

Řešení stability tlačného nosníku s využitím diferenciálních operátorů

ČVUT, fakulta stavební,
katedra matematiky a katedra mechaniky,
ZS 2015/2016

Lenka Dohnalová

Semestrální práce

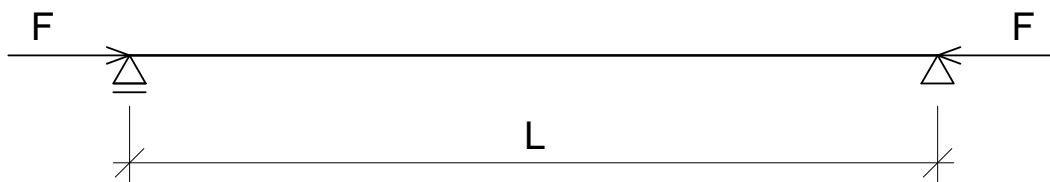
Pevnost a pružnost, Matematika 3

Odborné vedení:

doc. Ing. Jan Zeman, Ph.D.

doc. RNDr. Jan Chleboun, CSc.

1 Vzpěr centricky tlačného prutu



Obrázek 1: Tlačný nosník o jednom poli

1.1 Výchozí vztahy

Tato semestrální práce částečně navazuje na semestrální práci Průhyb nosníku, jejímž obsahem bylo podrobné odvození rovnice průhybové čáry pro prostě podepřený homogenní nosník s konstantním symetrickým průřezem, jehož podélná osa leží v souřadné ose x a na nějž působí ve směru osy y spojité zatížení a dále je na koncích tlačeno osovou silou F . Budeme tedy bez dalšího vysvětlování přímo vycházet ze získaných vztahů.

Ukažme pouze drobnou změnu, která je dána absencí spojitěho zatížení. Při nulové hodnotě spojitěho zatížení dojde k výraznému zjednodušení a získáme homogenní diferenciální rovnici pro průhyb $w(x)$ ve tvaru

$$w^{(4)}(x) + w''(x) \frac{F}{EI} = 0,$$

kde F je síla, kterou je nosník tlačeno na svých koncích,

E je Youngův modul pružnosti,

I je moment setrvačnosti průřezu k ose y .

Pro homogenní nosník bude hodnota Youngova modulu pružnosti konstantní po celé délce nosníku, pro zjednodušení navíc uvažujme nosník kruhového průřezu a možné vybočení pouze v rovině xy .

Po zavedení

$$k = \sqrt{\frac{F}{EI}} \tag{1}$$

bude mít rovnice tvar

$$w^{(4)}(x) + k^2 w''(x) = 0. \quad (2)$$

Substitucí

$$p(x) = w''(x)$$

převědeme rovnici (2) na diferenciální rovnici druhého řádu ve tvaru

$$p''(x) + k^2 p(x) = 0 \quad (3)$$

s obecným řešením ve tvaru

$$p(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx). \quad (4)$$

Tímto krokem a návratem k substituci jsme získali vztah pro druhou derivaci průhybu

$$w'' = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx). \quad (5)$$

Dvojím integrováním, resp. derivováním tohoto výrazu získáme rovnice pro průhyb a jeho první derivaci, resp. rovnice pro třetí a čtvrtou derivaci průhybu

$$w = -\frac{1}{k^2} C_1 \cos(kx) - \frac{1}{k^2} C_2 \sin(kx) + C_3 x + C_4, \quad (6)$$

$$w' = \frac{1}{k} C_1 \sin(kx) - \frac{1}{k} C_2 \cos(kx) + C_3, \quad (7)$$

$$w''' = -k C_1 \sin(kx) + k C_2 \cos(kx), \quad (8)$$

$$w^{(4)} = -k^2 C_1 \cos(kx) - k^2 C_2 \sin(kx). \quad (9)$$

Tyto rovnosti vycházejí z obecného řešení, budou tedy platit pro každý tlačný prut bez ohledu na to, jakým způsobem je na svých koncích podepřen. Způsob podepření se projeví pouze ve čtyřech okrajových podmínkách, které jsou pro řešení diferenciální rovnice čtvrtého řádu nezbytné.

1.2 Řešení problému stability pro různé způsoby podepření nosníku, využití diferenciálních operátorů

Zavedme označení

$$\lambda = k^2$$

a zabývejme se otázkou, pro která λ má rovnice (2), resp. (3) doplněná o okrajové podmínky nenulové řešení na intervalu $[0, L]$, kde L je délka nosníku. Půjde tedy o hledání vlastních čísel λ a příslušných vlastních funkcí daného problému.

1.2.1 Kloubové podepření

Případu prostě podepřeného nosníku (Obrázek 1) odpovídají okrajové podmínky vyjadřující nulový průhyb a nulový moment na obou jeho koncích

$$w(0) = 0, \tag{10}$$

$$w''(0) = 0, \tag{11}$$

$$w(L) = 0, \tag{12}$$

$$w''(L) = 0. \tag{13}$$

Z okrajové podmínky (11) a rovnosti (5) plyne

$$C_1 = 0$$

a dále je z podmínky (10) zřejmá rovnost

$$C_4 = 0.$$

Využitím dvou zbývajících okrajových podmínek (12) a (13) pro pravou podporu dostáváme

$$-\frac{1}{k^2}C_2 \sin(kL) + C_3L = 0$$

a

$$C_2 \sin(kL) = 0.$$

Vzhledem k tomu, že délka nosníku L je nenulová, je z porovnání obou výrazů zřejmé, že musí platit

$$C_3 = 0.$$

Zajímá nás netriviální řešení, jež nastane pokud $C_2 \neq 0$, tedy při rovnosti

$$\sin(kL) = 0,$$

která nastává v případě, že

$$kL = n\pi, \tag{14}$$

kde n je libovolné celé číslo.

