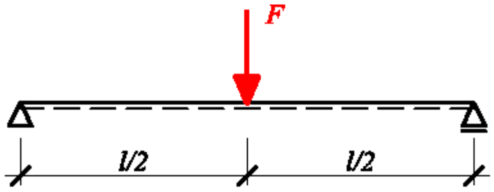
VÝPOČET PŘETVOŘENÍ NA STATICKY URIČTÝCH PŘÍMÝCH NOSNÍCÍCH

Příklad č. 1

Zadání

Vypočítejte maximální průhyb nosníku o rozpětí l zatíženého uprostřed silou F, viz Obr. 1.



Obr. 1: Schéma zadání příkladu č. 1.

Způsob řešení

Pro výpočet je použit princip virtuálních sil – tzn. bude se pracovat navíc s virtuálním stavem, kdy do místa, kde chceme znát průhyb, umístíme jednotkovou sílu.

Pokud budeme uvažovat, že vliv posouvajících a normálových sil na deformaci je zanedbatelný, pak pro průhyb w platí:

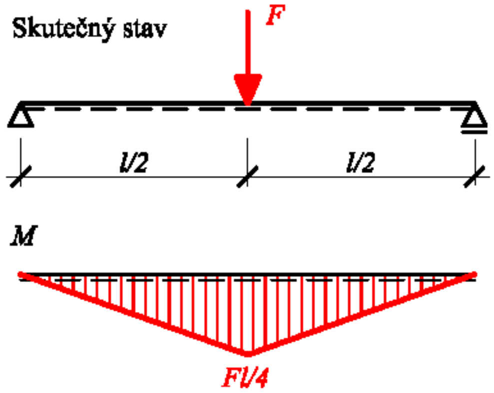
$$w = \frac{\int_0^l M(x)\delta M(x)\mathrm{d}x}{EI_y}, \tag{1.1}$$

kde:

- E je Youngův modul pružnosti (materiálová charakteristika),
- I_y je moment setrvačnosti k vodorovné těžišťové ose (průřezová charakteristika),
- $M(x)$ je funkce ohybového momentu na nosníku od skutečného zatížení F.
- $dM(x)$ je funkce virtuálního ohybového momentu na nosníku od jednotkového zatížení.

Skutečný stav – průběh momentů

Průběhy momentů od zatížení je zobrazen na Obr. 2.



Obr. 2: Průběhy momentů – skutečný stav.

Funkce momentu, lze vyjádřit například takto:
Úsek 0 až $l/2$, kde $x \in \langle 0; l/2 \rangle$:

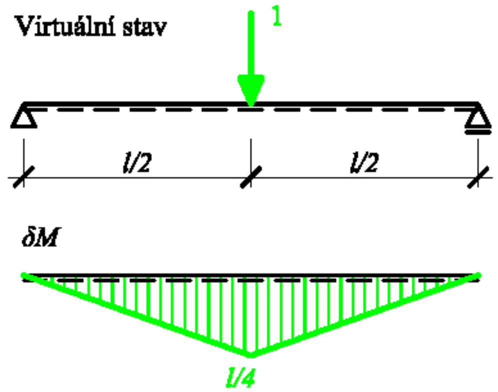
$$M(x) = \frac{F}{2}x, \tag{1.2}$$

a úsek $l/2$ až l, kde $x \in \langle 0; l/2 \rangle$:

$$M(x) = \frac{Fl}{4} - \frac{F}{2}x, \tag{1.3}$$

Virtuální stav – průběh momentů

Průběhy momentů od virtuálního jednotkového zatížení je zobrazen na Obr. 3.



Obr. 3: Průběhy momentů – virtuální stav.

Funkce virtuálních momentu, lze vyjádřit například takto:
Úsek 0 až $l/2$, kde $x \in \langle 0; l/2 \rangle$:

$$\delta M(x) = \frac{x}{2}, \tag{1.4}$$

a úsek $l/2$ až l, kde $x \in \langle 0; l/2 \rangle$:

$$dM(x) = \frac{l}{4} - \frac{x}{2}, \tag{1.5}$$

Výpočet průhybu

Pro správné řešení je potřeba z rovnice (1.1) vyčíslit čitatele, čili vypočítat určitý integrál, ten má obecně význam plochy pod křivkou, a tak pro tento symetrický příklad lze zapsat:

$$\int_0^l M(x)\delta M(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{l/2} M(x)\delta M(x)\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

