1 Metoda konečných prvků (MKP)

- *Přibližná* metoda pro řešení problémů popsaných diferenciálními rovnicemi
- Motivace v problémech mechaniky spojitého prostředí (kontinua)
- Diskretizace: Nahrazení *spojitého* prostředí *diskrétním* modelem
- Původně navržena Courantem v roce 1943 [2] ← (matematik) a nezávisle Turnerem a kol. [3] ← (*inženýři*)
- Základní aspekty – matematický, fyzikální, ***inženýrský*** a *algoritmický*
- Z „inženýrského“ hlediska lze chápat MKP jako vhodné *zobecnění deformační metody*

2 Základní rovnice mechaniky

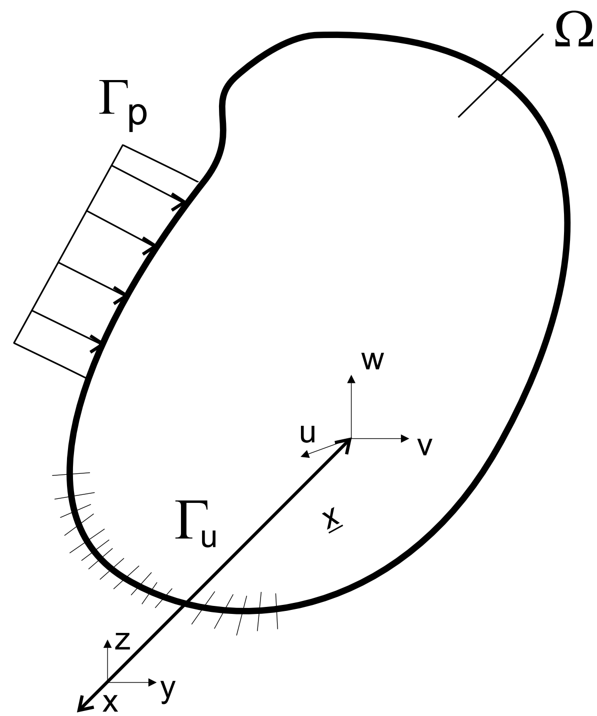
Předpoklady

- Malé posuny a malá přetvoření
- Materiál se chová lineárně a pružně
- Dynamické účinky jsou zanedbatelné

Základní typy rovnic

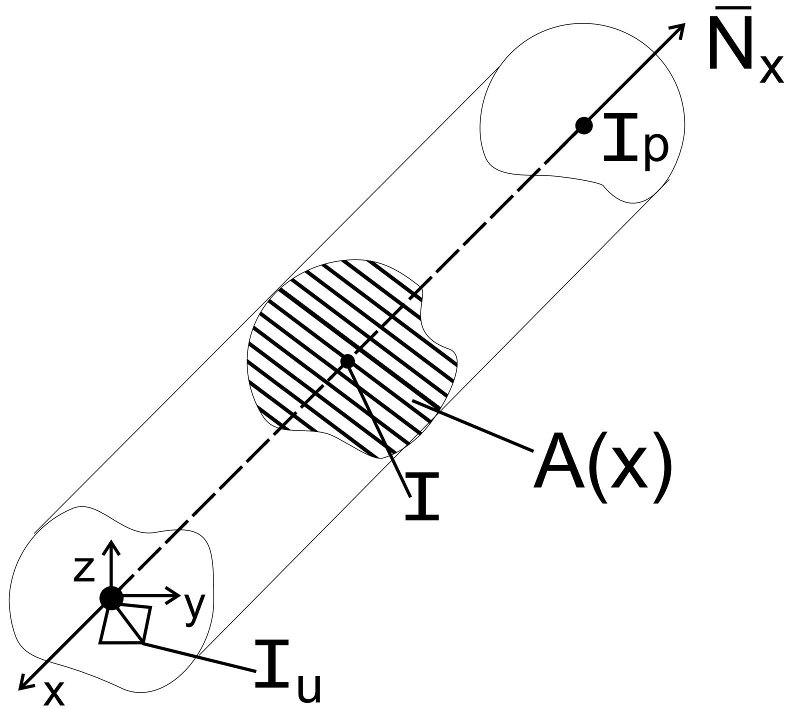
- Geometrické rovnice 2.1
- Statické rovnice 2.2
- Konstitutivní rovnice 2.3
- Okrajové podmínky 2.4