Vzhledem k předpokladu kladné síly F a tedy z (1) plynoucích kladných hodnot pro k , a dále z platnosti $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, můžeme uvažovat n zjednodušeně jako celá kladná čísla.

Nulu můžeme vyloučit, protože pro $n = 0$ je $k = 0$ a tedy $F = 0$, což je v rozporu s předpokladem, že na nosník působí nenulová síla F .

Podívejme se na celý problém okrajových úloh a hledání vlastních čísel a vlastních funkcí obecněji. Z matematického hlediska je možné každou okrajovou úlohu vyjádřit v tzv. operátorovém tvaru, tedy pomocí vhodného diferenciálního operátoru a příslušné operátorové rovnice. Okrajové podmínky se v takovém případě objeví v definičním oboru operátoru, který budeme značit D_A .

Potom pro řešení výše uvedené úlohy prostě podepřeného nosníku využijeme substituovaný tvar

$$p''(x) + \lambda p(x) = 0 \tag{15}$$

a okrajové podmínky

$$p(0) = p(L) = 0. \tag{16}$$

Zvolme lineární diferenciální operátor daný předpisem

$$\mathbf{A} = -D^2,$$

na množině přípustných funkcí

$$D_A = \{p \in C^2([0, L]) : p(0) = p(L) = 0\}$$

s příslušnou operátorovou rovnicí

$$\mathbf{A}p = \lambda p.$$

Podle věty o vlastních číslech ([2, Věta 5.7 (iii)]) víme, že pro symetrický a pozitivní operátor jsou všechna vlastní čísla kladná. Stačí tedy tyto vlastnosti dokázat pro námi zvolený operátor \mathbf{A} .

Při důkazu symetrie využijeme metodu per partes a následné dosazení okrajových podmínek

$$(\mathbf{A}p, q) = (-p'', q) = \int_0^L -p''q \, dx = [-p'q]_0^L + \int_0^L p'q' \, dx = \int_0^L p'q' \, dx = (p', q'),$$

$$(\mathbf{A}q, p) = (-q'', p) = \int_0^L -q''p \, dx = [-q'p]_0^L + \int_0^L q'p' \, dx = \int_0^L p'q' \, dx = (p', q'),$$

takže

$$(\mathbf{A}p, q) = (p', q') = (q', p') = (\mathbf{A}q, p) = (p, \mathbf{A}q),$$

operátor \mathbf{A} je tedy symetrický. S využitím obdobných úprav ukážeme, že se jedná také o operátor pozitivní, tedy že pro každou netriviální funkci $p \in D_A$ platí $(\mathbf{A}p, p) > 0$.

$$(\mathbf{A}p, p) = (p', p') = \|p'\|^2 > 0,$$

ostrá nerovnost plyne z toho, že nulové hodnoty výraz $\|p'\|^2$ nabývá pouze pro případ $p' = 0$, tedy $p = konst.$, což vzhledem k okrajovým podmínkám nulových hodnot v krajních bodech intervalu znamená $p \equiv 0$ na celém intervalu $[0, L]$, v definici pozitivního operátoru se však uvažují pouze netriviální funkce, a pro ty uvedená nerovnost platí.

Tím jsou dokázány potřebné předpoklady pro platnost věty o vlastních číslech operátoru, všechna vlastní čísla musí být kladná, a tedy nula není vlastním číslem daného problému.

Dosazením okrajových podmínek (16) do řešení (4) získáme soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé C_1 a C_2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin(kL) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

která má netriviální řešení právě tehdy, když je matice M soustavy singulární, tedy pokud je determinant matice M roven nule. Odtud velmi jednoduše dostáváme podmínku $\sin(kL) = 0$, k níž jsme došli při hledání netriviálního řešení okrajové úlohy bez využití diferenciálních operátorů.

Podmínka je splněna právě tehdy, pokud platí rovnost (14), odtud

$$k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Vlastní čísla pro případ prostě podepřeného tlačného nosníku jsou tedy dána vztahem

$$\lambda_n = k_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

přičemž každému vlastnímu číslu λ_n přísluší vlastní funkce

$$p_n = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

a všechny její nenulové skalární násobky.

Při statickém posuzování konstrukcí nás zajímá první, t.j. nejmenší vlastní číslo a jemu odpovídající vlastní funkce, tedy

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{L^2}, \quad p_1 = \sin \frac{\pi x}{L}.$$

Připomeňme vztah (1), který jsme v úvodu tohoto textu zavedli. Z prvního vlastního čísla a tohoto vztahu vyjádříme tzv. kritickou sílu, tedy nejmenší sílu, při které dojde ke ztrátě stability tlačného nosníku

$$F_{\text{cr}} = \frac{EI\pi^2}{L^2}.$$

Pokud bychom chtěli od vlastních funkcí pro substituovanou rovnici přejít k řešení původní diferenciální rovnice pro průhyb w , potom vztah pro vlastní

funkce p_n dvakrát integrujeme a využijeme okrajové podmínky (10) a (12) pro určení integračních konstant

$$\begin{aligned} p_n &= \sin \frac{n\pi x}{L} = w_n'', \\ w_n' &= -\frac{L}{\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} + C_3, \\ w_n &= -\frac{L^2}{\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{L} + C_3 x + C_4, \end{aligned}$$

z okrajové podmínky (10) určíme hodnotu konstanty $C_4 = 0$ a následně z podmínky (12) konstantu $C_3 = 0$. netriviální řešení průhybu tedy bude mít tvar

$$w_n = -\frac{L^2}{\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

1.2.2 Kombinace posuvného kloubu a vetknutí

Uvažujme stejný nosník, který bude na svém pravém konci vetknutý. Změna podepření se projeví pouze v okrajových podmínkách, které budou mít nyní podobu

$$\begin{aligned} w(0) &= w(L) = 0, \\ w''(0) &= 0, \\ w'(L) &= 0, \end{aligned}$$

tedy v místě vetknutí již neplatí nulová hodnota momentu, ale objeví se zde podmínka nulového pootočení.

