

## *Deformační metoda pro řešení stability rovinných ráků*

Lenka Dohnalová

ČVUT, fakulta stavební  
katedra stavební mechaniky

Odborné vedení: doc. Ing. Jan Zeman, Ph.D.

## Zadání

- Cílem této práce bylo využití zjednodušené deformační metody (ZDM) pro řešení stability rovinných ráků.
- Nejprve bylo třeba sestavit matici tuhosti centricky tlačeného oboustranně vetknutého prutu (VV).
- Dílčí příspěvky do matice tuhosti byly získány analytickým řešením jednotlivých zatěžovacích stavů – poklesů a natočení konců nosníku.

## Zadání

- Ověření získaných vztahů pro pootočení  $\varphi_a$  a  $\varphi_b$  bylo provedeno řešením spojitého nosníku o dvou polích. (Toto kontrolní ověření v prezentaci neuvádím.)
- Získaná matice tuhosti  $K_{stab}$  ZDM pro centricky tlačný prut pak byla použita pro řešení dvou typů rovinných ráků.
- Výsledky byly ověřeny porovnáním s výpočtem dle Statických tabulek.

## Diferenciální rovnice tlačného prutu

Základní diferenciální rovnice ohybové čáry pro centricky tlačný homogenní ( $EI = konst.$ ) prut má po zavedení substituce

$$k = \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

tvár

$$w^{(4)}(x) + k^2 w''(x) = 0.$$

## Základní vztahy pro centricky tlačeny prut

Z obecného řešení dostaneme po úpravě základní vztahy pro průhyb a jeho 1. až 4. derivaci.

$$w(x) = -\frac{1}{k^2} C_1 \cos(kx) - \frac{1}{k^2} C_2 \sin(kx) + C_3 x + C_4,$$

$$w'(x) = \frac{1}{k} C_1 \sin(kx) - \frac{1}{k} C_2 \cos(kx) + C_3,$$

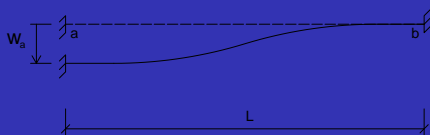
$$w''(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx),$$

$$w'''(x) = -kC_1 \sin(kx) + kC_2 \cos(kx),$$

$$w^{(4)}(x) = -k^2 C_1 \cos(kx) - k^2 C_2 \sin(kx).$$

## Princip řešení

- Pro každý ze čtyř zatěžovacích stavů (pokles a pootočení konců nosníku) vytvořím využitím okrajových podmínek soustavu rovnic pro neznámé konstanty  $C_1 - C_4$ .
- Řešení každé soustavy získám analyticky pomocí Maple.
- Následně do základních rovnic pro druhou, resp. třetí derivaci průhybu dosadím získané výrazy pro konstanty  $C_1 - C_4$ .
- Vyjádřím rovnice pro momenty, resp. posouvající síly na obou koncích nosníku od daného posunu či natočení.
- Spojením řešení ze všech zatěžovacích stavů získám matici tuhosti zjednodušené deformační metody pro tlačný prut.



## Pokles levé podpory

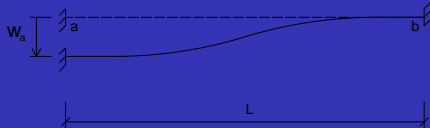
Využití okrajových podmínek:

$$w(0) = w_a \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{k^2} C_1 + C_4 = w_a$$

$$w'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{k} C_2 + C_3 = 0$$

$$w(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\cos(kL)}{k^2} C_1 - \frac{\sin(kL)}{k^2} C_2 + LC_3 + C_4 = 0$$

$$w'(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(kL)}{k} C_1 - \frac{\cos(kL)}{k} C_2 + C_3 = 0$$

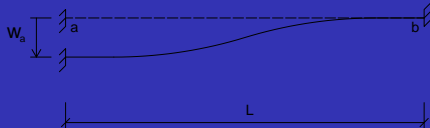


## Pokles levé podpory

Maticový zápis soustavy rovnic pro neznámé konstanty  $C_1 - C_4$ :