Trojrozměrný problém



Oblast	Ω
Hranice	Γ
Poloha	$\underline{x} = \{x, y, z\}^\mathsf{T}$
Posuny	$\underline{u}(\underline{x}) = \{u(\underline{x}), v(\underline{x}), w(\underline{x})\}^\mathsf{T}$
Deformace	$\underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \{\varepsilon_x(\underline{x}), \varepsilon_y(\underline{x}), \varepsilon_z(\underline{x}), \gamma_{yz}(\underline{x}), \gamma_{zx}(\underline{x}), \gamma_{xy}(\underline{x})\}^\mathsf{T}$
Napětí	$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \{\sigma_x(\underline{x}), \sigma_y(\underline{x}), \sigma_z(\underline{x}), \tau_{yz}(\underline{x}), \tau_{zx}(\underline{x}), \tau_{xy}(\underline{x})\}^\mathsf{T}$

Jednorozměrný problém



Oblast	I
Hranice	a, b
Poloha	x
Posuny	$u(x)$
Deformace	$\varepsilon(x) = \varepsilon_x(x)$
Napětí	$\sigma(x) = \sigma_x(x)$

2.1 Geometrické rovnice: $u \mapsto \varepsilon$

- Složkový zápis A

Trojrozměrný problém	***Jednorozměrný problém***
$\left\{\begin{matrix} \varepsilon_x(\underline{x}) \\ \varepsilon_y(\underline{x}) \\ \varepsilon_z(\underline{x}) \\ \gamma_{yz}(\underline{x}) \\ \gamma_{zx}(\underline{x}) \\ \gamma_{xy}(\underline{x}) \end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \left\{\begin{matrix} u(\underline{x}) \\ v(\underline{x}) \\ w(\underline{x}) \end{matrix}\right\}$	
$\underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{\underline{\partial}}^{\mathsf{T}} \underline{u}(\underline{x})$	$\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u(x)$

2.2 Statické rovnice: $A(\sigma) = 0$

Trojrozměrný problém

$$\left[\begin{array}{cccccc} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \sigma_x(\underline{x}) \\ \sigma_y(\underline{x}) \\ \sigma_z(\underline{x}) \\ \tau_{yz}(\underline{x}) \\ \tau_{zx}(\underline{x}) \\ \tau_{xy}(\underline{x}) \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{c} \overline{X}(\underline{x}) \\ \overline{Y}(\underline{x}) \\ \overline{Z}(\underline{x}) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

$$\underline{\underline{\partial}}\,\underline{\sigma}(\underline{x}) + \underline{\overline{X}}(\underline{x}) = \underline{0}$$

Jednorozměrný problém

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_x(x)}{\mathrm{d}x} + \overline{X}(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}N_x(x)}{\mathrm{d}x} + \overline{f}_x(x) = 0$$

- Složkový zápis B
- Jednorozměrné podmínky rovnováhy ve vnitřních silách představují

podmínky rovnováhy zapsané v napětích zintegrované po průřezu $A(x)$

- Podmínka rovnováhy v libovolném bodě průřezu $A(x)$

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_x(x)}{\mathrm{d}x} + \overline{X}(x) = 0$$

- Integrace po průřezu

$$\begin{aligned}
\int_{A(x)} \left(\frac{\mathrm{d}\sigma_x(x)}{\mathrm{d}x} + \overline{X}(x) \right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \underbrace{\int_{A(x)} \sigma_x(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}_{N_x(x)} + \underbrace{\int_{A(x)} \overline{X}(x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}_{\overline{f}_x(x)} &= 0
\end{aligned}$$

- Výsledek

$$\frac{\mathrm{d}N_x(x)}{\mathrm{d}x} + \overline{f}_x(x) = 0$$

Domací úkol 1. Obdobným způsobem odvoďte zbývající podmínky rovnováhy na prutu.

