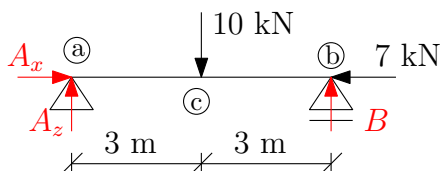


# Příklady k procvičení 5: Vnitřní síly na přímých nosnících

**Zadání:** Analyticky vyjádřete a následně vykreslete průběhy vnitřních sil  $N$ ,  $V$  a  $M$ .

## Příklad 5.1



**Řešení:**

1) Výpočet statické určitosti:

$$s = 3 - 2 - 1 = 0 \rightarrow \text{konstrukce je staticky určitá}$$

2) Výpočet reakcí:

$$\rightarrow : A_x - 7 = 0, \mathbf{A_x = 7 \text{ kN}}$$

$$\odot a : B \cdot 6 - 10 \cdot 3 = 0, \mathbf{B = 5 \text{ kN}}$$

$$\uparrow : A_z - 10 + B = 0, \mathbf{A_z = 5 \text{ kN}}$$

3) Analytické vyjádření vnitřních sil:

interval (a,c):

$$N(x) = -7 \text{ kN}$$

$$V(x) = 5 \text{ kN}$$

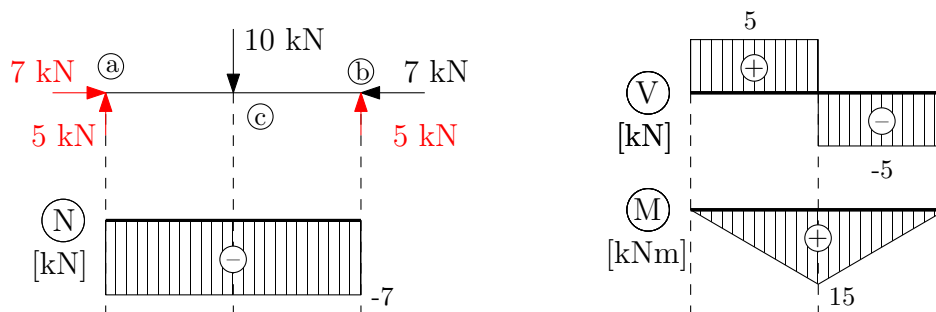
$$M(x) = 5 \cdot x$$

interval (c,b):

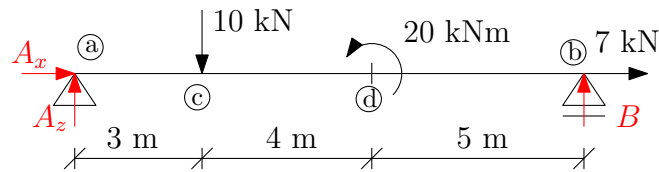
$$N(x) = -7 \text{ kN}$$

$$V(x) = 5 - 10 = -5 \text{ kN}$$

$$M(x) = 5 \cdot x - 10 \cdot (x - 3) = -5 \cdot x + 30$$



## Příklad 5.2



### Řešení:

1) Výpočet statické určitosti:

$$s = 3 - 2 - 1 = 0 \rightarrow \text{konstrukce je staticky určitá}$$

2) Výpočet reakcí:

$$\rightarrow : A_x + 7 = 0, \mathbf{A_x = -7 \text{ kN}}$$

$$\odot a : -10 \cdot 3 + 20 + B \cdot 12 = 0, \mathbf{B = 0,833 \text{ kN}}$$

$$\uparrow : A_z - 10 + B = 0, \mathbf{A_z = 9,167 \text{ kN}}$$

3) Analytické vyjádření vnitřních sil:

interval (a,c):

$$N(x) = 7 \text{ kN}$$

$$V(x) = 9,167 \text{ kN}$$

$$M(x) = 9,167 \cdot x$$

interval (c,d):

