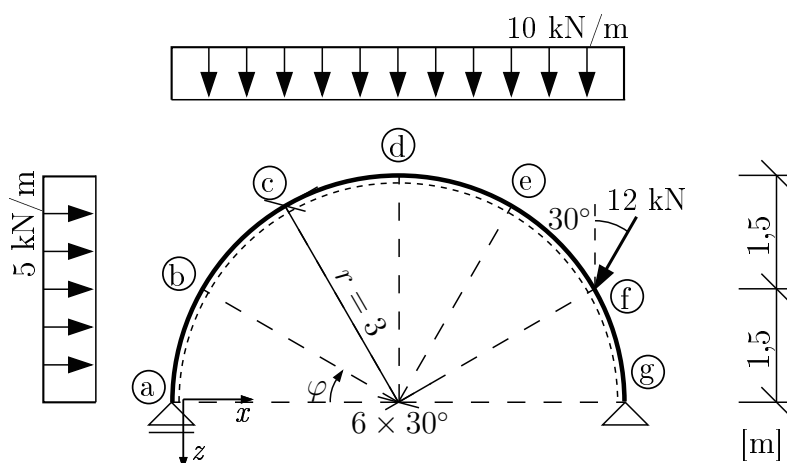


# Vnitřní síly na konstrukci se zakřivenou střednicí

2. dubna 2020



Obrázek 1: Statické schéma.

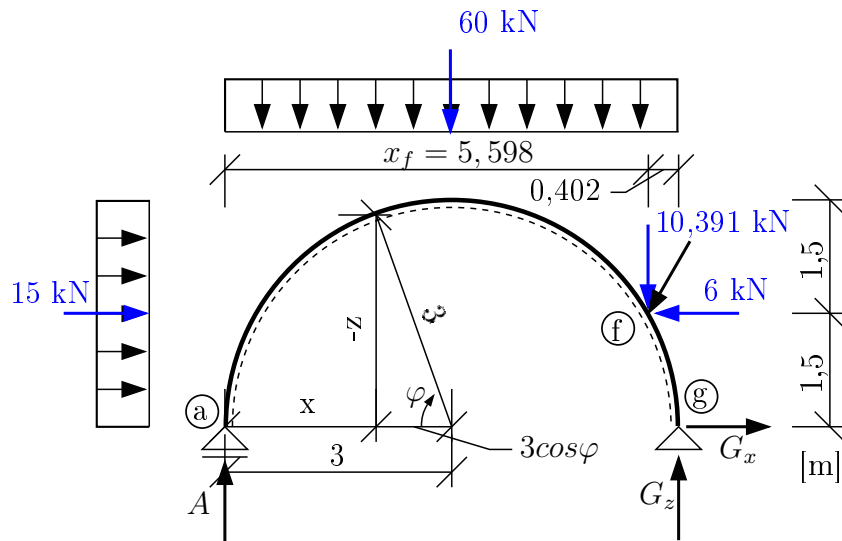
## Úkol:

1. Určete analytické průběhy vnitřních sil na zadané konstrukci.
2. Určete hodnoty vnitřních sil v bodech  $a - g$ .
3. Nalezněte extrémy ohybových momentů.
4. Výsledky vykreslete.

## Řešení:

- Kladná orientace vnitřních sil je shodná s přímým či šikmým nosníkem. V každém bodě konstrukce působí vždy normálová síla ve směru střednice a posouvající síla je kolmá ke střednici.
- Narozdíl od přímých prutů je pro výpočet vnitřních sil komplikované a často nevhodné rozkládat zatížení na složky působící kolmo ke střednici a složky ve směru střednice. Místo Schwedlerových vět tedy použijeme geometrii konstrukce, globální kartézský souřadnicový systém  $(x, z)$  a polární souřadnicový systém  $(\varphi, r)$ .

Abychom mohli efektivně využívat výhody obou souřadnicových systémů, musíme mezi nimi najít transformační vztah. Z geometrie Obrázku 2 můžeme odvodit rovnice 1 a 2, s jejichž pomocí můžeme určit souřadnice  $x$  a  $y$  pro libovolný bod pouze pomocí souřadnice  $\varphi$ .