2.3 Konstitutivní rovnice $\varepsilon \mapsto \sigma$

- Předpokládáme lineárně pružný izotropní materiál
- Složkový zápis C

Trojrozměrný problém

$$\left\{\begin{array}{c}\sigma_x(\underline{x})\\ \sigma_y(\underline{x})\\ \sigma_z(\underline{x})\\ \tau_{yz}(\underline{x})\\ \tau_{zx}(\underline{x})\\ \tau_{xy}(\underline{x})\end{array}\right\} = \lambda(\underline{x})\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}\left\{\begin{array}{c}\varepsilon_x(\underline{x})\\ \varepsilon_y(\underline{x})\\ \varepsilon_z(\underline{x})\\ \gamma_{yz}(\underline{x})\\ \gamma_{zx}(\underline{x})\\ \gamma_{xy}(\underline{x})\end{array}\right\}$$

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{\underline{D}}(\underline{x})\left(\underline{\varepsilon}(\underline{x}) - \underline{\varepsilon}^0(\underline{x})\right)$$

Jednorozměrný problém

$$\sigma(x) = E(x)\left(\varepsilon(x) - \varepsilon^0(x)\right)$$

- $\lambda(\underline{x}) = \frac{E(\underline{x})}{(1+\nu(\underline{x}))(1-2\nu(\underline{x}))}$, oedometrický modul $E_{\text{oed}}(\underline{x}) = \lambda(\underline{x})(1-\nu(\underline{x}))$
- $\underline{\varepsilon}^0(\underline{x})$ vyjadřuje počáteční deformace, typicky od teplotních účinků

2.4 Okrajové podmínky

Statické (přirozené) okrajové podmínky Složkový zápis D

Trojrozměrná úloha: $\underline{x} \in \Gamma_p$

$$\begin{bmatrix} n_x(\underline{x}) & 0 & 0 & 0 & n_z(\underline{x}) & n_y(\underline{x}) \\ 0 & n_y(\underline{x}) & 0 & n_z(\underline{x}) & 0 & n_x(\underline{x}) \\ 0 & 0 & n_z(\underline{x}) & n_y(\underline{x}) & n_x(\underline{x}) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x(\underline{x}) \\ \sigma_y(\underline{x}) \\ \sigma_z(\underline{x}) \\ \tau_{yz}(\underline{x}) \\ \tau_{zx}(\underline{x}) \\ \tau_{xy}(\underline{x}) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \overline{p}_x(\underline{x}) \\ \overline{p}_y(\underline{x}) \\ \overline{p}_z(\underline{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\underline{n}}(\underline{x})\underline{\sigma}(\underline{x}) - \underline{\overline{p}}(\underline{x}) = \underline{0}$$

Jednorozměrná úloha: $\underline{x} \in I_p$

$$N_x(x) - \overline{N_x}(x) = 0$$

Kinematické (podstatné) okrajové podmínky

Trojrozměrná úloha: $\underline{x} \in \Gamma_u$	***Jednorozměrná úloha:*** $x \in I_u$
$\underline{u}(\underline{x}) - \underline{\overline{u}}(\underline{x}) = \underline{0}$	$u(x) - \overline{u}(x) = 0$

3 Deformační varianta řešení

$$\underline{u}(\underline{x}) \overset{\text{GR}}{\rightarrow} \underline{\varepsilon}(\underline{x}) \overset{\text{KR}}{\rightarrow} \overbrace{\underline{\sigma}(\underline{x}) \rightarrow A(\underline{\sigma}) = 0}^{\text{SR}} \Rightarrow \text{Lamého rovnice pružnosti}$$

Trojrozměrná úloha	
$\underline{x} \in \Omega$	$\underline{\underline{\partial}} \left(\underline{\underline{D}}(\underline{x}) \left(\underline{\underline{\partial}}^{\mathsf{T}} \underline{u}(\underline{x}) - \underline{\varepsilon}^0(\underline{x}) \right) \right) + \overline{\underline{X}} = \underline{0}$
$\underline{x} \in \Gamma_u$	$\underline{u}(\underline{x}) - \overline{\underline{u}}(\underline{x}) = \underline{0}$
$\underline{x} \in \Gamma_p$	$\underline{\underline{n}}(\underline{x}) \left(\underline{\underline{D}}(\underline{x})(\underline{\underline{\partial}}^{\mathsf{T}} \underline{u}(\underline{x}) - \underline{\varepsilon}^0(\underline{x})) \right) - \overline{\underline{p}}(\underline{x}) = \underline{0}$
Jednorozměrná úloha	
$x \in I$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(E(x) A(x) \left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} - \varepsilon^0(x) \right) \right) + \overline{f}_x(x) = 0$
$x \in I_u$	$u(x) - \overline{u}(x) = 0$
$x \in I_p$	$N(x) - \overline{N}(x) = 0$

Funkci $\underline{u}(\underline{x})$ resp. $u(x)$ splňující všechny předchozí rovnice nazveme ***silným řešením*** rovnic pružnosti.