$$N(x) = 7 \text{ kN}$$

$$V(x) = 9,167 - 10 = -0,833 \text{ kN}$$

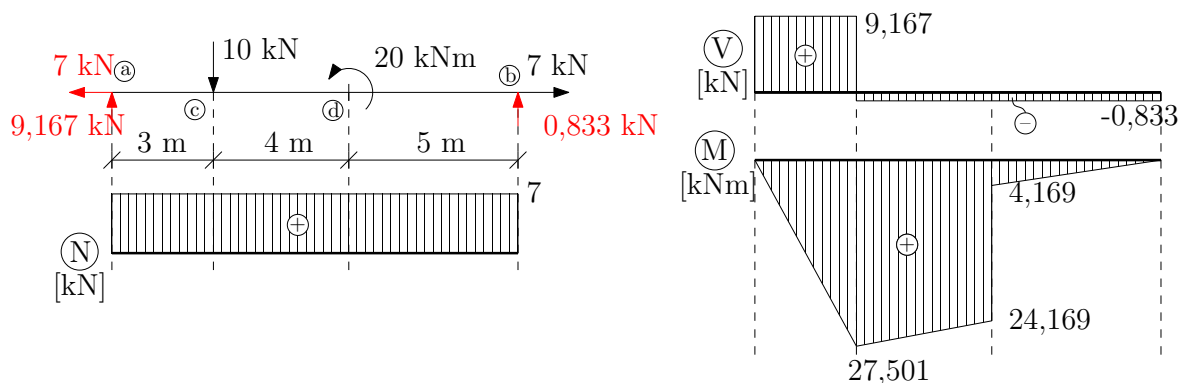
$$M(x) = 9,167 \cdot x - 10 \cdot (x - 3) = -0,833 \cdot x + 30$$

interval (d,b):

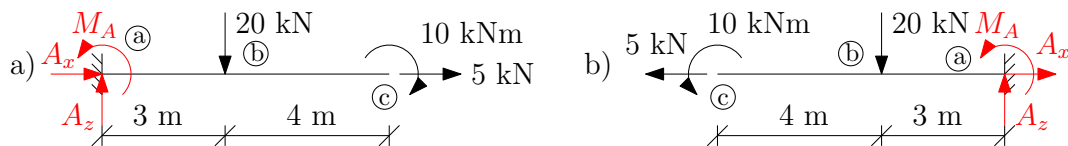
$$N(x) = 7 \text{ kN}$$

$$V(x) = -0,833 \text{ kN}$$

$$M(x) = -0,833 \cdot x + 30 - 20 = -0,833 \cdot x + 10$$



### Příklad 5.3



#### Řešení: a)

1) Výpočet statické určitosti:

$$s = 3 - 3 = 0 \rightarrow \text{konstrukce je staticky určitá}$$

2) Výpočet reakcí:

$$\begin{aligned} \rightarrow : \quad A_x + 5 &= 0, \quad \mathbf{A_x = -5 \text{ kN}} \\ \odot a : \quad M_A - 10 - 20 \cdot 3 &= 0, \quad \mathbf{M_A = 70 \text{ kNm}} \\ \uparrow : \quad A_z - 20 &= 0, \quad \mathbf{A_z = 20 \text{ kN}} \end{aligned}$$

3) Analytické vyjádření vnitřních sil:

interval (a,b):	interval (b,c):
$N(x) = 5 \text{ kN}$	$N(x) = 5 \text{ kN}$
$V(x) = 20 \text{ kN}$	$V(x) = 20 - 20 = 0 \text{ kN}$
$M(x) = -70 + 20 \cdot x$	$M(x) = -70 + 20 \cdot x - 20(x - 3) = -10$

#### Řešení: b)

1) Výpočet statické určitosti:

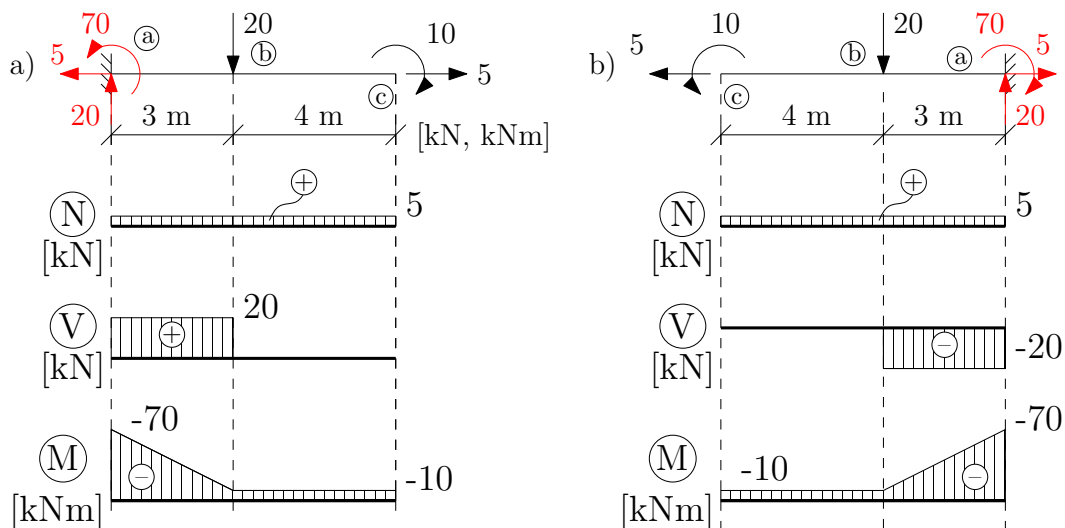
$$s = 3 - 3 = 0 \rightarrow \text{konstrukce je staticky určitá}$$

2) Výpočet reakcí:

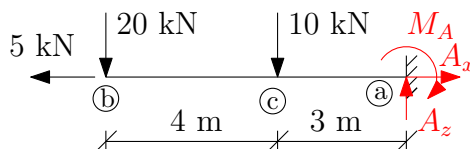
$$\begin{aligned} \rightarrow : \quad A_x - 5 &= 0, \quad \mathbf{A_x = 5 \text{ kN}} \\ \odot a : \quad M_A + 10 + 20 \cdot 3 &= 0, \quad \mathbf{M_A = -70 \text{ kNm}} \\ \uparrow : \quad A_z - 20 &= 0, \quad \mathbf{A_z = 20 \text{ kN}} \end{aligned}$$

3) Analytické vyjádření vnitřních sil:

interval (c,b):	interval (b,a):
$N(x) = 5 \text{ kN}$	$N(x) = 5 \text{ kN}$
$V(x) = 0 \text{ kN}$	$V(x) = -20 \text{ kN}$
$M(x) = -10 \text{ kNm}$	$M(x) = -10 - 20 \cdot (x - 4) = 70 - 20 \cdot x$



### Příklad 5.4



#### Řešení:

1) Výpočet statické určitosti:

$$s = 3 - 3 = 0 \rightarrow \text{konstrukce je staticky určitá}$$

2) Výpočet reakcí:

$$\rightarrow : A_x - 5 = 0, \mathbf{A_x = 5 \text{ kN}}$$

$$\odot a : 20 \cdot 7 + 10 \cdot 3 - M_A = 0, \mathbf{M_A = 170 \text{ kNm}}$$

$$\uparrow : -20 - 10 + A_z = 0, \mathbf{A_z = 30 \text{ kN}}$$

3) Analytické vyjádření vnitřních sil:

interval (b,c):