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{k} & 1 & 0 \\ -\frac{\cos(kL)}{k^2} & -\frac{\sin(kL)}{k^2} & L & 1 \\ \frac{\sin(kL)}{k} & -\frac{\cos(kL)}{k} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$





## Pokles levé podpory

Řešení získané pomocí programu Maple:

$$C_1 = \frac{1}{A} k^2 (1 - \bar{c}) w_a,$$

$$C_2 = -\frac{1}{A} k^2 \bar{s} w_a,$$

$$C_3 = -\frac{1}{A} k \bar{s} w_a,$$

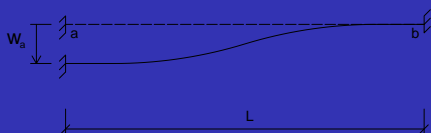
$$C_4 = \frac{1}{A} (kL \bar{s} + \bar{c} - 1) w_a,$$

kde

$$A = kL \bar{s} + 2\bar{c} - 2.$$

---

$$\bar{s} = \sin(kL), \bar{c} = \cos(kL)$$



## Získání rovnic pro $Z_{ab}^{w_a}$ a $Z_{ba}^{w_a}$

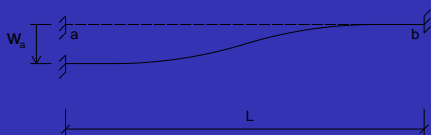
$$w'''(x) = -k C_1 \sin(kx) + k C_2 \cos(kx) = \frac{1}{A} k^3 (\bar{c} s - s - \bar{s} c) w_a$$

$$Z_{ab}^{w_a} = -V(0) = EI w'''(0) = -\frac{EI}{A} k^3 \bar{s} w_a \Rightarrow K_{stab}(1, 1)$$

$$Z_{ba}^{w_a} = V(L) = -EI w'''(L) = \frac{EI}{A} k^3 \bar{s} w_a \Rightarrow K_{stab}(3, 1)$$

---

$$s = \sin(kx), c = \cos(kx)$$



## Získání rovnic pro $M_{ab}^{w_a}$ a $M_{ba}^{w_a}$

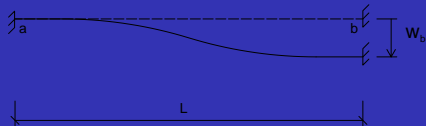
$$w''(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) = \frac{1}{A} k^2 (c - \bar{c} c - \bar{s} s)$$

$$M_{ab}^{w_a} = -M(0) = EI w''(0) = -\frac{EI}{A} k^2 (1 - \bar{c}) w_a \Rightarrow K_{\text{stab}}(2, 1)$$

$$M_{ba}^{w_a} = M(L) = -EI w''(L) = \frac{EI}{A} k^2 (1 - \bar{c}) w_a \Rightarrow K_{\text{stab}}(4, 1)$$

---

$$s = \sin(kx), c = \cos(kx)$$



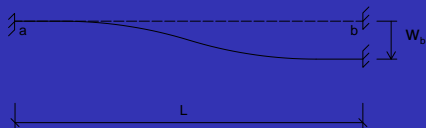
## Pokles pravé podpory <sup>1</sup>

Okrajové podmínky:  $w(0) = w'(0) = w'(L) = 0$ ,  
 $w(L) = w_b$ .

Soustava pro neznámé  $C_1 - C_4$ :

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{k} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{k^2}\bar{c} & -\frac{1}{k^2}\bar{s} & L & 1 \\ \frac{1}{k}\bar{s} & -\frac{1}{k}\bar{c} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_b \\ 0 \end{bmatrix}$$

<sup>1</sup>Oba poklesy lze řešit současně v jednom kroku, jako pokles ( $w_a - w_b$ ).