Z podmínky nulového momentu v místě kloubové podpory $w''(0) = 0$ a rovnosti (5) dostáváme nulovou hodnotu konstanty C_1 a následně z podmínky nulového průhybu v téže podpoře $w(0) = 0$ a rovnosti (6) nulovou hodnotu konstanty C_4 .

Pro zbývající dvě konstanty C_2 a C_3 vytvoříme soustavu dvou rovnic dosazením okrajových podmínek v místě vetknutí do rovností (6) a (7) s maticovým zápisem

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{k^2} \sin(kL) & L \\ -\frac{1}{k} \cos(kL) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a opět budeme hledat netriviální řešení soustavy, tedy případ, kdy je determinant matice M roven nule.

$$\det(M) = -\frac{1}{k^2} \sin(kL) + \frac{1}{k} \cos(kL) = 0$$

a po úpravě dostáváme podmínku pro existenci netriviálního řešení

$$\sin(kL) - kL \cos(kL) = 0,$$

což je transcendentní rovnice, jejíž řešení nalezneme iterační numerickou metodou. Nejmenším kladným řešením je

$$kL \doteq 4,4934 = 1,430 \pi,$$

z čehož vyjádříme velikost kritické síly z úpravy

$$k^2 = \frac{F}{EI} = \frac{1,430^2 \pi^2}{L^2},$$

tedy

$$F_{\text{cr}} = \frac{1,430^2 EI \pi^2}{L^2} \doteq \frac{EI \pi^2}{(0,7L)^2}. \quad (17)$$

1.2.3 Jednostranně vetknutý nosník

Pro vlevo vetknutý nosník bez podpory na druhém konci bychom obdobným způsobem ze vztahů (5) – (9) a okrajových podmínek

$$\begin{aligned} w(0) &= 0, & w''(L) &= 0, \\ w'(0) &= 0, & w'''(L) &= 0 \end{aligned}$$

získali hodnotu kritické síly

$$F_{\text{cr}} = \frac{EI \pi^2}{4 L^2}. \quad (18)$$

1.2.4 Oboustranně vetknutý nosník

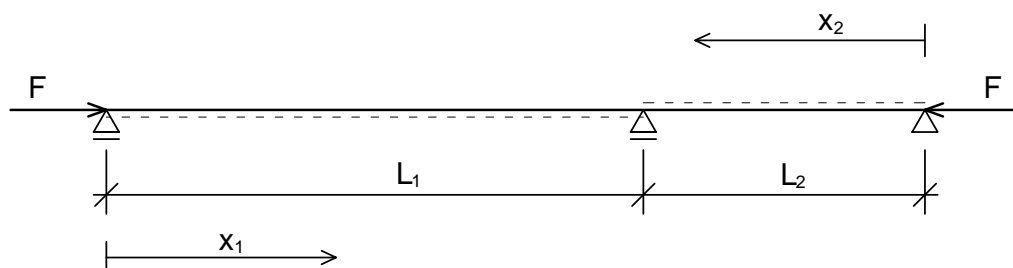
Pro nosník vetknutý na obou svých koncích (jedno vetknutí pevné a druhé posuvné), pro který budou platit okrajové podmínky

$$\begin{aligned}w(0) &= 0, & w(L) &= 0, \\w'(0) &= 0, & w'(L) &= 0,\end{aligned}$$

je hodnota kritické síly dána vztahem

$$F_{\text{cr}} = \frac{EI \pi^2}{(0,5 L)^2}. \quad (19)$$

1.3 Stabilita spojitého nosníku o dvou polích



Obrázek 2: Spojitý nosník o dvou polích

Uvažujme nyní spojitý nosník doplněný vnitřní posuvnou kloubovou podporou, tedy nosník o dvou polích.

Řešení bude obdobné, jen je nutné diferenciální rovnici průhybu vyjádřit zvlášť pro každé z obou polí a upravit okrajové podmínky v místě vnitřní podpory.

1.3.1 Levá část nosníku

Pro levou část nosníku délky L_1 zůstanou beze změny v platnosti rovnosti (5) – (9), v levé krajní podpoře budou platit i dvě okrajové podmínky prostého nosníku

$$\begin{aligned}w_1(0) &= 0, \\w_1''(0) &= 0,\end{aligned}$$

ze kterých plyne nulová hodnota konstant C_1 a C_4 . Rovnosti (6), (7) a (5) budou mít potom zjednodušený tvar

$$w_1(x_1) = -\frac{1}{k^2}C_2 \sin(kx_1) + C_3x,$$

$$w_1'(x_1) = -\frac{1}{k}C_2 \cos(kx_1) + C_3,$$

$$w_1''(x_1) = C_2 \sin(kx_1).$$

1.3.2 Pravá část nosníku

Pokud na pravé části nosníku délky L_2 budeme uvažovat spodní vlákna na opačné straně než na levé části nosníku a proměnnou x_2 od krajní podpory směrem k vnitřní podpoře, bude se v podstatě jednat o stejný problém.¹

Ve vztazích (5) – (9) se místo konstant $C_1 - C_4$ objeví jiné konstanty $C_5 - C_8$, v krajní podpoře budou opět platit stejné okrajové podmínky, ze kterých plyne nulová hodnota tentokrát pro konstanty C_5 a C_8 . Rovnosti (6), (7) a (5) budou mít pro pravou část nosníku podobu

$$w_2(x_2) = -\frac{1}{k^2}C_6 \sin(kx_2) + C_7x,$$

$$w_2'(x_2) = -\frac{1}{k}C_6 \cos(kx_2) + C_7,$$

$$w_2''(x_2) = C_6 \sin(kx_2).$$

¹Pravou část nosníku popisujeme v souřadné soustavě, která vznikne otočením souřadné soustavy použité pro levou část o π a umístěním jejího počátku do pravého konce nosníku, viz znázornění na Obrázku 2.