$$N(x) = 5 \text{ kN}$$

$$V(x) = -20 \text{ kN}$$

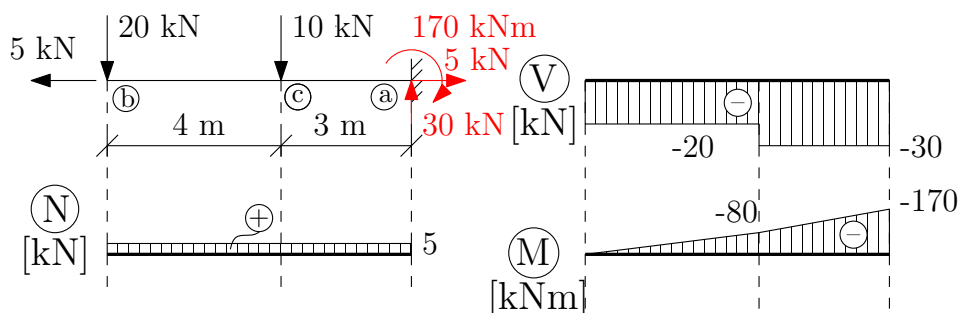
$$M(x) = -20 \cdot x$$

interval (c,a):

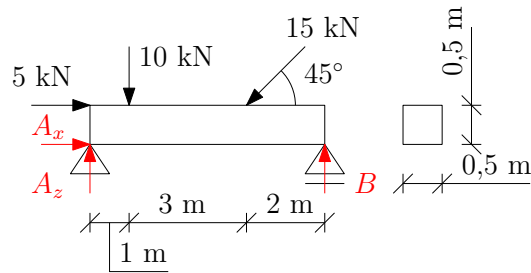
$$N(x) = 5 \text{ kN}$$

$$V(x) = -20 - 10 = -30 \text{ kN}$$

$$M(x) = -20 \cdot x - 10 \cdot (x - 4) = -30 \cdot x + 40$$



## Příklad 5.5



### Řešení:

1) Výpočet statické určitosti:

$$s = 3 - 2 - 1 = 0 \rightarrow \text{konstrukce je staticky určitá}$$

2) Výpočet reakcí:

$$\rightarrow : A_x - 15 \cdot \cos 45^\circ + 5 = 0, \quad \mathbf{A_x = 5,607 \text{ kN}}$$

$$\odot a : -5 \cdot 0,5 - 10 \cdot 1 - 15 \cdot \sin 45^\circ \cdot 4 + 15 \cdot \cos 45^\circ \cdot 0,5 + B \cdot 6 = 0, \quad \mathbf{B = 8,271 \text{ kN}}$$

$$\uparrow : A_z + B - 10 - 15 \cdot \sin 45^\circ = 0, \quad \mathbf{A_z = 12,336 \text{ kN}}$$

3) Analytické vyjádření vnitřních sil:

interval (a,c):

$$N(x) = -5,607 - 5 = -10,607 \text{ kN}$$

$$V(x) = 12,336 \text{ kN}$$

$$M(x) = 5 \cdot 0,25 - A_x \cdot 0,25 + A_z \cdot x = -0,152 + 12,336 \cdot x$$

interval (c,d):

$$N(x) = -10,607 \text{ kN}$$

$$V(x) = 12,336 - 10 = 2,336 \text{ kN}$$

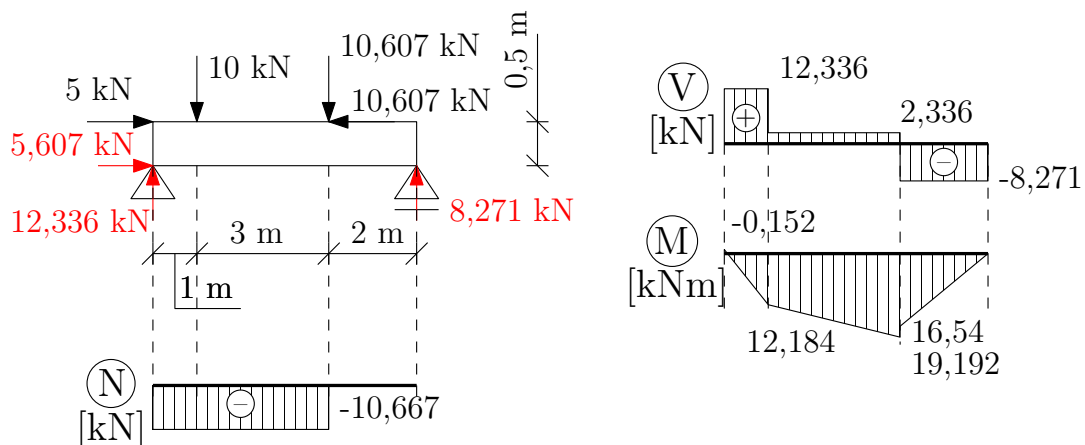
$$M(x) = -0,152 + 12,336 \cdot x - 10 \cdot (x - 1) = 9,848 + 2,336 \cdot x$$

interval (d,b):

