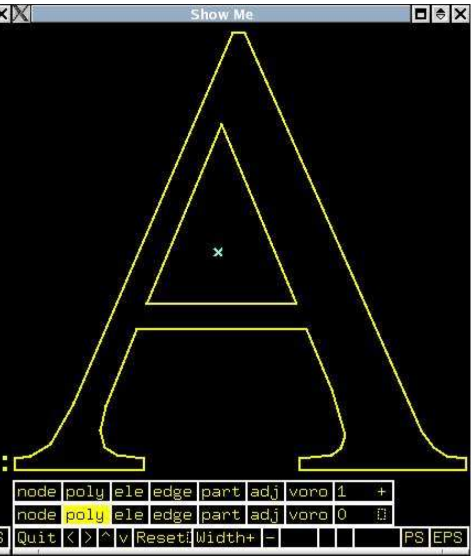
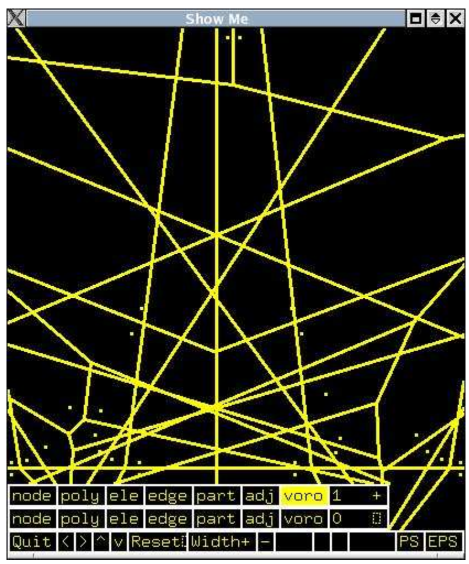
$$VR(p) := \{q \in \mathbb{R}^2 : d(p,q) \leq d(r,q), \forall r \in \mathbb{R}^2\}$$

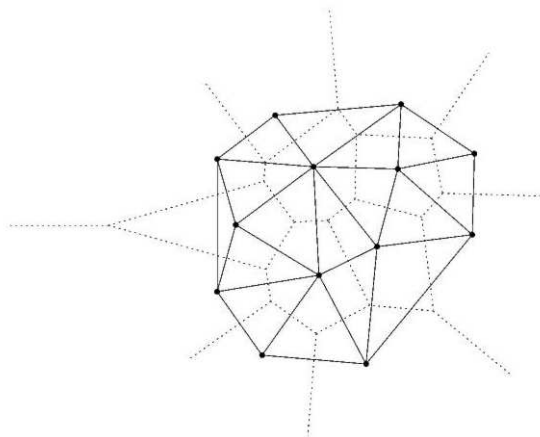


Pokud se dva regiony stýkají v jednom jediném bodě, hovoříme o **Voronoiově vrcholu**, pokud se stýkají hranami, jedné se o **Voronoiovu hranu**.

Vlastnosti Voronoiova diagramu:

- každý Voronoiův vrchol je stupně tři a vyššího
- kruh C(v) s poloměrem $d(p_i, v)$neobsahuje žádný bod, vyjma obvodové kružnice, která neobsahuje jiný bod než p_iaž p_j, kde $j - i + 1 = m$. m je stupeň vrcholu v.
- pro n bodů z množiny S platí, že Voronoiův diagram se skládá z:
  - přesně n V. regionů
  - nejvíce $2n - 4$V. vrcholů
  - njvíce $3n - 6$V. hran


Show Me
node poly ele edge part adj voro 1 +
node poly ele edge part adj voro 0
Quit < > ^ v Reset Width+ - PS EPS

Show Me
node poly ele edge part adj voro 1 +
node poly ele edge part adj voro 0
Quit < > ^ v Reset Width+ - PS EPS

Show Me
node poly ele edge part adj voro 1 +
node poly ele edge part adj voro 0
Quit < > ^ v Reset Width+ - PS EPS



Delaunayova triangulace

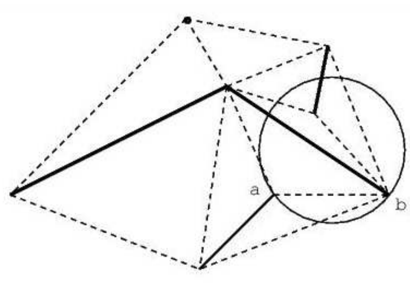
je definována kritériem, dle kterého kruh se středem ve V. vrcholu a poloměrem $d(p_i, v)$neosahuje žádné body uvnitř, vyjma kružnice která obsahuje max 3 body z S.