1.3.3 Vnitřní kloubová podpora

V místě vnitřní kloubové podpory určíme další čtyři okrajové podmínky. Dvě jsou dány nulovým průhybem

$$w_1(L_1) = w_2(L_2) = 0,$$

další podmínka vyjadřuje spojitost nosníku, tedy rovnost hodnot pootočení v místě vnitřní podpory pro obě části nosníku

$$w_1'(L_1) = w_2'(L_2),$$

poslední z celkem osmi okrajových podmínek plyne z rovnosti absolutní hodnoty momentů v místě vnitřní podpory. Vzhledem k tomu, že jsme pro pravou a levou část nosníku volili opačné umístění spodních vláken a právě volba spodních vláken určuje znaménko momentu, bude se tento moment pro jednotlivé části v místě vnitřního podepřeného kloubu lišit právě o znaménko. (Viz poznámku ¹ na předchozí straně.)

Poznamenejme, že při vykreslení průběhu momentů na celé délce nosníku bude, právě díky rozdílnému znaménku, zaručena jeho spojitost v místě vnitřní podpory. Popsanou podmínku zapíšeme

$$w_1''(L_1) = -w_2''(L_2).$$

Využitím všech okrajových podmínek v obecných řešeních dostaneme soustavu rovnic s maticovým zápisem

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{k^2} \sin(kL_1) & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{k^2} \sin(kL_2) & L_2 \\ -\frac{\cos(kL_1)}{k} - \frac{\sin(kL_1)}{k^2 L_1} & 0 & -\frac{\cos(kL_2)}{k} + \frac{\sin(kL_2)}{k^2 L_2} & 0 \\ \sin(kL_1) & 0 & \sin(kL_2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_3 \\ C_6 \\ C_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vyjádříme determinant matice M soustavy a následně ho položíme roven

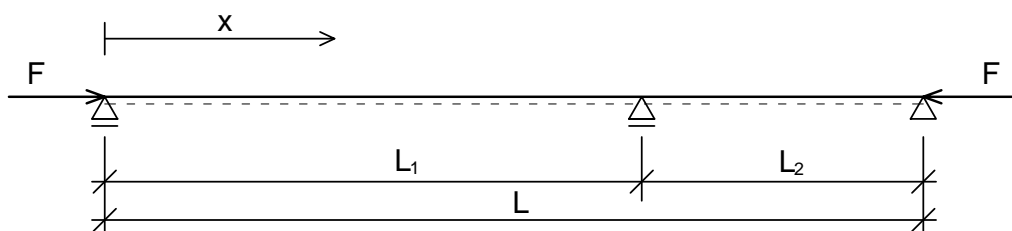
nule. Po úpravě dostáváme vztah

$$kL_1L_2 \sin(k(L_1+L_2)) - (L_1+L_2) \sin(kL_1) \sin(kL_2) = 0, \quad (20)$$

jenž určuje, pro jaká kladná k existuje netriviální řešení okrajové úlohy s vnitřní kloubovou podporou.

1.3.4 Stabilitní úloha nosníku o dvou polích v operátorovém tvaru

Nyní budeme řešit diferenciální rovnici nosníku v jediné souřadné soustavě na celém intervalu $[0, L]$, s počátkem jediné proměnné x v levé krajní podpoře (Obrázek 3). Nepoužíváme již otočení souřadné soustavy pro pravou část nosníku jako u předchozího způsobu řešení nosníku o dvou polích. Při tomto pojetí je spojitost funkce w'' v bodě vnitřní podpory dána rovností $\lim_{x \rightarrow L_1^-} w''(x) = \lim_{x \rightarrow L_1^+} w''(x)$.



Obrázek 3: Nová volba souřadného systému

Zkusme úlohu tlačného nosníku o dvou polích zapsat v operátorovém tvaru a ukázat řešení pomocí vhodně zvoleného diferenciálního operátoru.

Vyjďeme opět ze substituované rovnice (3) ve tvaru

$$p''(x) + \lambda p(x) = 0,$$

s tím, že vlastní čísla λ předpokládáme ve tvaru $\lambda = k^2$.