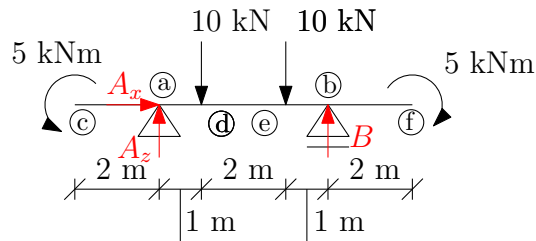
$$N(x) = -10,607 + 15 \cdot \cos 45^\circ = 0 \text{ kN}$$

$$V(x) = 2,336 - 15 \cdot \sin 45^\circ = -8,271 \text{ kN}$$

$$M(x) = 9,848 + 2,336 \cdot x - 15 \cdot \cos 45^\circ \cdot 0,25 - 15 \cdot \sin 45^\circ \cdot (x - 4) = 49,623 - 8,271 \cdot x$$



## Příklad 5.6



### Řešení:

1) Výpočet statické určitosti:

$$s = 3 - 2 - 1 = 0 \rightarrow \text{konstrukce je staticky určitá}$$

2) Výpočet reakcí:

$$\rightarrow : A_x = 0 \text{ kN}$$

$$\circlearrowleft a : 5 - 5 - 10 \cdot 1 - 10 \cdot 3 + B \cdot 4 = 0, \mathbf{B = 10 \text{ kN}}$$

$$\uparrow : A_z + B - 10 - 10 = 0, \mathbf{A_z = 10 \text{ kN}}$$

3) Analytické vyjádření vnitřních sil:

interval (c,a):

$$N(x) = 0 \text{ kN}$$

$$V(x) = 0 \text{ kN}$$

$$M(x) = -5 \text{ kNm}$$

interval (a,d):

$$N(x) = 0 \text{ kN}$$

$$V(x) = 10 \text{ kN}$$

$$M(x) = -5 + 10 \cdot (x - 2) = -25 + 10 \cdot x$$

interval (d,e):

$$N(x) = 0 \text{ kN}$$

$$V(x) = 10 - 10 = 0 \text{ kN}$$

$$M(x) = -25 + 10 \cdot x - 10 \cdot (x - 3) = 5 \text{ kNm}$$

interval (e,b):

$$N(x) = 0 \text{ kN}$$

$$V(x) = 0 - 10 = -10 \text{ kN}$$

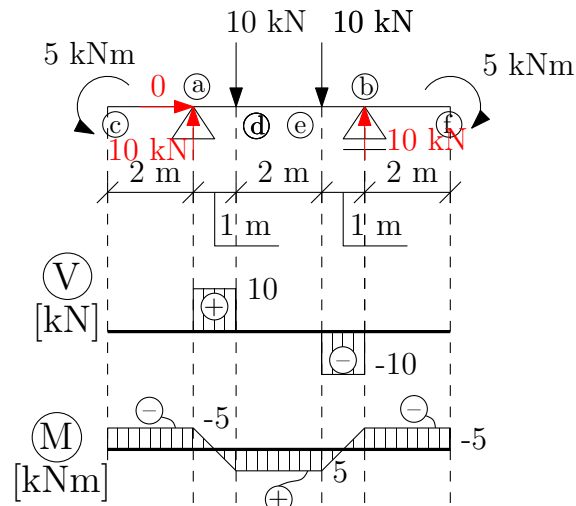
$$M(x) = -5 - 10 \cdot (x - 5) = 55 - 10 \cdot x$$

interval (b,f):