4 Slabá formulace podmínek rovnováhy

4.1 Jednorozměrná úloha

- Podmínky rovnováhy platí v libovolném bodě $x \Rightarrow$ pro všechny váhové funkce $\delta u(x)$

$$\int_I \delta u(x) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(E(x)A(x) \left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} - \varepsilon^0(x) \right) \right) + \overline{f}_x(x) \right) \mathrm{d}x = \boxed{0} \quad (1)$$

- Kinematické okrajové podmínky

$$(u(x) - \overline{u}(x))\,|_{x \in I_u} = 0$$

- Pro jednoduchost předpokládáme, že $\overline{u}(x) = 0$
- Statické okrajové podmínky

$$\left(N_x(x) - \overline{N}_x(x)\right)|_{x \in I_p} = 0$$

- Integrace per partes

$$\int_I f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_I g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x$$

- Tedy

$$\int_I \overbrace{\delta u(x)}^{f(x)}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overbrace{\left(E(x)A(x)\left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} - \varepsilon^0(x)\right)\right)}^{g(x)=N_x(x)}\Big)\,\mathrm{d}x = [\delta u(x)N_x(x)]_{I_u}$$
$$+ \quad \left[\delta u(x)\overline{N}_x(x)\right]_{I_p} - \int_I \frac{\mathrm{d}(\delta u(x))}{\mathrm{d}x}\left(E(x)A(x)\left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} - \varepsilon^0(x)\right)\right)\mathrm{d}x$$

- Po dosazení do původní podmínky (1)

$$\begin{aligned} 0 \quad = & \quad -[\delta u(x)N_x(x)]_{I_u} - \left[\delta u(x)\overline{N}_x(x)\right]_{I_p} \\ + & \quad \int_I \left\{\frac{\mathrm{d}(\delta u(x))}{\mathrm{d}x}\left(E(x)A(x)\left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} - \varepsilon^0(x)\right)\right) - \delta u(x)\overline{f}_x(x)\right\}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

- Pokud váhová funkce $\delta u(x)$ splňuje kinematické okrajové podmínky na I_u, vypadává z předchozího vztahu člen $\left[\delta u(x)N_x(x)\right]_{I_u}$. Dostáváme

$$\int_I \frac{\mathrm{d}(\delta u(x))}{\mathrm{d}x}\left(E(x)A(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = \int_I \delta u(x)\overline{f}_x(x)\,\mathrm{d}x$$

$$+ \int_I \frac{\mathrm{d}(\delta u(x))}{\mathrm{d}x}E(x)A(x)\varepsilon^0(x)\,\mathrm{d}x + \left[\delta u(x)\overline{N}_x(x)\right]_{I_p} \qquad (2)$$

- ***Slabé řešení*** rovnic pružnosti: funkce $u(x)$, splňující kinematické okrajové podmínky a rovnost (2) pro všechny váhové funkce $\delta u(x)$ splňující kinematické okrajové podmínky rovnic pružnosti

	Silné řešení	***Slabé řešení***
Statické rovnice	Přesně	V průměru
Kinematické okrajové podmínky	Přesně	Přesně
Statické okrajové podmínky	Přesně	V průměru
	$\Rightarrow$	$\not\Leftarrow$

4.2 Trojrozměrná úloha

- Vážená (zprůměrovaná) forma podmínek rovnováhy

$$\int_\Omega \underline{\delta u}(\underline{x})^\mathsf{T} \left(\underline{\underline{\partial}} \overbrace{\left(\underline{\underline{D}}(\underline{x}) \left(\underline{\underline{\partial}}^\mathsf{T} \underline{u}(\underline{x}) - \underline{\varepsilon}^0(\underline{x}) \right) \right)}^{\underline{\sigma}(\underline{x})} + \overline{\underline{X}}(\underline{x}) \right) \mathrm{d}\underline{x} = 0$$