Zvolený operátor a operátorová rovnice bude mít, stejně jako v případě nosníku o jednom poli, podobu

$$\mathbf{A} = -D^2, \quad \mathbf{A}p = \lambda p.$$

Zásadně se ale změni definiční obor operátoru D_A , jenž nyní definujeme jako podprostor funkcí, které získáme dvojitým derivováním funkcí z lineárního prostoru

$$M = \left\{ w \in C^2([0, L]) : w|_{[0, L_1]} \in C^4([0, L_1]) \wedge w|_{[L_1, L]} \in C^4([L_1, L]) \right. \\ \left. \wedge w(0) = w(L_1) = w(L) = 0 \wedge w''(0) = w''(L) = 0 \right\}.$$

Podprostor přípustných funkcí (definiční obor) operátoru \mathbf{A} tedy zapíšeme

$$D_A = \left\{ p \in C([0, L]) : \exists w \in M, p(x) = w''(x) \forall x \in [0, L] \right\}.$$

Pokud chceme najít netriviální, tedy nenulové řešení průhybu centricky tlačенého nosníku o dvou polích, jedná se o problém hledání vlastních čísel operátoru $\mathbf{A} = -D^2$ na výše popsaném podprostoru funkcí D_A , který přísluší okrajové úloze

$$p''(x) + \lambda p(x) = 0, \\ p(0) = p(L) = 0.$$

V operátorovém tvaru jde o úlohu nalezení takové funkce $p \in D_A$ a takové hodnoty λ , aby platilo

$$\mathbf{A}p = \lambda p, \quad p \in D_A. \quad (21)$$

Je nutné ověřit, zda je zvolený operátor \mathbf{A} symetrický, což ukazuje následující důkaz. Pro úpravu integrálu využijeme metodu per partes a následně dosazení okrajových podmínek

$$(\mathbf{A}p, q) = (-p'', q) = \int_0^{L_1} -p''q \, dx + \int_{L_1}^L -p''q \, dx = [-p'q]_0^{L_1} + \int_0^{L_1} p'q' \, dx \\ -[p'q]_{L_1}^L + \int_{L_1}^L p'q' \, dx = -p'(L_1) \cdot q(L_1) + \int_0^{L_1} p'q' \, dx + p'(L_1) \cdot q(L_1) + \int_{L_1}^L p'q' \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{L_1} p'q' \, dx + \int_{L_1}^L p'q' \, dx, \\
(\mathbf{A}q, p) &= (-q'', p) = \int_0^{L_1} -p \, q'' \, dx + \int_{L_1}^L -p \, q'' \, dx = [-pq']_0^{L_1} + \int_0^{L_1} p'q' \, dx \\
&- [pq']_{L_1}^L + \int_{L_1}^L p'q' \, dx = -p(L_1) \cdot q'(L_1) + \int_0^{L_1} p'q' \, dx + p(L_1) \cdot q'(L_1) + \int_{L_1}^L p'q' \, dx \\
&= \int_0^{L_1} p'q' \, dx + \int_{L_1}^L p'q' \, dx.
\end{aligned}$$

Dokažme ještě obdobným způsobem pozitivitu zvoleného operátoru \mathbf{A} , tedy že pro každou netriviální funkci $p \in D_A$ platí $(\mathbf{A}p, p) > 0$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}p, p) &= (-p'', p) = \int_0^{L_1} -p''p \, dx + \int_{L_1}^L -p''p \, dx = [-p'p]_0^{L_1} + \int_0^{L_1} p'p' \, dx \\
&- [p'p]_{L_1}^L + \int_{L_1}^L p'p' \, dx = -p(L_1) \cdot p'(L_1) + \int_0^{L_1} (p')^2 \, dx + p(L_1) \cdot p'(L_1) + \int_{L_1}^L (p')^2 \, dx \\
&= \int_0^{L_1} (p')^2 \, dx + \int_{L_1}^L (p')^2 \, dx > 0.
\end{aligned}$$

Ostrá nerovnost plyne z toho, že nulové hodnoty integrál nabývá pouze pro případ $p \equiv 0$. Pozitivnost operátoru je ale definována pouze pro netriviální funkce a pro ty integrál nulové hodnoty nenabývá. Pozitivnost operátoru je tímto dokázána.

Tím jsou splněny potřebné předpoklady pro platnost věty o vlastních číslech operátoru, všechna vlastní čísla musí být kladná a nula není vlastním číslem daného problému.

Přímočaré řešení úlohy (21) spočívá v nalezení obecných řešení pro obě části nosníku, která se však budou lišit pouze ve svých integračních konstantách. Těchto konstant bude celkem osm, po čtyřech pro každé pole nosníku. Dále je nutné najít netriviální řešení splňující jednak okrajové podmínky platné v krajních kloubových podporách, tedy v bodech 0 a L , tak i podmínky spojitosti platné v místě vnitřní podpory, tedy v bodě L_1 . Po relativně složitých úpravách nakonec dostaneme podmínku (20), jejíž získání snazším způsobem, díky otočení souřadného systému pro pravou část nosníku, jsme již dříve ukázali.

1.3.5 Řešení pro konkrétně zvolené délky obou částí nosníku

Hodnoty k , potažmo vlastní čísla λ , úlohy (21) určíme numerickou iterační metodou v programu Matlab.

Vytvoříme funkci, která určuje hodnotu levé strany podmínky (20) v závislosti na hodnotě proměnné k a následně najdeme několik prvních hodnot k , pro které je hodnota této funkce nulová. Na Obrázku 4 je grafické znázornění hodnoty této funkce v závislosti na k pro jednu konkrétní polohu vnitřní kloubové podpory ($L_1 = 0,99 L$). Hodnoty k , které splňují podmínku (20) jsou v místech průsečíků grafu s osou označenou k .

Takto můžeme pro konkrétní poměr délek jednotlivých polí nosníku získat hodnoty k , které splňují rovnost (20) a následně vždy pro nejmenší (první) hodnotu k vyjádřit velikost kritické síly, při které poprvé dojde k vybočení tlačeného nosníku o dvou polích. Pro účely numerických výpočtů zvolíme jednotkovou délku celého nosníku a délky jednotlivých částí vyjádříme

$$\begin{aligned}L_1 &= \alpha L, \\L_2 &= (1 - \alpha)L, \quad \alpha \in [0, 1].\end{aligned}$$

Ukažme několik konkrétních případů.