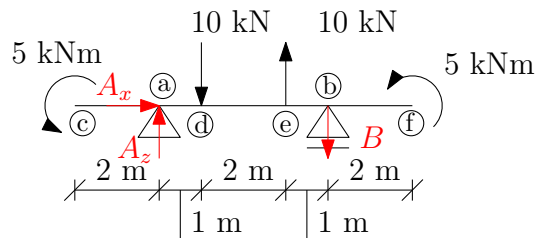
$$N(x) = 0 \text{ kN}$$

$$V(x) = -10 + 10 = 0 \text{ kN}$$

$$M(x) = 55 - 10 \cdot x + 10 \cdot (x - 6) = -5 \text{ kNm}$$



### Příklad 5.7



#### Řešení:

1) Výpočet statické určitosti:

$$s = 3 - 2 - 1 = 0 \rightarrow \text{konstrukce je staticky určitá}$$

2) Výpočet reakcí:

$$\rightarrow : A_x = 0 \text{ kN}$$

$$\odot a : 5 + 5 - B \cdot 4 - 10 \cdot 1 + 10 \cdot 3 = 0, B = 7,5 \text{ kN}$$

$$\uparrow : A_z - B - 10 + 10 = 0, A_z = 7,5 \text{ kN}$$

3) Analytické vyjádření vnitřních sil:

interval (c,a):

$$N(x) = 0 \text{ kN}$$

$$V(x) = 0 \text{ kN}$$

$$M(x) = -5 \text{ kNm}$$

interval (a,d):

$$N(x) = 0 \text{ kN}$$

$$V(x) = 7,5 \text{ kN}$$

$$M(x) = -5 + 7,5 \cdot (x - 2) = -20 + 7,5 \cdot x$$

interval (d,e):

$$N(x) = 0 \text{ kN}$$

$$V(x) = 7,5 - 10 = -2,5 \text{ kN}$$

$$M(x) = -20 + 7,5 \cdot x - 10 \cdot (x - 3) = 10 - 2,5 \cdot x$$

interval (e,b):

$$N(x) = 0 \text{ kN}$$

$$V(x) = -2,5 + 10 = 7,5 \text{ kN}$$

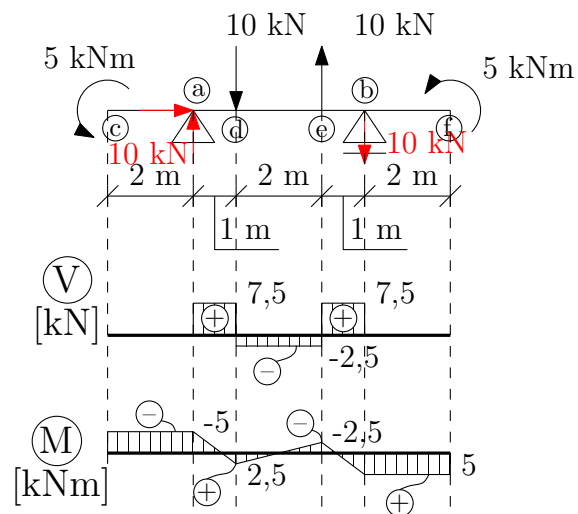
$$M(x) = 10 - 2,5 \cdot x + 10 \cdot (x - 5) = -40 + 7,5 \cdot x$$

interval (b,f):

$$N(x) = 0 \text{ kN}$$

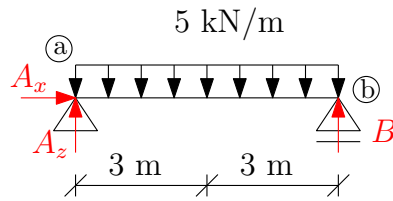
$$V(x) = -7,5 + 7,5 = 0 \text{ kN}$$

$$M(x) = -40 + 7,5 \cdot x - 7,5 \cdot (x - 6) = -5 \text{ kNm}$$





## Příklad 5.8



### Řešení:

1) Výpočet statické určitosti:

$$s = 3 - 2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \text{konstrukce je staticky určitá}$$