- $\underline{\delta u}(\underline{x})$ splňuje kinematické okrajové podmínky
- Statické okrajové podmínky

$$\int_{\Gamma_p} \underline{\delta u}(\underline{x})^\mathsf{T} \underline{\underline{n}}(\underline{x}) \underline{\sigma}(\underline{x})\, \mathrm{d}\underline{x} = \int_{\Gamma_p} \underline{\delta u}(\underline{x})^\mathsf{T} \overline{\underline{p}}(\underline{x})\, \mathrm{d}\underline{x}$$

- Integrace per partes $\Leftrightarrow$ Clapeyronův teorém

$$\int_\Omega \underline{f}(\underline{x})^\mathsf{T} \underline{\underline{\partial}} \underline{g}(\underline{x})\, \mathrm{d}\underline{x} = \int_\Gamma \underline{f}(\underline{x})^\mathsf{T} \underline{\underline{n}}(\underline{x}) \underline{g}(\underline{x})\, \mathrm{d}\underline{x} - \int_\Omega \left(\underline{\underline{\partial}}^\mathsf{T} \underline{f}(\underline{x}) \right)^\mathsf{T} \underline{g}(\underline{x})\, \mathrm{d}\underline{x}$$

- Tedy

$$\int_\Omega \underline{\delta u}(\underline{x})^\mathsf{T} \left(\underline{\underline{\partial}} \left(\underline{\underline{D}}(\underline{x}) \left(\underline{\underline{\partial}}^\mathsf{T} \underline{u}(\underline{x}) - \underline{\varepsilon}^0(\underline{x})\right)\right)\right) \, \mathrm{d}\underline{x} = \int_{\Gamma_p} \underline{\delta u}(\underline{x})^\mathsf{T} \underline{\overline{p}}(\underline{x}) \, \mathrm{d}\underline{x}$$
$$- \int_\Omega \left(\underline{\underline{\partial}}^\mathsf{T} \underline{\delta u}(\underline{x})\right)^\mathsf{T} \underline{\underline{D}}(\underline{x}) \left(\underline{\underline{\partial}}^\mathsf{T} \underline{u}(\underline{x}) - \underline{\varepsilon}^0(\underline{x})\right) \, \mathrm{d}\underline{x}$$

- Slabé řešení: Najdi $\underline{u}(\underline{x})$, $\underline{u}(\underline{x}) = \underline{\overline{u}}(\underline{x}) = \underline{0}$ na Γ_u, které splňuje

$$\int_\Omega \left(\underline{\underline{\partial}}^\mathsf{T} \underline{\delta u}(\underline{x})\right)^\mathsf{T} \underline{\underline{D}}(\underline{x}) \left(\underline{\underline{\partial}}^\mathsf{T} \underline{u}(\underline{x})\right) \, \mathrm{d}\underline{x} = \int_\Omega \underline{\delta u}(\underline{x})^\mathsf{T} \underline{\overline{X}}(\underline{x}) \, \mathrm{d}\underline{x}$$
$$+ \int_\Omega \left(\underline{\underline{\partial}}^\mathsf{T} \underline{\delta u}(\underline{x})\right)^\mathsf{T} \underline{\underline{D}}(\underline{x}) \underline{\varepsilon}^0(\underline{x}) \, \mathrm{d}\underline{x} + \int_{\Gamma_p} \underline{\delta u}(\underline{x})^\mathsf{T} \underline{\overline{p}}(\underline{x}) \, \mathrm{d}\underline{x}$$

pro všechna $\underline{\delta u}(\underline{x})$, která splňují kinematické okrajové podmínky.

Domací úkol 2. Jaká je souvislost slabého řešení s principem virtuálních posunutí? [5, kap. 5]

5 Diskretizace

- I když jsou podmínky na řešení zeslabené, jedná se stále o nekonečně-dimenzionální úlohu (platí “pro všechny” $\delta u(x)$ resp. $\underline{\delta u}(\underline{x})$).
- Nutno převést na úlohu s konečným počtem parametrů – tzv. diskretizace .