Obrázek 2: Rozklad zatížení.

$$x(\varphi) = 3 \cdot (1 - \cos(\varphi)) \quad (1)$$

$$z(\varphi) = -3 \cdot \sin(\varphi) \quad (2)$$

### Výpočet reakcí:

- Pro výpočet reakcí je vhodné rozdělit osamělou sílu na svislou a vodorovnou složku. Zároveň je potřeba najít souřadnici  $x_f$  jejího působíště. Pro výpočet reakcí dále nahradíme spojitě zatížení náhradním břemenem. Schéma rozkladu zatížení je na Obrázku 2.
- Pro nalezení souřadnice  $x_f$  můžeme využít rovnici popisující kružnici. Střednice této konstrukce lze popsat rovnicí 3. Dosazením  $z = -1,5$  m do rovnice 3 určíme  $x_F = 5,5981$  m.

$$(x - 3)^2 + z^2 = 3^2 \quad (3)$$

Alternativní možností je nalézt úhel  $\varphi_f$  z geometrie konstrukce, například:

$$\cos(\varphi_f) = \frac{1,5}{3} \rightarrow \varphi_f = 150^\circ \quad (4)$$

Následným dosazením  $\varphi_f$  do rovnice 1 taktéž získáme výše zmíněnou hodnotu  $x_F$ .

- Pomocí Obrázku 2 z podmínek rovnováhy určíme reakce a vykreslíme je podle skutečné orientace.

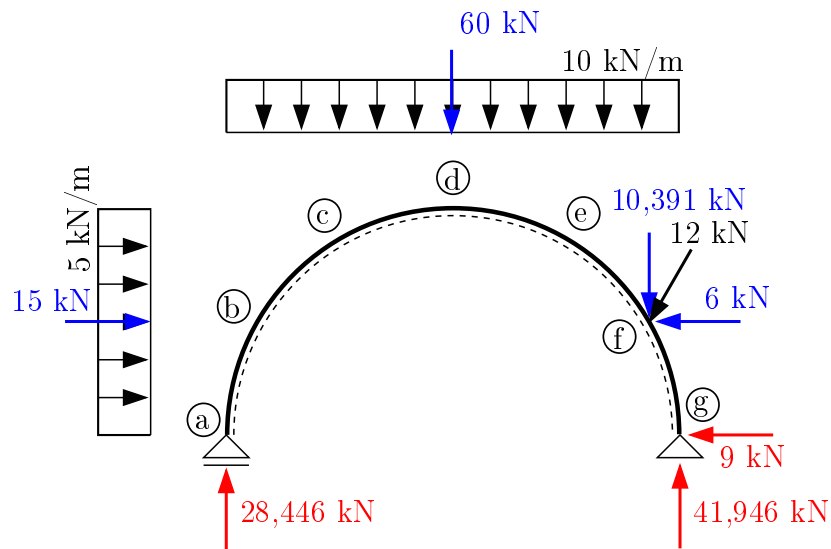
$$\rightarrow : 15 - 6 + G_x = 0 \Rightarrow G_x = -9 \text{ kN} \quad (5)$$

$$\odot b : 6 \cdot 1,5 + 10,392 \cdot 0,4019 + 60 \cdot 3 - 15 \cdot 1,5 - 6 \cdot A \Rightarrow A = 28,446 \text{ kN} \quad (6)$$

$$\uparrow : -60 - 10,392 + 28,446 + G_z = 0 \Rightarrow G_z = 41,946 \text{ kN} \quad (7)$$

Pro kontrolu reakcí můžeme použít nevyužitou momentovou podmínku rovnováhy:

$$\odot a : 41,946 \cdot 6 + 6 \cdot 1,5 - 10,392 \cdot 5,5981 - 60 \cdot 3 - 15 \cdot 1,5 \approx 0 \quad (8)$$

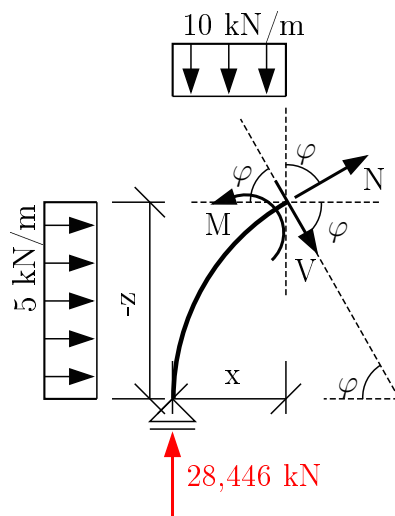


Obrázek 3: Vnější zatížení a reakce.