2) Výpočet reakcí:

$$\begin{aligned} \rightarrow : \quad A_x &= 0 \text{ kN} \\ \circlearrowleft a : \quad B \cdot 6 - 5 \cdot \frac{6^2}{2} &= 0, \quad B = 15 \text{ kN} \\ \uparrow : \quad A_z + B - 5 \cdot 6 &= 0, \quad A_z = 15 \text{ kN} \end{aligned}$$

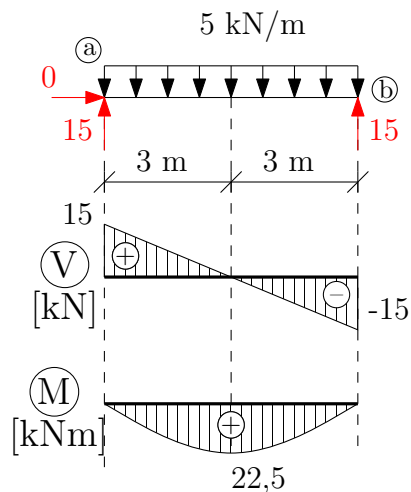
3) Analytické vyjádření vnitřních sil:

interval (a,b):

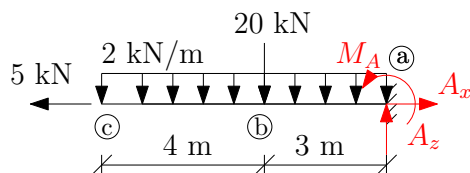
$$N(x) = 0 \text{ kN}$$

$$V(x) = 15 - 5 \cdot x$$

$$M(x) = 15 \cdot x - 5 \cdot \frac{x^2}{2}$$



## Příklad 5.9



### Řešení:

1) Výpočet statické určitosti:

$$s = 3 - 3 = 0 \rightarrow \text{konstrukce je staticky určitá}$$

2) Výpočet reakcí:

$$\rightarrow : A_x - 5 = 0 \text{ kN}, A_x = 5 \text{ kN}$$

$$\circlearrowleft a : 20 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{7^2}{2} + M_A = 0, M_A = 109 \text{ kNm}$$

$$\uparrow : A_z - 20 - 2 \cdot 7 = 0, A_z = 34 \text{ kN}$$

3) Analytické vyjádření vnitřních sil:

interval (c,b):

$$N(x) = 5 \text{ kN}$$

$$V(x) = -2 \cdot x$$

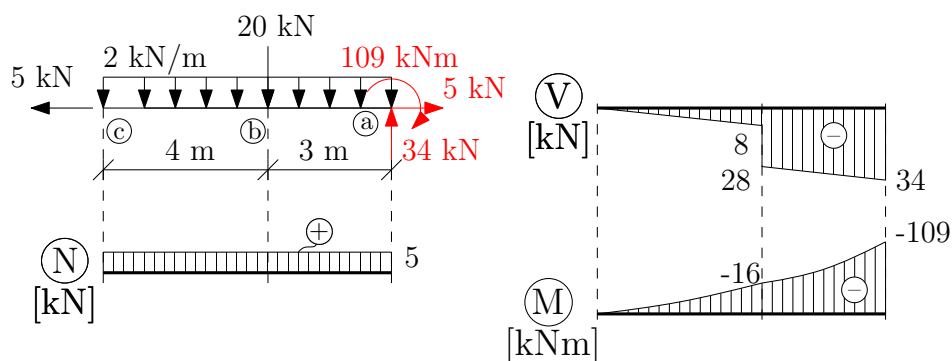
$$M(x) = -2 \cdot \frac{x^2}{2} = -x^2$$

interval (b,a):