5.1 Jednorozměrná úloha

- Funkci $u(x)$ hledáme ve tvaru

$$u(x) \approx \sum_{i=1}^{n} N_i(x) u_i = [N_1(x), N_2(x), \ldots, N_n(x)] \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{array} \right\} = \underline{N}(x)\underline{r}$$

- $N_i(x)$ jsou ***známé*** bázové funkce a r_i jsou ***neznámé*** koeficienty lineární kombinace; n je *počet stupňů volnosti* úlohy

- Pokud je dán vektor $\underline{r}$, můžeme vypočítat hodnoty

$$\begin{aligned}
\text{posunů v libovolném bodě } \overline{x} \quad & u(\overline{x}) && \approx \underline{N}(\overline{x})\underline{r} \\
\text{přetvoření v libovolném bodě } \overline{x} \quad & \varepsilon(\overline{x}) && \approx \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\underline{N}(\overline{x})\underline{r} = \underline{B}(\overline{x})\underline{r} \\
\text{napětí v libovolném bodě } \overline{x} \quad & \sigma(\overline{x}) && = E(\overline{x})\left(\varepsilon(\overline{x}) - \varepsilon^0(\overline{x})\right) \\
& && \approx E(\overline{x})\left(\underline{\underline{B}}(\overline{x})\underline{r} - \varepsilon^0(\overline{x})\right)
\end{aligned}$$

- Pro určení vektoru $\underline{r}$ je nutno specifikovat n nezávislých podmínek. Jejich konkrétní podoba závisí na volbě váhových funkcí δu [1, str.!!!].

- Volba ve tvaru $\delta u(x) \approx \underline{\underline{N}}(x)\underline{\delta r}$, vede na tzv. ***Galerkinovu*** metodu ($\underline{\delta r}_{n\times 1}$ je *nezávislé* na $\underline{r}$).

- Po dosazení předchozích aproximací do (2) dostáváme podmínku

$$
\begin{aligned}
&\int_I \underline{\delta r}^{\mathsf{T}} \underline{B}(x)^{\mathsf{T}} E(x) A(x) \underline{B}(x) \underline{r} \, \mathrm{d}x = \int_I \underline{\delta r}^{\mathsf{T}} \underline{N}(x)^{\mathsf{T}} \overline{f}_x(x) \, \mathrm{d}x \\
+ \quad &\int_I \underline{\delta r}^{\mathsf{T}} \underline{B}(x)^{\mathsf{T}} E(x) A(x) \varepsilon^0(x) \, \mathrm{d}x + \left[\underline{\delta r}^{\mathsf{T}} \underline{N}(x)^{\mathsf{T}} \overline{N}_x(x) \right]_{I_p},
\end{aligned}
$$

  která musí být splněna pro všechna $\underline{\delta r}$.

- Člen $\underline{\delta r}^{\mathsf{T}}$ můžeme z předchozí rovnosti vytknout, jelikož není funkcí x:

$$
\begin{aligned}
&\underline{\delta r}^{\mathsf{T}} \left(\int_I \underline{B}(x)^{\mathsf{T}} E(x) A(x) \underline{B}(x) \, \mathrm{d}x \right) \underline{r} = \underline{\delta r}^{\mathsf{T}} \left(\int_I \underline{N}(x)^{\mathsf{T}} \overline{f}_x(x) \, \mathrm{d}x \right) \\
+ \quad &\underline{\delta r}^{\mathsf{T}} \left(\int_I \underline{B}(x)^{\mathsf{T}} E(x) A(x) \varepsilon^0(x) \, \mathrm{d}x \right) + \underline{\delta r}^{\mathsf{T}} \left[\underline{N}(x)^{\mathsf{T}} \overline{N}_x(x) \right]_{I_p}
\end{aligned}
$$

- Tato rovnice bude splněna pro všechna $\underline{\delta r}$, pouze pokud bude $\underline{r}$ řešením ***soustavy lineárních rovnic***

$$\boxed{\underline{\underline{K}}\,\underline{r} = \underline{R_f} + \underline{R_0} + \underline{R_p}}$$

Jednotlivé členy

- Symetrická *matice tuhosti* $\underline{\underline{K}}_{n\times n}$

$$\underline{\underline{K}} = \int_I \underline{B}(x)^\mathsf{T} E(x) A(x) \underline{B}(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