## Pokles pravé podpory

Řešení získané pomocí programu Maple:

$$C_1 = \frac{1}{A} k^2 (\bar{c} - 1) w_b,$$

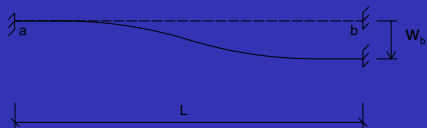
$$C_2 = \frac{1}{A} k^2 \bar{s} w_b,$$

$$C_3 = \frac{1}{A} k \bar{s} w_b,$$

$$C_4 = \frac{1}{A} (\bar{c} - 1) w_b,$$

kde

$$A = kL\bar{s} + 2\bar{c} - 2.$$



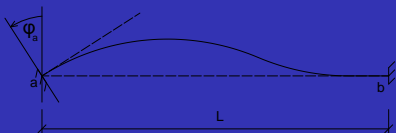
## Příspěvky $Z^{w_b}$ a $M^{w_b}$

$$Z_{ab}^{w_b} = -V(0) = EI w'''(0) = \frac{EI}{A} k^3 \bar{s} w_b \quad \Rightarrow \quad K_{\text{stab}}(1, 3)$$

$$Z_{ba}^{w_b} = V(L) = -EI w'''(L) = -\frac{EI}{A} k^3 \bar{s} w_b \quad \Rightarrow \quad K_{\text{stab}}(3, 3)$$

$$M_{ab}^{w_b} = -M(0) = EI w''(0) = -\frac{EI}{A} k^2 (\bar{c}-1) w_b \quad \Rightarrow \quad K_{\text{stab}}(2, 3)$$

$$M_{ba}^{w_b} = M(L) = -EI w''(L) = \frac{EI}{A} k^2 (\bar{c}-1) w_b \quad \Rightarrow \quad K_{\text{stab}}(4, 3)$$

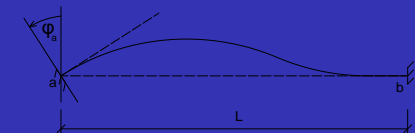


## Pootočení levé podpory

Okrajové podmínky:  $w(0) = w(L) = w'(L) = 0$ ,  
 $w'(0) = -\varphi_a$ .

Soustava pro neznámé  $C_1 - C_4$ :

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{k} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{k^2}\bar{c} & -\frac{1}{k^2}\bar{s} & L & 1 \\ \frac{1}{k}\bar{s} & -\frac{1}{k}\bar{c} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



## Pootočení levé podpory

Řešení získané pomocí programu Maple.

$$C_1 = \frac{1}{A} k(kL \bar{c} - \bar{s}) \varphi_a,$$

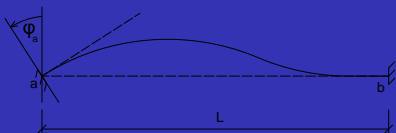
$$C_2 = \frac{1}{A} k(kL \bar{s} + \bar{c} - k) \varphi_a,$$

$$C_3 = \frac{1}{A} (1 - \bar{c}) \varphi_a,$$

$$C_4 = \frac{1}{Ak} (kL \bar{c} - \bar{s}) \varphi_a.$$

$$(A = kL\bar{s} + 2\bar{c} - 2)$$





## $Z_{ab}^{\varphi_a}$ a $Z_{ba}^{\varphi_a}$ - se zahrnutím vlivu 2. řádu

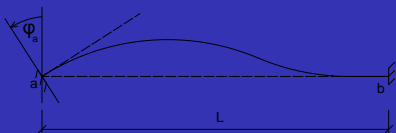
$$w'''(x) = -k C_1 s + k C_2 c = \frac{1}{A} k^2 (\bar{s}s - kL\bar{c}s + kL\bar{s}c + \bar{c}c - c) \varphi_a$$

$$Z_{ab}^{\varphi_a} = -V(0) - F\varphi_a = EI w'''(0) + F w'(0) =$$

$$= \frac{EI}{A} (k^3 L \bar{s} + k^2 \bar{c} - k^2) \varphi_a - k^2 EI \varphi_a =$$

$$= \frac{EI}{A} (k^3 L \bar{s} + k^2 \bar{c} - k^2 - k^2 A) \varphi_a = \frac{EI}{A} k^2 (1 - \bar{c}) \varphi_a \Rightarrow \boxed{K_{stab}(1, 2)}$$

$$Z_{ba}^{\varphi_a} = V(L) = -EI w'''(L) = \frac{EI}{A} k^2 (1 - \bar{c}) \varphi_a \Rightarrow \boxed{K_{stab}(3, 2)}$$