### Výpočet vnitřních sil:

- Konstrukci bude nutné rozdělit na několik intervalů, na nichž budeme schopni analyticky vyjádřit průběhy vnitřních funkcí. Tyto intervaly budou  $(a; d)$ ,  $(d; f)$  a  $(f; g)$ .

Provedeme teoretický řez v libovolném místě intervalu  $(a; d)$  a oddělíme levou část konstrukce. Zaneseme do obrázku veškeré zatížení, reakce, vnitřní síly a potřebné proměnné:



Obrázek 4: Oddělení levé části konstrukce.

Poté podle Obrázku 4 sestavíme rovnice vnitřních sil na intervalu  $(a; d)$ :

$$N(\varphi) = -5 \cdot (-z) \cdot \sin(\varphi) + 10 \cdot x \cdot \cos(\varphi) - 28.446 \cdot \cos(\varphi) \quad (9)$$

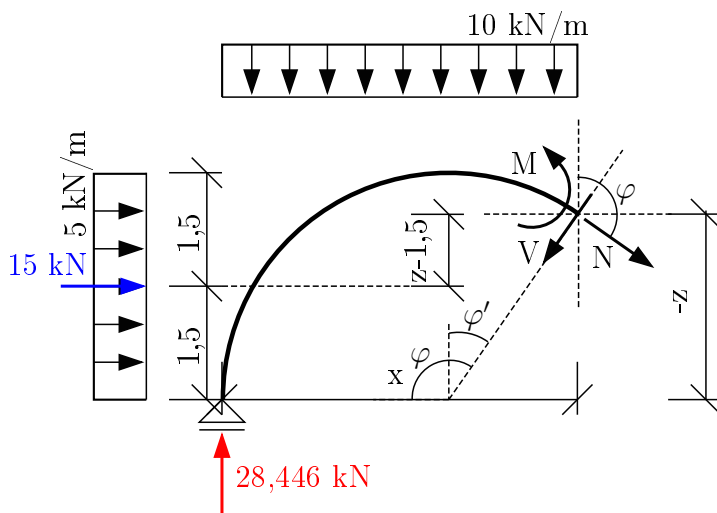
$$V(\varphi) = -5 \cdot (-z) \cdot \cos(\varphi) - 10 \cdot x \cdot \sin(\varphi) + 28.446 \cdot \sin(\varphi) \quad (10)$$

$$M(\varphi) = -5 \cdot (-z) \cdot \frac{-z}{2} - 10 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + 28.446 \cdot x \quad (11)$$

Rovnice 9 - 11 nejsou však pouze funkcemi proměnné  $\varphi$ , ale zároveň i funkcemi  $x$  a  $z$ . To pro

výpočet vnitřních sil v jednotlivých bodech však není problém díky znalosti transformačních vztahů 1 a 2.

- Z funkcí pro vnitřní síly na intervalu  $(a; d)$  je možné pouze malou úpravou získat analytické vztahy na intervalu  $(d; f)$ . Složky vnitřních sil způsobené reakcí  $A$  i svislým spojitým zatížením jsou totiž na intervalu  $(a; d)$  stejné jako na  $(d; f)$ . Musíme pouze upravit příspěvek způsobený horizontálním spojitým zatížením. Na rozdíl od předchozího intervalu, na  $(d; f)$  působí vodorovné zatížení celé na celé délce 3 m a velikost jeho náhradního břemene již není funkcí  $\varphi$ . Pro výpočet  $M$  se také změní rameno, na kterém náhradní břemeno působí.



Obrázek 5: Řez v intervalu  $(d; f)$ .

Na první pohled by se mohlo zdát, že na intervalu  $(d; f)$  může být potřeba změnit znaménka u některých zatížení pro výpočet vnitřních sil, protože např. kladná normálová síla působila na intervalu  $(a; d)$  nahoru, ale na intervalu  $(d; f)$  působí dolů. Ve skutečnosti však znaménka měnit nemusíme, protože jejich změna je již "automaticky" způsobena goniometrickými funkcemi.