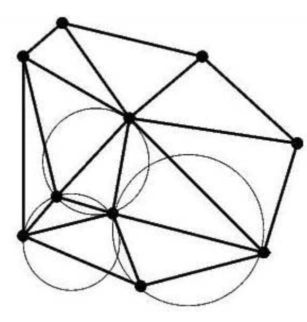
Vlastnosti:

- minimalizuje poloměr kružnice opsané a maximalizuje minimální úhel
- pokud žádné 4 body neleží na společné kružnici, je DT jednoznačná
- převedeme-li body v rovině o souřadnicích (x,y) do prostoru, na souřadnice $(x, y, x^2 + y^2)$, pak konvexní obálka převedená zpět do roviny je právě Delaunayovou triangulací

Typy možných triangulací ve 2D

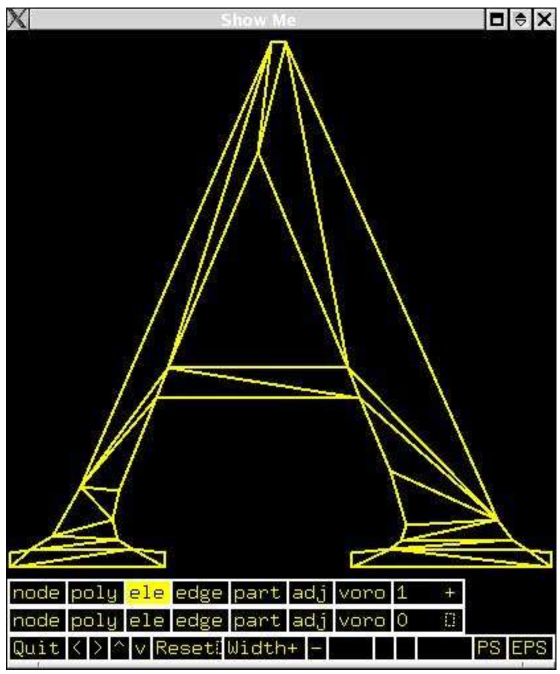
- "Conforming Delaunay Triangulation", která ke své tvorbě využívá Steinerových bodů
- "Constrained Delaunay Triangulation", která zohladňuje viditelnost bodů v grafu. Triangulace obsahuje hranu {a,b}, pokud vrchol a je viditelný pro b, a libovolná kružnice neosahuje bod c viditelný z ab.





Algoritmů na spočítání delaunayovy triangulace je celá řada:

- vycházející z Voronoiova diagramu
  - Fortune aj.
- přímé metody:
  - inkrementální konstrukce - od nejmenšího poloměru opsané kružnice k největšímu, tím se obdrží celá triangulace
  - převod do vyšší dimenze
  - rozděl a panuj "D&C"- původní vstupní množina bodů je rozdělena a pak jsou počítány dílčí triangulace, které nakonec jsou spojeny do výsledné.



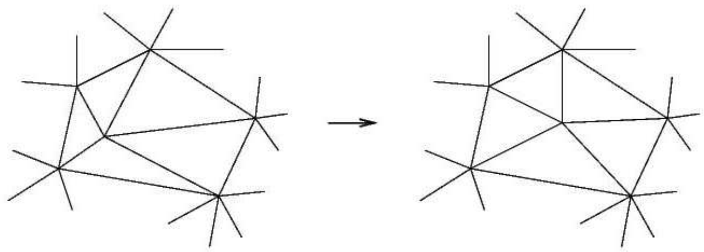
3D

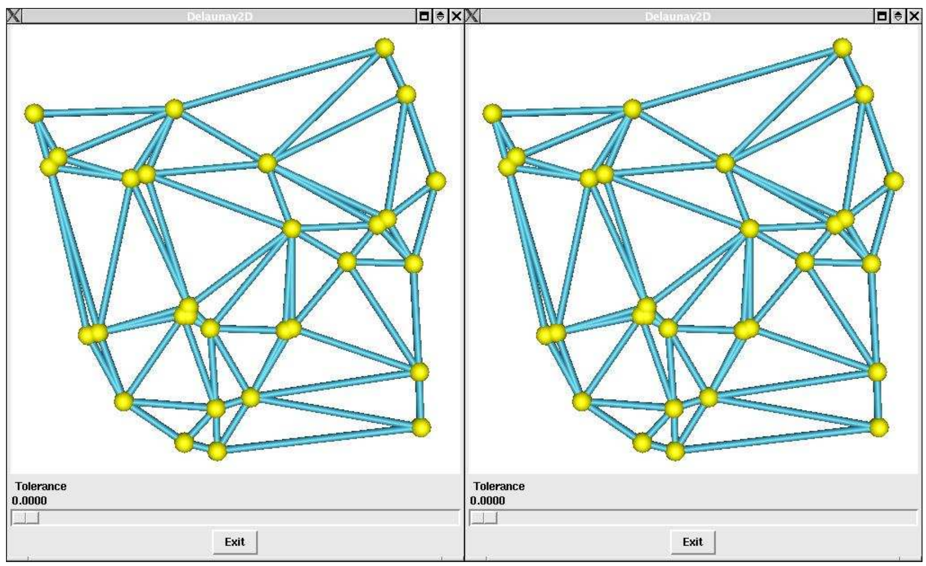
můžeme uvažovat úplně stejnou delaunayovu triangulaci, pouze s tím rozdílem, že z kruhu je koule a na jejím obvodu ne tři, ale čtyři body, kterými prochází.

Heuristické metody tvorby sítí

Někdy je nutné vylepšit síť a to je možné:

- pomocí Laplacova vyhlazování, kdy je špatně umístěný vrchol přemístěn do "těžiště" .
- ručně změnou souřadnic vstupního bodu(může se změnit celá síť)





Tvorba pomocí dekompozičních technik
quadtree, atd.