Integrál z rovnice (1.6) můžeme řešit buďto přímou integrací, anebo s pomocí Vereščaginova pravidla o integraci dvou spojitých funkcí. V tomto příkladu bude použito přímé integrace (uplatnění Vereščaginova pravidla viz příklad č. 3). Do rovnice (1.6) dosadíme funkce $M(x)$ z rovnice (1.2) a funkce $\delta M(x)$ z rovnice (1.4) a dostaneme:

$$2\int_0^{l/2} M(x)\delta M(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{l/2} \frac{F}{2}x\cdot\frac{x}{2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{l/2}\frac{F\mathrm{x}^2}{4}\mathrm{d}x = \frac{F}{2}\int_0^{l/2} x^2\mathrm{d}x = \frac{F}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2} = \frac{F}{6}\left[x^3\right]_0^{l/2} =$$

$$= \frac{F}{6}\left[\left(\frac{l}{2}\right)^3 - 0^3\right] = \frac{F}{6}\cdot\frac{l^3}{8} = \frac{Fl^3}{48}$$

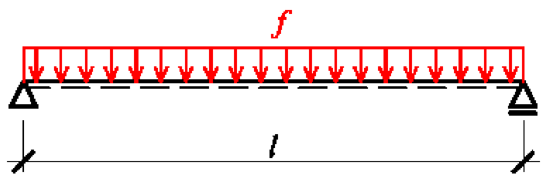
Dosazením do rovnice (1.1) tedy dostáváme známý vztah pro průhyb nosníku:

$$w = \frac{Fl^3}{48EI_y}.$$

Příklad č. 2

Zadání

Vypočítejte maximální průhyb nosníku o rozpětí l zatíženého spojitým rovnoměrným zatížení f, viz Obr. 4.



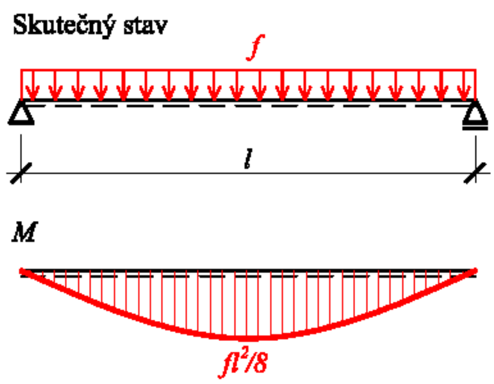
Obr. 4: Schéma zadání příkladu č. 2.

Způsob řešení

Způsob řešení bude stejný jako příkladu 1. Místo očekávaného maximálního průhybu zatížíme jednotkovou virtuální silou a pro průhyb musí opět platit rovnice (1.1).

Skutečný stav – průběh momentů

Průběhy momentů od zatížení je zobrazen na Obr. 5.



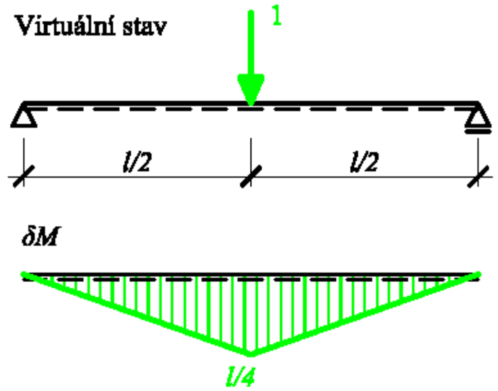
Obr. 5: Průběhy momentů – skutečný stav.

Funkce momentu, lze vyjádřit například takto:
Úsek 0 až l, kde $x \in \langle 0; l\rangle$:

$$M(x) = \frac{fl}{2}x - f\frac{x^2}{2}. \tag{2.1}$$

Virtuální stav – průběh momentů

Průběhy momentů od virtuálního jednotkového zatížení je zobrazen na Obr. 6.



Obr. 6: Průběhy momentů – virtuální stav.

Funkce virtuálních momentu, lze vyjádřit například takto:
Úsek 0 až $l/2$, kde $x \in \langle 0; l/2 \rangle$:

$$\delta M(x) = \frac{x}{2}, \tag{2.2}$$

a úsek $l/2$ až l, kde $x \in \langle 0; l/2 \rangle$:

$$dM(x) = \frac{l}{4} - \frac{x}{2}, \tag{2.3}$$

Výpočet průhybu

I v tomto případě se jedná o symetrický případ a tak lze uplatnit vztah z rovnice (1.6). Do rovnice (1.6) dosadíme funkce $M(x)$ z rovnice (2.1) a funkce $\delta M(x)$ z rovnice (2.2) a dostaneme:

$$2\int_0^{l/2} M(x)\delta M(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{l/2}\left(\frac{fl}{2}x - f\frac{x^2}{2}\right)\cdot\frac{x}{2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{l/2}\frac{flx^2}{4} - \frac{fx^3}{4}\mathrm{d}x = 2\frac{f}{4}\int_0^{l/2} lx^2 - x^3\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{f}{2}\left[\frac{lx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{l/2} = \frac{f}{2}\left[\left\{\frac{l}{3}\left(\frac{l}{2}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^4\right\} - \left\{\frac{l}{3}\cdot 0^3 - \frac{0^4}{4}\right\}\right] = \frac{f}{2}\left[\frac{l^4}{3\cdot 8} - \frac{l^4}{4\cdot 16}\right] =$$

$$= \frac{f}{2}\left[\frac{l^4}{24} - \frac{l^4}{64}\right] = \frac{f}{2}\cdot\frac{8l^4 - 3l^4}{192} = \frac{f}{2}\cdot\frac{5l^4}{192} = \frac{5fl^4}{384}$$