## Momenty $M_{ab}^{\varphi_a}$ a $M_{ba}^{\varphi_a}$

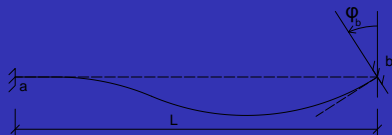
$$w''(x) = \frac{1}{A} \left( k^2 L \bar{c} c - k \bar{s} c + k^2 L \bar{s} s + k \bar{c} s - k \bar{s} \right) \varphi_a$$

$$M_{ab}^{\varphi_a} = -M(0) = EI w''(0) = -\frac{EI}{A} (k^2 L \bar{c} - k \bar{s}) \varphi_a \Rightarrow$$

$K_{\text{stab}}(2, 2)$

$$M_{ba}^{\varphi_a} = M(L) = -EI w''(L) = \frac{EI}{A} (k \bar{s} - k^2 L) \varphi_a \Rightarrow$$

$K_{\text{stab}}(4, 2)$

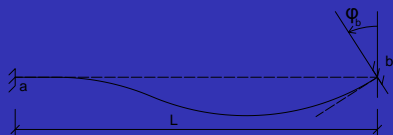


## Pootočení pravé podpory

Okrajové podmínky:  $w(0) = w'(0) = w(L) = 0$ ,  
 $w'(L) = -\varphi_b$ .

Soustava pro neznámé  $C_1 - C_4$ :

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{k^2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{k} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{k^2}\bar{c} & -\frac{1}{k^2}\bar{s} & L & 1 \\ -\frac{1}{k}\bar{s} & \frac{1}{k}\bar{c} & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \varphi_b \end{bmatrix}$$



## Pootočení pravé podpory

Řešení získané pomocí programu Maple:

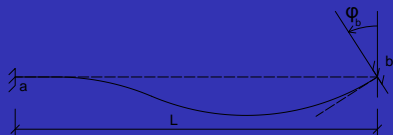
$$C_1 = \frac{1}{A}(k\bar{s} - k^2L) \varphi_b,$$

$$C_2 = \frac{1}{A}k(1 - \bar{c}) \varphi_b,$$

$$C_3 = \frac{1}{A}(1 - \bar{c}) \varphi_b,$$

$$C_4 = \frac{1}{Ak}(\bar{s} - kL) \varphi_b.$$

$$(A = kL\bar{s} + 2\bar{c} - 2)$$



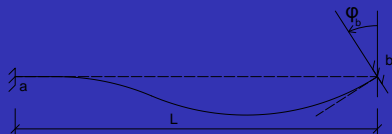
$Z_{ab}^{\varphi_b}$  a  $Z_{ba}^{\varphi_b}$  - se zahrnutím vlivu 2. řádu

$$w'''(x) = -k C_1 s + k C_2 c = \frac{1}{A} k^2 (kLs - \bar{s}s + c - \bar{c}c) \varphi_b$$

$$Z_{ab}^{\varphi_b} = -V(0) = EI w'''(0) = \frac{EI}{A} k^2 (1 - \bar{c}) \varphi_b \quad \Rightarrow \quad K_{stab} (1, 4)$$

$$Z_{ba}^{\varphi_b} = V(L) + F \varphi_b = -EI w'''(L) - F w'(L) =$$

$$= \frac{EI}{A} (k^2 - k^3 L \bar{s} - k^2 \bar{c} + k^2 A) \varphi_b = \frac{EI}{A} k^2 (1 - \bar{c}) \varphi_b \quad \Rightarrow \quad K_{stab} (3, 4)$$



## Příspěvky $M_{ab}^{\varphi_b}$ a $M_{ba}^{\varphi_b}$

$$w''(x) = \frac{1}{A} (k\bar{s}c - k^2Lc + ks - k\bar{c}s) \varphi_b$$

$$M_{ab}^{\varphi_b} = -M(0) = EI w''(0) = \frac{EI}{A} (k\bar{s} - k^2L) \varphi_b \Rightarrow K_{\text{stab}}(2, 4)$$

$$M_{ba}^{\varphi_b} = M(L) = -EI w''(L) = \frac{EI}{A} (k^2L\bar{c} - k\bar{s}) \varphi_b \Rightarrow K_{\text{stab}}(4, 4)$$