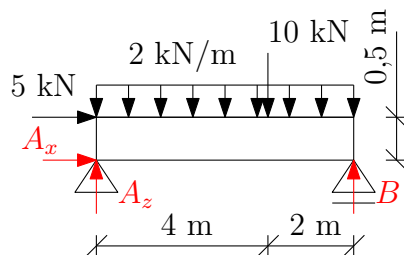
$$N(x) = 5 \text{ kN}$$

$$V(x) = -2 \cdot x - 20$$

$$M(x) = -2 \cdot \frac{x^2}{2} - 20 \cdot (x - 4) = -x^2 - 20 \cdot x + 80$$



## Příklad 5.10



### Řešení:

1) Výpočet statické určitosti:

$$s = 3 - 2 - 1 = 0 \rightarrow \text{konstrukce je staticky určitá}$$

2) Výpočet reakcí:

$$\rightarrow : A_x + 5 = 0, A_x = -5 \text{ kN}$$

$$\circlearrowleft a : B \cdot 6 - 10 \cdot 4 - 2 \cdot 6 \cdot 3 - 5 \cdot 0,5 = 0, B = 13,083 \text{ kN}$$

$$\uparrow : A_z + B - 10 - 2 \cdot 6 = 0, A_z = 8,917 \text{ kN}$$

3) Analytické vyjádření vnitřních sil:

interval (a,c):

$$N(x) = -5 + 5 = 0 \text{ kN}$$

$$V(x) = 8,917 - 2 \cdot x$$

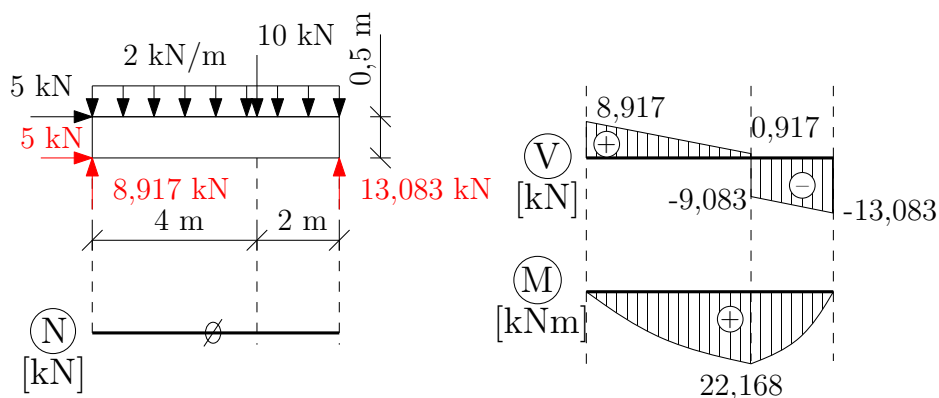
$$M(x) = 5 \cdot 0,25 + 5 \cdot 0,25 + 8,917 \cdot x - 2 \cdot \frac{x^2}{2} = -x^2 + 8,917 \cdot x + 2,5$$

interval (c,b):

$$N(x) = 0 \text{ kN}$$

$$V(x) = 8,917 - 2 \cdot x - 10 = -2 \cdot x - 2,917$$

$$M(x) = -x^2 + 8,917 \cdot x + 2,5 - 10 \cdot (x - 4) = -x^2 - 1,083 \cdot x + 42,5$$



**Prosba** V případě, že v textu objevíte nějakou chybu nebo budete mít námět na jeho vylepšení, ozvěte se prosím na [adela.pospisilova@fsv.cvut.cz](mailto:adela.pospisilova@fsv.cvut.cz).

**V02:** Opraven rozměr u příkladu 5.2. (Na chybu upozornila Dominika Klavrzová.)

**V03:** Opraveny intervaly.

**V04:** Opravena momentová podmínka rovnováhy kolem bodu a u výpočtu reakcí - příklad 5.1. (Na chybu upozornila Iveta Lovászová z UJEP.)

**V05:** Opravena posouvající síla u příkladu 5.2 (interval (c,d) a (d,b)). (Na chybu upozornila Vendulka Nesvadbová.)