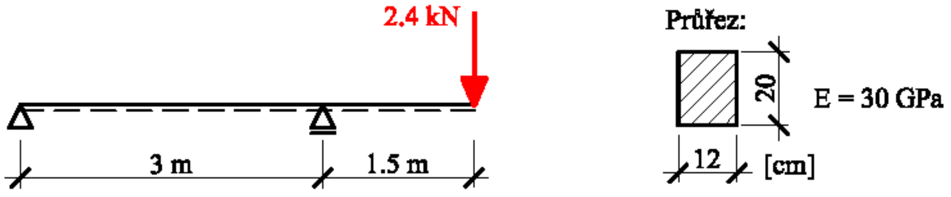
Dosazením do rovnice (1.1) tedy dostáváme známý vztah pro průhyb nosníku z příkladu č. 2.

$$w = \frac{5}{384}\cdot\frac{fl^4}{EI_y}.$$

Příklad č. 3

Zadání

Vypočítejte průhyb konce konzoly nosníku zakresleného na Obr. 7.



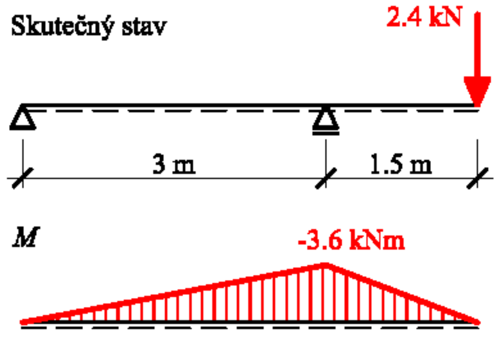
Obr. 7: Schéma zadání příkladu č. 3.

Způsob řešení

K řešení opět použijeme metodu virtuálních sil. Místo zjišťovaného průhybu zatížíme jednotkovou virtuální silou a pro průhyb musí opět platit rovnice (1.1).

Skutečný stav – průběh momentů

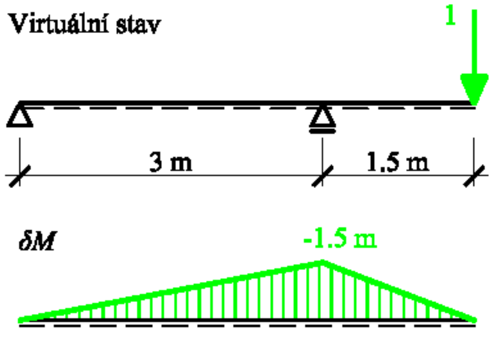
Průběhy momentů od zatížení je zobrazen na Obr. 8.



Obr. 8: Průběhy momentů – skutečný stav.

Virtuální stav – průběh momentů

Průběhy momentů od virtuálního jednotkového zatížení je zobrazen na Obr. 9.



Obr. 9: Průběhy momentů – virtuální stav.

Výpočet průhybu

V tomto příkladu již nelze využít symetrie průběhu momentů, a tak je potřeba vypočet integrálu $\int_0^l M(x)\delta M(x)\mathrm{d}x$ přes celou délku nosníku rozdělit na dva integrály:

$$\int_0^l M(x)\delta M(x)\mathrm{d}x = \int_a^b M(x)\delta M(x)\mathrm{d}x + \int_b^c M(x)\delta M(x)\mathrm{d}x \qquad (3.1)$$

Pro výpočet integrálů z rovnice (3.1) bude použito Vereščaginovo pravidlo o integraci dvou spojitých funkcí, to říká, že pro vyčíslení integrálu $\int_0^l f(x)g(x)\mathrm{d}x$ dvou funkcí $f(x)$ a $g(x)$ platí, že:

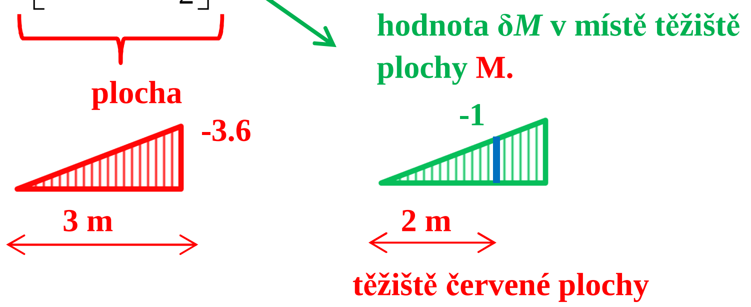
- integrál je roven součinu plochy pod křivkou funkce $f(x)$ a hodnoty funkce $g(x)$ v místě těžiště funkce $f(x)$,

nebo, že:

- integrál je roven součinu plochy pod křivkou funkce $g(x)$ a hodnoty funkce $f(x)$ v místě těžiště funkce $g(x)$.