Limitní přiblížení podpor na okraji nosníku

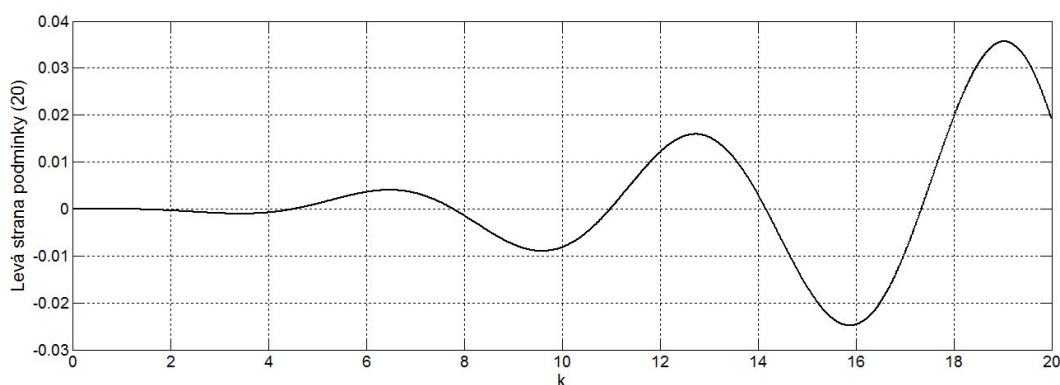
Zajímavým případem je aproximace limitního přiblížení dvou kloubových podpor. Pokud vnitřní podporu umístíme velmi blízko k jedné z krajních podpor, například k pravé, pro výpočet zvolme hodnotu $\alpha = 0,99$, potom první tři hodnoty k , pro něž existuje netriviální řešení okrajové úlohy (21), budou

$$\begin{aligned}k_1 &= 4,5236, \\k_2 &= 7,7772, \\k_3 &= 10,9774,\end{aligned}$$

jak ukazuje Obrázek 4.

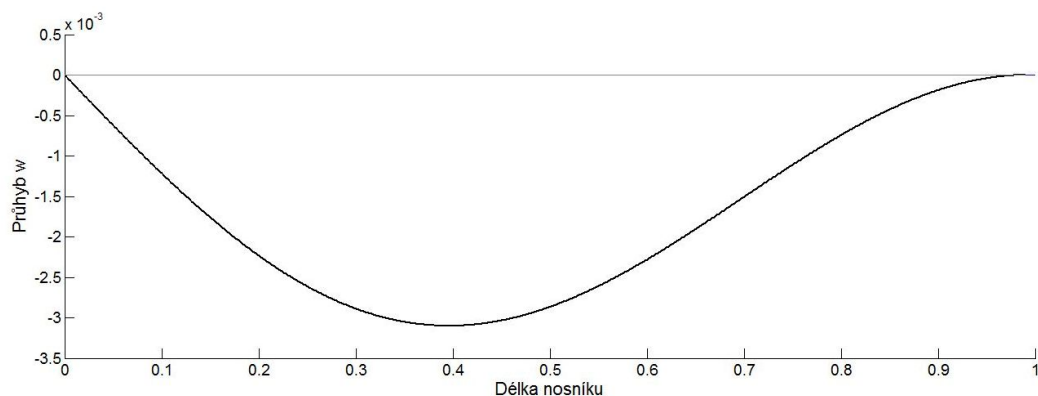
Vyjádřením hodnoty kritické síly pro k_1 ze vztahu (1)

$$F_{\text{cr}} = \frac{EI 4,5236^2 \pi^2}{L^2} = \frac{EI 1,4399^2 \pi^2}{L^2} = \frac{EI \pi^2}{(0,7 L)^2},$$



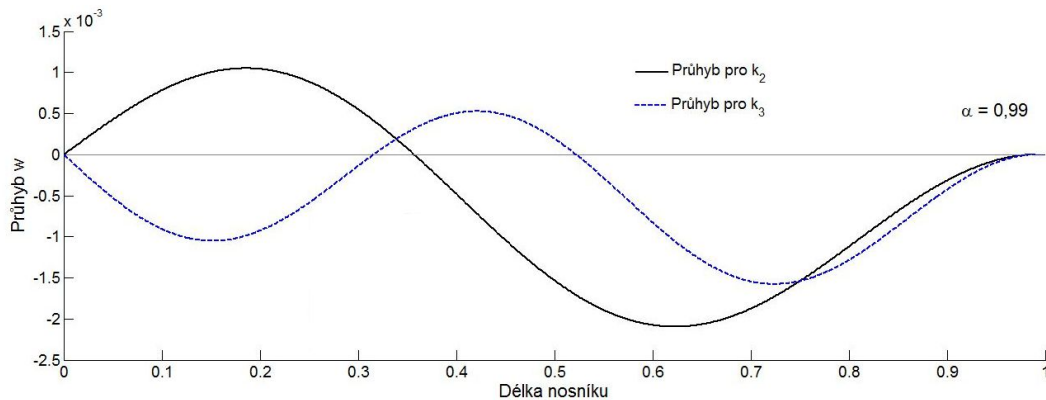
Obrázek 4: Graf hodnoty levé strany rovnosti (20) v závislosti na hodnotě k

jsme dostali přibližně stejnou hodnotu kritického břemene jako v případě nosníku o jednom poli, který má vlevo posuvný kloub a vpravo je vetknut. Toto zjištění zcela odpovídá představě chování nosníku se dvěma velmi blízkými kloubovými podporami, a potvrzuje to i vykreslení tvaru průhybu (Obrázek 5) pro první netriviální řešení. Jelikož podstatný je zejména tvar řešení, je pro vykreslení zvolena hodnota $EI = 1$.