# Výsledná stabilitní matice tuhosti tlačného prutu

$$K_{\text{stab}} = \frac{EI}{A} \begin{bmatrix} -k^3\bar{s} & k^2(1 - \bar{c}) & k^3\bar{s} & k^2(1 - \bar{c}) \\ k^2(1 - \bar{c}) & k^2L\bar{c} - k\bar{s} & k^2(\bar{c} - 1) & k\bar{s} - k^2L \\ k^3\bar{s} & k^2(\bar{c} - 1) & -k^3\bar{s} & k^2(\bar{c} - 1) \\ k^2(1 - \bar{c}) & k\bar{s} - k^2L & k^2(\bar{c} - 1) & k^2L\bar{c} - k\bar{s} \end{bmatrix}$$

$$(A = kL\bar{s} + 2\bar{c} - 2)$$

## Postup řešení stability ráků pomocí ZDM

- Výslednou matici konstrukce vytvořím spojením matic tuhosti jednotlivých prutů.
- Pro tlačené pruty rovinného ráku použiji získanou matici tuhosti  $K_{stab}^{VV}$ , pro ostatní pruty pak matici tuhosti  $K^{VV}$

$$\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -12 & 6L & -12 & 12 & 6L \\ -12 & 12 & -6L & 12 & -12 & -6L \\ 6L & -6L & 4L^2 & -6L & 6L & 2L^2 \\ -12 & 12 & -6L & 12 & -12 & -6L \\ 12 & -12 & 6L & -12 & 12 & 6L \\ 6L & -6L & 2L^2 & -6L & 6L & 4L^2 \end{bmatrix},$$

používanou pro řešení klasických úloh stavební mechaniky pomocí ZDM.



## Postup řešení stability rámců pomocí ZDM

- Používám pouze matice tuhosti pro pruty VV, podpory řeším odstraněním příslušných řádků a sloupců ve výsledné matici.
- Polohu daného prutu zohledním standardní transformační maticí

$$\begin{bmatrix} s^2 & sc & s & s^2 & sc & s \\ sc & c^2 & c & sc & c^2 & c \\ s & c & 1 & s & c & 1 \\ s^2 & sc & s & s^2 & sc & s \\ sc & c^2 & c & sc & c^2 & c \\ s & c & 1 & s & c & 1 \end{bmatrix}.$$

- Pomocí funkce vytvořené v Matlabu najdu nejmenší kladnou hodnotu  $k$ , pro kterou je determinant výsledné matice nulový.

## Postup řešení stability ráků pomocí ZDM

- Hodnotu kritické síly dopočítám ze vztahu

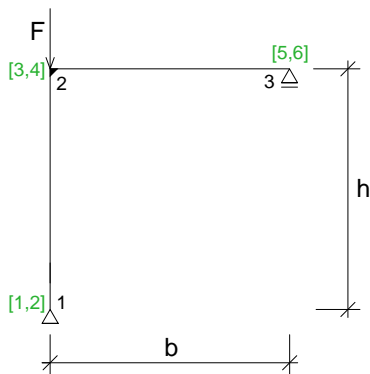
$$k = \sqrt{\frac{F_{cr}}{EI}}.$$

- Ověření výsledků provedu porovnáním vypočtené hodnoty součinitele  $\beta$ , kterou vyjádřím ze vztahu

$$F_{cr} = \frac{EI\pi^2}{(\beta h)^2},$$

s hodnotou vypočtenou dle přibližného tabulkového vzorce.