S pomocí Obrázku 5 odvodíme rovnice pro vnitřní síly na intervalu  $(d; f)$ :

$$N(\varphi) = -5 \cdot 3 \cdot \sin(\varphi) + 10 \cdot x \cdot \cos(\varphi) - 28.446 \cdot \cos(\varphi) \quad (12)$$

$$V(\varphi) = -5 \cdot 3 \cdot \cos(\varphi) - 10 \cdot x \cdot \sin(\varphi) + 28.446 \cdot \sin(\varphi) \quad (13)$$

$$M(\varphi) = -5 \cdot 3 \cdot [(-z) - 1,5] - 10 \cdot x \cdot \frac{x}{2} + 28,446 \cdot x \quad (14)$$

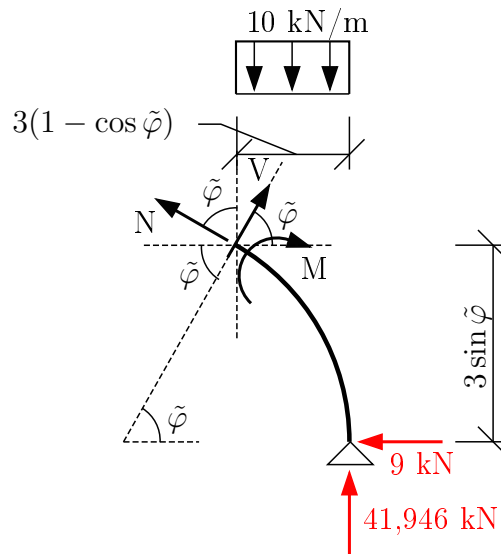
Pokud nechceme využívat rovnic 9 - 11, můžeme samozřejmě sestavit rovnice v závislosti na jiné proměnné, např.  $\varphi'$ , kde  $\varphi' = \varphi - 90^\circ$ . Nyní máme vyřešeny vnitřní síly až do bodu  $f$  zleva.

- Dále bychom mohli upravit rovnice 12 - 14 o vliv osamělé síly  $F$  a získat rovnice pro poslední zbývající interval. Pro názornost si však ukážeme výpočet zprava (na záporné plošce) pomocí souřadnice  $\tilde{\varphi}$  podle Obrázku 6 a získáme analytické vztahy pro vnitřní síly na intervalu  $(f; g)$ :

$$N(\tilde{\varphi}) = -9 \cdot \sin(\tilde{\varphi}) - 41.946 \cdot \cos(\tilde{\varphi}) + 10 \cdot 3 \cdot [1 - \cos(\tilde{\varphi})] \cdot \cos(\tilde{\varphi}) \quad (15)$$

$$V(\tilde{\varphi}) = 9 \cdot \cos(\tilde{\varphi}) - 41,946 \cdot \sin(\tilde{\varphi}) + 10 \cdot 3 \cdot [1 - \cos(\tilde{\varphi})] \cdot \sin(\tilde{\varphi}) \quad (16)$$

$$M(\tilde{\varphi}) = -9 \cdot 3 \cdot \sin(\tilde{\varphi}) + 41,946 \cdot [3 \cdot (1 - \cos(\tilde{\varphi}))] - 10 \cdot \frac{[3 \cdot (1 - \cos(\tilde{\varphi}))]^2}{2} \quad (17)$$



Obrázek 6: Řez v intervalu ( $f;g$ ).

V tomto případě jsme již nevyužili globální souřadnicový systém ( $x,y$ ).

- Pomocí analytických vztahů můžeme určit všechny hodnoty vnitřních sil v bodech  $a - g$ , které nám budou sloužit pro orientační vykreslení. Výsledky jsou shrnuté v Tabulce 1. V bodě  $f$  je nutné kvůli osamělé síle učit hodnoty vnitřních sil zleva i zprava (řezy jsou značeny  $f^L$  a  $f^P$ ).

řez	proměnná	rovnice	N [kN]	V [kN]	M [kNm]
$a$	$\varphi = 0^\circ$	9, 10, 11	-28,446	0	0
$b$	$\varphi = 30^\circ$	9, 10, 11	-24,904	5,718	5,00
$c$	$\varphi = 60^\circ$	9, 10, 11	-17,973	5,149	14,544
$d$	$\varphi = 90^\circ$	9, 10, 11	-15,00	-1,544	17,838
$e$	$\varphi = 120^\circ$	12, 13, 14	-21,267	-6,836	10,286
$f^L$	$\varphi = 150^\circ$	12, 13, 14	-31,346	-0,777	2,551
$f^P$	$\tilde{\varphi} = 30^\circ$	15, 16, 17	-37,346	-11,169	2,551
$g$	$\tilde{\varphi} = 0^\circ$	15, 16, 17	-41,946	9	0

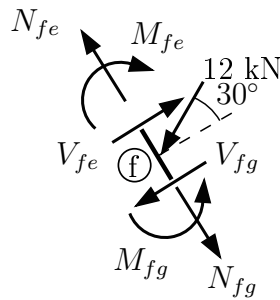
Tabulka 1: Vnitřní síly v zadaných řezech