Obrázek 5: Tvar vybočení pro $\alpha = 0,99$ při dosažení kritické síly

Z matematického hlediska ale není zajímavý pouze případ dosažení kritické síly, která vychází z prvního, tedy nejnižšího vlastního čísla. Netriviální řešení průhybové rovnice získáme i pro další hodnoty k , které splňují podmínku (20). Ukažme proto ještě tvar vybočení nosníku při nadkritickém zatížení, konkrétně pro případ druhého a třetího vlastního čísla (Obrázek 6). I zde je z vykreslení průhybů zřejmé, že se nosník v místě velmi blízkých podpor chová téměř stejně, jako by byl na tomto svém konci vetknutý.



Obrázek 6: Tvar druhého a třetího netriviálního řešení

Umístění vnitřní podpory do středu nosníku

Dalším zajímavým případem je umístění vnitřní podpory přesně doprostřed nosníku. V takovém případě, tedy pro $\alpha = 0,5$, dostaneme následující hodnoty k splňující podmínku (20):

$$\begin{aligned} k_1 &= 6,2832, \\ k_2 &= 8,9868, \\ k_3 &= 12,5664, \dots \end{aligned}$$

Při umístění vnitřní podpory do středu nosníku dojde k tomu, že podpora leží v místě uzlového bodu druhé² vlastní funkce pro průhyb prostého nosníku o jednom poli délky L .

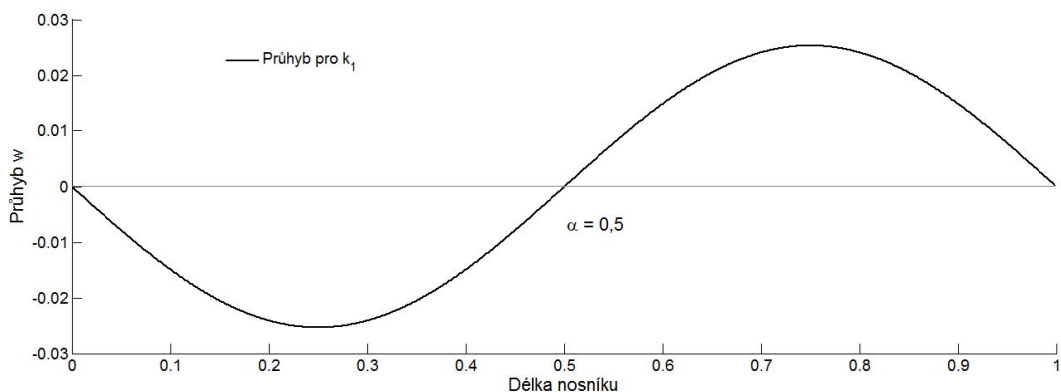
To znamená, že hodnota kritické síly odpovídá síle, kterou bychom dostali z výpočtu pro druhé vlastní číslo v úloze vzpěru prostého nosníku o jednom poli délky L a tvar vybočení bude proto totožný s tvarem druhého netriviálního řešení průhybu prostého tlačенého nosníku délky L . Tento případ zobrazuje Obrázek 8.

Pro hodnotu $k_1 = 6,2832$ spočítáme odpovídající hodnotu kritické síly ze vztahu (1)

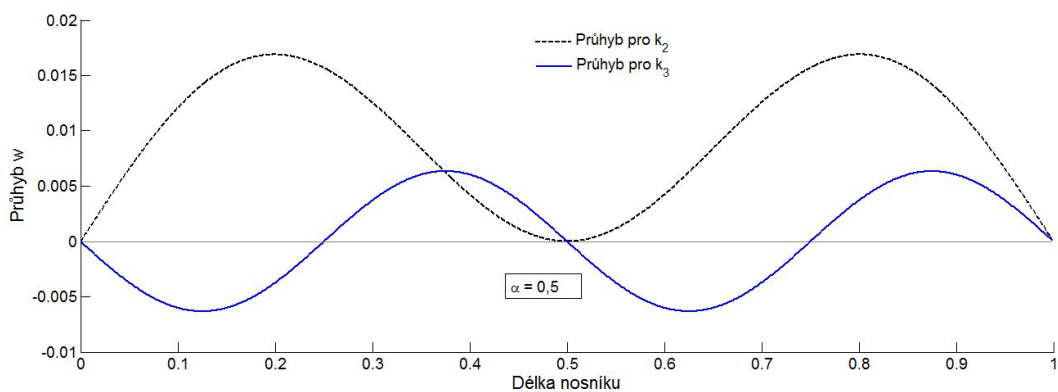
$$F_{\text{cr}} = \frac{EI 6,2832^2}{L^2} = \frac{EI \pi^2}{(0,5 L)^2}.$$

²Jde o uzlový bod i všech dalších sudých vlastní funkcí prostého nosníku délky L .

Ze zjištěných hodnot lze konstatovat, že řešený nosník o dvou polích s vnitřní podporou umístěnou v polovině délky nosníku odpovídá z hlediska ztráty stability prostě podepřenému nosníku o jednom poli délky $L_1 = L_2 = 0,5 L$.



Obrázek 7: První tvar vybočení nosníku s vnitřní středovou podporou



Obrázek 8: Tvar vybočení pro druhé a třetí netriviální řešení průhybu

Tvar průhybu nosníku s vnitřní středovou podporou pro druhé a třetí vlastní číslo úlohy (21) je znázorněn na Obrázku 8.