## Ověření na již řešeném rámu <sup>2</sup>



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ w_1 & \varphi_1 & w_2 & \varphi_2 & w_3 & \varphi_3 \end{bmatrix}$$

- Svislý prut 1-2:
  - matice  $K_{\text{stab}}^{\text{VV}}$ ,
  - indexy 1 – 4
- Vodorovný prut 2-3:
  - matice  $K^{\text{VV}}$ ,
  - indexy 3 – 6
- Indexy pro odstranění:
  - [1,5]

<sup>2</sup>Tento rám byl řešen jinou metodou v rámci seminární práce z PRPE.

## Porovnání součinitelů $\beta_{\text{vyp}}$ a $\beta_{\text{tab}}$

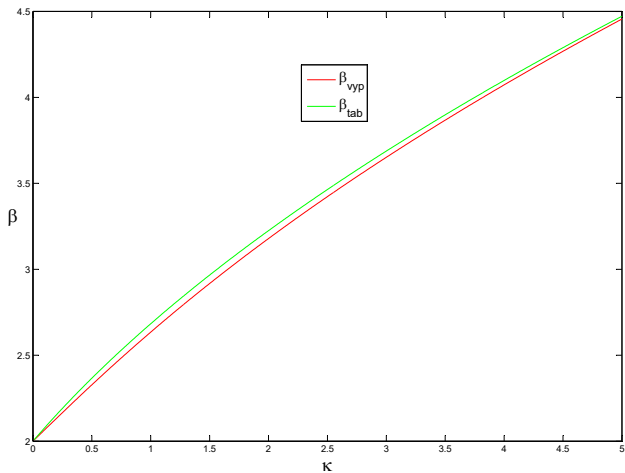
- Zvolím jednotkovou délku svislého prutu  $h = 1$  a délku vodorovného prutu vyjádřím pomocí součinitele  $\kappa$  jako  $b = \kappa h$ .
- Pro přípustný rozsah koeficientu  $\kappa$  (zde  $\kappa \in [0; 5]$ ) porovnám hodnoty součinitele vzpěrné délky získané výpočtem a dle tabulkového přibližného vzorce.
- Po snadné úpravě

$$\beta_{\text{vyp}} = \frac{\pi}{k}.$$

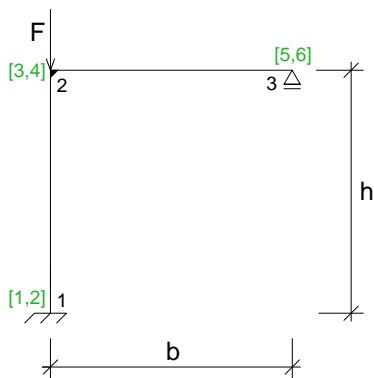
- Tabulkový vzorec

$$\beta_{\text{tab}} = 2\sqrt{1 + 0,8\kappa}.$$

## Porovnání součinitelů $\beta_{vyp}$ a $\beta_{tab}$



## Nově řešený rám VVK



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ w_1 & \varphi_1 & w_2 & \varphi_2 & w_3 & \varphi_3 \end{bmatrix}$$

- Svislý prut 1-2:
  - matice  $K_{\text{stab}}^{\text{VV}}$ ,
  - indexy 1 – 4
- Vodorovný prut 2-3:
  - matice  $K^{\text{VV}}$ ,
  - indexy 3 – 6
- Indexy pro odstranění:
  - $[1,2,5]$

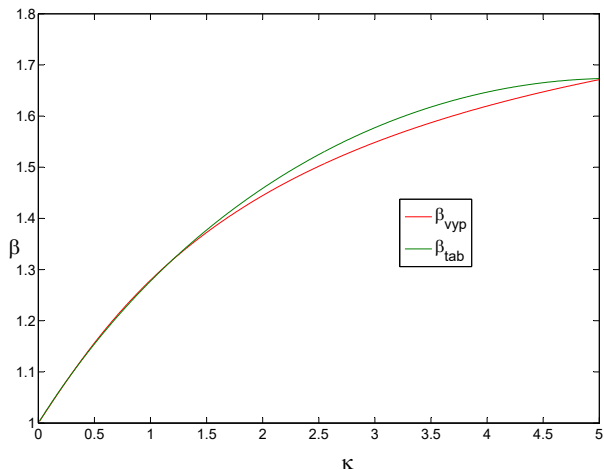
## Porovnání součinitelů $\beta_{vyp}$ a $\beta_{tab}$