- Podmínky rovnováhy v bodě  $f$  využijeme ke kontrole:

$$\nearrow : V_{fe} - V_{fg} - 12 \cdot \cos 30^\circ = -0,777 - (-11,169) - 12 \cdot \cos 30^\circ \approx 0 \quad (18)$$

$$\nwarrow : N_{fe} - N_{fg} - 12 \cdot \sin 30^\circ = -31,346 - (-37,346) - 12 \cdot \sin 30^\circ \approx 0 \quad (19)$$

$$\circlearrowleft c : M_{fg} - M_{fe} \approx 0 \quad (20)$$



Obrázek 7: Rovnováha v bodě  $f$ .

### Extrémy ohybových momentů:

- Podle hodnot v Tabulce 1 můžeme jednoznačně říci, že na intervalech  $(c; d)$  a  $(f; g)$  prochází posouvající síla nulou, tudíž budeme právě v těchto intervalech hledat extrémní hodnotu momentu.

Začněme intervalem  $(c; d)$ . Do rovnice posouvající síly 10 dosadíme rovnice 1 a 2, zjednodušíme a výsledek položíme rovný nule:

$$0 = V(\varphi) \quad (21)$$

$$0 = -5 \cdot (-z) \cdot \cos(\varphi) - 10 \cdot x \cdot \sin(\varphi) + 28.446 \cdot \sin(\varphi) \quad (22)$$

$$0 = \sin(\varphi) \cdot [15 \cdot \cos(\varphi) - 1,554] \quad (23)$$

$$\varphi_{max} = \arccos\left(\frac{1,554}{15}\right) \quad (24)$$

$$\varphi_{max} = 84,05^\circ \quad (25)$$

Pro nalezení maximálního momentu  $M_{max,1}$  dosadíme  $\varphi_{max}$  do rovnic 1, 2 a následně do rovnice 11:

$$M_{max,1} = M(\varphi_{max} = 84,05^\circ) = 18,079 \text{ kN} \quad (26)$$

- Nyní se pokusíme nalézt extrém ohybového momentu na intervalu  $(f; g)$ . Stejně jako v předchozím případě položíme posouvající sílu 16 rovnou nule:

$$0 = V(\tilde{\varphi}) \quad (27)$$

$$0 = 9 \cdot \cos(\tilde{\varphi}) - 41.946 \cdot \sin(\tilde{\varphi}) + 10 \cdot 3 \cdot [1 - \cos(\tilde{\varphi})] \cdot \sin(\tilde{\varphi}) \quad (28)$$

$$0 = 9 \cdot \cos(\tilde{\varphi}) - 11,946 \cdot \sin(\tilde{\varphi}) - 30 \cdot \sin(\tilde{\varphi}) \cdot \cos(\tilde{\varphi}) \quad (29)$$

Tato rovnice není analyticky řešitelná. Na rozdíl od přímých nosníků není na konstrukcích se zakřivenou střednicí vždy možné nalézt extrémy vnitřních sil v uzavřeném tvaru. Pokud bychom hledali extrémní hodnoty posouvající síly pomocí  $dV/d\varphi = 0$ , dospěli bychom k podobnému problému. V tomto případě nezbyvá jiný způsob než numerické řešení. To nemusíte provádět, ale lze k němu použít libovolný matematický software nebo lepší kalkulačku.

Vyřešením rovnice 29 a výběrem správného kořenu získáme  $\tilde{\varphi}_{max} = 12,306^\circ$ . Dosazením do rovnice 17 pak nalezneme extrém momentu  $M_{max,2} = -2,887 \text{ kN}$  na intervalu  $(f; g)$

### Vykreslení:

- Pro vykreslení vnitřních sil platí stejná pravidla jako pro přímé nosníky - pořadnice vynášíme vždy kolmo k nosníku a moment vždy na stranu tažených vláken.

Vlivem osamělé síly v bodě  $f$  dochází k nespojitosti normálové a posouvající síly. V důsledku nespojitě posouvající síly vzniká v tomto bodě nespojitá derivace momentu. Derivace posouvající síly je ovlivněna pouze spojitým zatížením, proto jsou tečny  $V$  v řezech  $f^L$  a  $f^P$  rovnoběžné. stejně tak jsou rovnoběžné tečny normálové síly v těchto řezech.