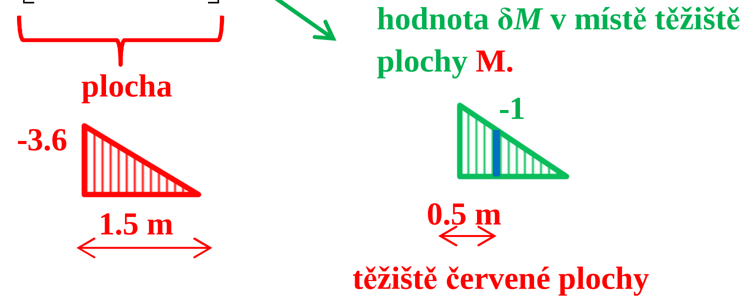
Pro náš příklad a pro úsek od a do b tedy platí:

$$\int_a^b M(x)\delta M(x)\mathrm{d}x = \left[(-3.6)\cdot 3\cdot \frac{1}{2}\right]\cdot(-1) = 5.4\mathrm{kNm}^3$$



Stejný postup lze aplikovat pro úsek od b až c:

$$\int_b^c M(x)\delta M(x)\mathrm{d}x = \left[(-3.6)\cdot 1.5\cdot \frac{1}{2}\right]\cdot(-1) = 2.7\mathrm{kNm}^3$$



Dosadíme do rovnice (3.1) a vypočítáme:

$$\int_0^l M(x)\delta M(x)\mathrm{d}x = \int_a^b M(x)\delta M(x)\mathrm{d}x + \int_b^c M(x)\delta M(x)\mathrm{d}x = 5.4 + 2.7 = 8.1\mathrm{kNm}^3$$

Vypočteme moment setrvačnosti průřezu k vodorovné ose, pro obdélník platí:

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3 \qquad (3.2)$$

a tedy pro náš příklad:

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 12 \cdot 20^3 = 8000\text{cm}^4$$

Ohybová tuhost EI_y se tedy rovná (pozor na jednotky!):

$$EI_y = 30000 \cdot 0.00008 = 2.4\text{MNm}^2 = 2400\text{kNm}^2$$

A konečně průhyb na konci konzoly se rovná:

$$w_c = \frac{\int_0^l M(x)\delta M(x)\mathrm{d}x}{EI_y} = \frac{8.1}{2400} = \underline{\underline{3.375 \cdot 10^{-3}\text{m}}}$$

Příklady k procvičování

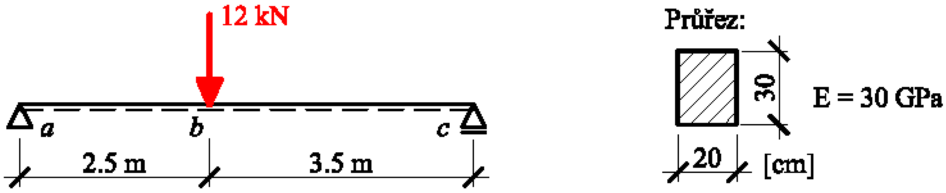
Příklad 4:

Uvažujte konstrukci z příkladu 3 a vypočtěte průhyb uprostřed rozpětí (tzn. 1.5 metru od levé podpory).

Řešení: $\underline{\underline{w = -8.4375 \cdot 10^{-4}\text{m}}}$

Příklad 5:

Uvažujte následující konstrukci (Obr. 10) a vypočtěte průhyb nosníku pod silou (tj. v bodě b).



Obr. 10: Zadání příkladu 5.

Řešení: $\underline{\underline{w_b = 3.78 \cdot 10^{-3}\text{m}}}$

Tento text slouží výhradně jako doplněk k přednáškám a cvičením z předmětu Stavební mechanika 2 pro studenty stavební fakulty ČVUT. I přes veškerou snahu autora se mohou v textu objevovat chyby, nepřesnosti a překlepy – budu rád, když mě na ně upozorníte.

Miloš Hüttner (milos.huttner@fsv.cvut.cz), poslední aktualizace 3.3.2014