- Postupují stejně jako u předchozího rámu.
- Výsledná matice bude mít v tomto případě velikost [3x3].
- Vztah pro hodnotu součinitele  $\beta$  uvedený ve Statických tabulkách pro tento typ rámu je

$$\beta_{tab} = \sqrt{1 + 0,70 \kappa - 0,068 \kappa^2},$$

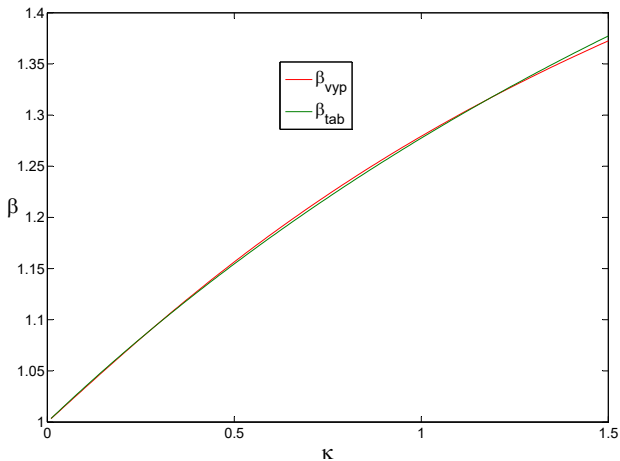
přičemž jeho platnost je opět omezena hodnotou  $\kappa \leq 5$ .

## Porovnání součinitelů $\beta_{vyp}$ a $\beta_{tab}$

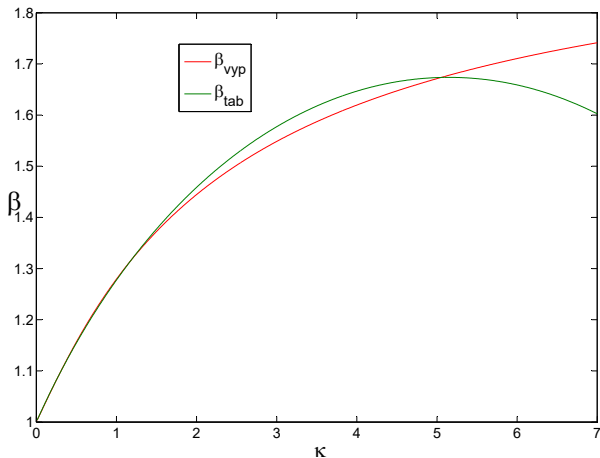




## Detail grafu pro $\kappa \in [0; 1,5]$

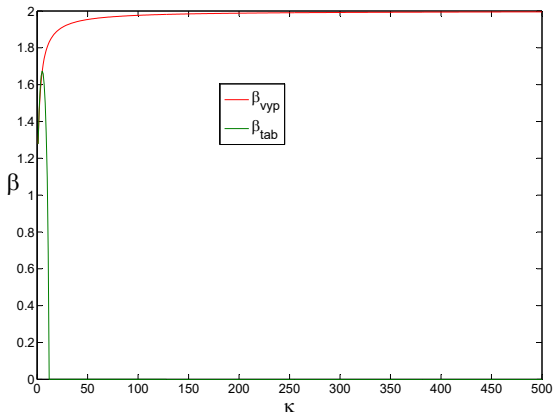


## Vývoj hodnot součinitelů $\beta$ za hranicí $\kappa = 5$



## Interpretace případu $\kappa \rightarrow \infty$

- Srovnání s jednostranně vetknutým nosníkem.



## Zhodnocení použití DM pro řešení stabilitních úloh

- Nevýhody:
  - pracnost při prvotním sestavení matice tuhosti, další postup je ale již relativně snadný
  - nutnost využití numerického řešení
- Výhody:
  - vhodné i pro ráky s poměrem výšky a šířky nad rámec tabulkového omezení
  - vyšší přesnost řešení
  - možnost řešení ráků, které nejsou uvedeny ve Statických tabulkách

**Děkuji za pozornost.**