Do uzlového bodu se samozřejmě trefíme i při dalších polohách vnitřní podpory, například při volbě $\alpha = \frac{1}{3}$ či $\alpha = \frac{2}{3}$ se bude jednat o uzlový bod

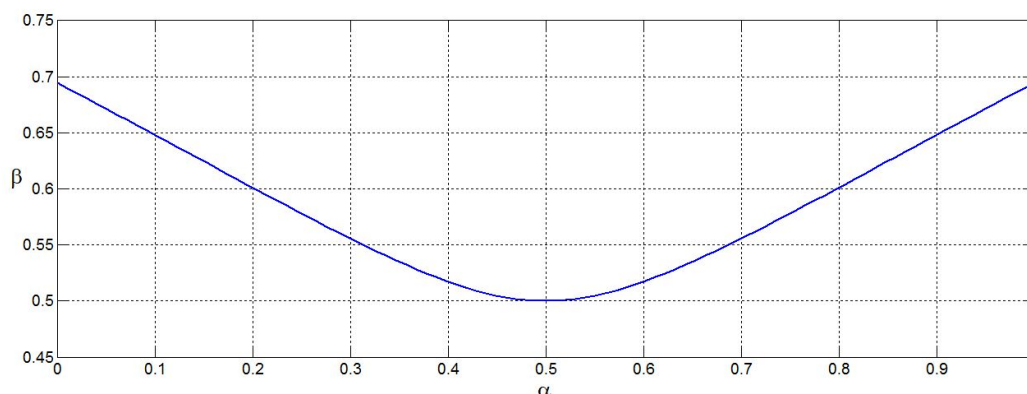
třetí vlastní funkce úlohy prostého tlačného nosníku, při hodnotě $\alpha = 0,25$ či $\alpha = 0,75$ se bude jednat o uzlový bod čtvrté vlastní funkce téže úlohy, atd.

1.3.6 Vliv polohy vnitřní podpory na zvýšení vzpěrné únosnosti

Zajímavé je zamyslet se nad tím, jak umístění vnitřní kloubové podpory změní stabilitu tlačného nosníku. Porovnejme, jak se v závislosti na zvolené hodnotě koeficientu α změní hodnota součinitele vzpěrné délky β , který figuruje ve vzorci

$$F_{\text{cr}} = \frac{EI\pi^2}{L_{\text{cr}}^2} = \frac{EI\pi^2}{(\beta L)^2},$$

kde $L_{\text{cr}} = \beta L$ je tzv. vzpěrná délka, což je délka náhradního, kloubově uloženého nosníku (shodného průřezu) o jednom poli, který má stejnou hodnotu kritické síly jako posuzovaný nosník. Hodnotu součinitele vzpěrné délky β v závislosti na volbě koeficientu α zobrazuje graf na Obrázku 9.

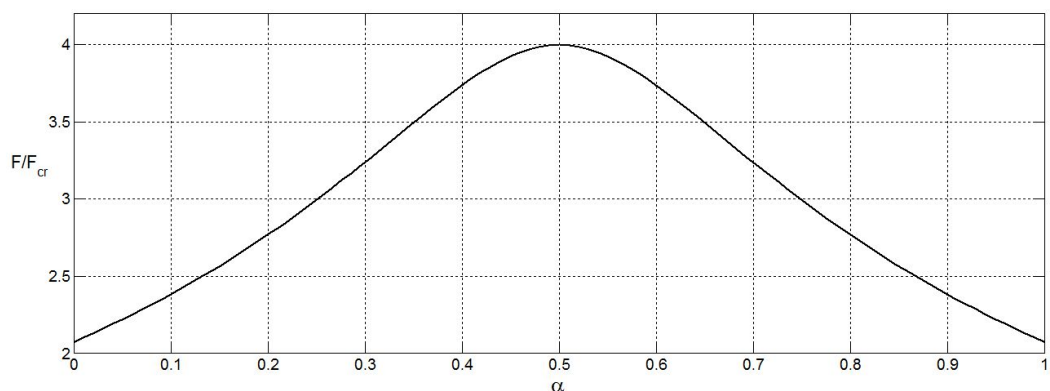


Obrázek 9: Závislost koeficientu β na hodnotě α

Ještě názornější je vliv polohy vnitřní podpory na zvýšení vzpěrné únosnosti nosníku v grafickém znázornění na Obrázku 10, který ukazuje hodnotu poměru kritických sil nosníku o jednom poli délky L a nosníku s přidanou vnitřní podporou v závislosti na umístění této vnitřní kloubové podpory, tedy na volbě koeficientu α . (Hodnotu kritické síly nosníku bez vnitřní podpory označme jednoduše F .)

Pro příslušný prostý nosník musí samozřejmě platit předpoklad stejné hodnoty E a I . Potom z porovnání obou vztahů pro kritickou sílu je zřejmé, že jejich podíl odpovídá převrácené hodnotě druhé mocniny součinitele β

$$\frac{F}{F_{\text{cr}}} = \frac{L^2}{(\beta L)^2} = \frac{1}{\beta^2}.$$



Obrázek 10: Graf závislosti hodnoty $\frac{1}{\beta^2}$ na hodnotě α

Graf hodnoty poměru těchto kritických sil na Obrázku 10 je opět vykreslen v závislosti na proměnné α .

Grafická znázornění vlivu polohy přidané podpory jasně ukazují, že z hlediska vzpěrné únosnosti tlačného nosníku o dvou polích je nejvýhodnější umístění vnitřní kloubové podpory co nejbližší středu nosníku.

Literatura

- [1] K. Rektorys: MATEMATIKA 43, Obyčejné a parciální diferenciální rovnice s okrajovými podmínkami, Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997.
- [2] O. Zindulka: MATEMATIKA 3, Česká technika – nakladatelství ČVUT, Praha, 2007.