- Vektor zobecněného zatížení od objemových sil $\underline{R_f}_{n\times 1}$

$$\underline{R_f} = \int_I \underline{N}(x)^\mathsf{T} \overline{f}_x(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

- Vektor zobecněného zatížení od počátečních deformací $\underline{R_0}_{n\times 1}$

$$\underline{R_0} = \int_I \underline{B}(x)^\mathsf{T} E(x) A(x) \varepsilon^0(x)\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

- Vektor zobecněného zatížení od povrchových sil $\underline{R_p}_{n\times 1}$

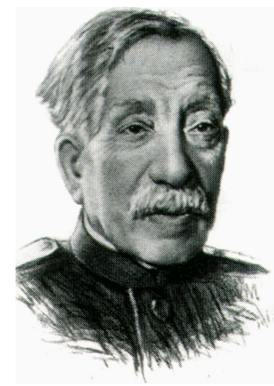
$$\underline{R_p} = \left[\underline{N}(x)^{\mathsf{T}}\overline{N}_x(x)\right]_{I_p} \tag{6}$$


R. Courant


A.-L. Cauchy


G. Lamé


R. Hooke


B.G. Galerkin

5.2 Trojrozměrný problém

- Aproximace $\underline{u}(\underline{x})$

$$\left\{\begin{array}{c} u(\underline{x}) \\ v(\underline{x}) \\ w(\underline{x}) \end{array}\right\} \approx \sum_{i=1}^{n} N_i(\underline{x}) \left\{\begin{array}{c} u_i \\ v_i \\ w_i \end{array}\right\}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} N_1(\underline{x}) & 0 & 0 & \dots & N_n(\underline{x}) & 0 & 0 \\ 0 & N_1(\underline{x}) & 0 & \dots & 0 & N_n(\underline{x}) & 0 \\ 0 & 0 & N_1(\underline{x}) & \dots & 0 & 0 & N_n(\underline{x}) \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \hline \vdots \\ \hline u_n \\ v_n \\ w_n \end{array}\right\}$$

- Tedy

$$\underline{u}(\underline{x}) \approx \underline{\underline{N}}(\underline{x})\underline{r}$$

- Pokud známe $3n$-rozměrný vektor $\underline{r}$, můžeme určit hodnoty

posunů v libovolném bodě $\overline{x}$ $\quad \underline{u}(\overline{x}) \quad \approx \underline{\underline{N}}(\overline{x})\underline{r}$

přetvoření v libovolném bodě $\overline{x}$ $\quad \underline{\varepsilon}(\overline{x}) \quad = \underline{\underline{\partial}}^{\mathsf{T}}\underline{u}(\underline{x}) \approx \underline{\underline{\partial}}^{\mathsf{T}}\underline{\underline{N}}(\overline{x})\underline{r} = \underline{\underline{B}}(\overline{x})\underline{r}$

napětí v libovolném bodě $\overline{x}$ $\quad \underline{\sigma}(\overline{x}) \quad = \underline{\underline{D}}(\overline{x})\left(\underline{\varepsilon}(\overline{x}) - \underline{\varepsilon}^0(\overline{x})\right)$

$$\approx \underline{\underline{D}}(\overline{x})\left(\underline{\underline{B}}(\overline{x})\underline{r} - \underline{\varepsilon}^0(\overline{x})\right)$$

- Galerkinova metoda – váhové funkce volíme ve tvaru

$$\delta\underline{u}(\underline{x}) \approx \underline{\underline{N}}(\underline{x})\delta\underline{r}.$$

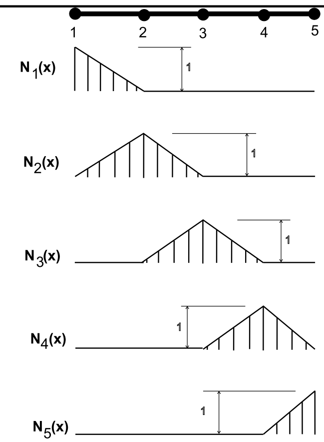
$\Rightarrow$ další postup *úplně stejný* jako pro jednorozměrnou úlohu

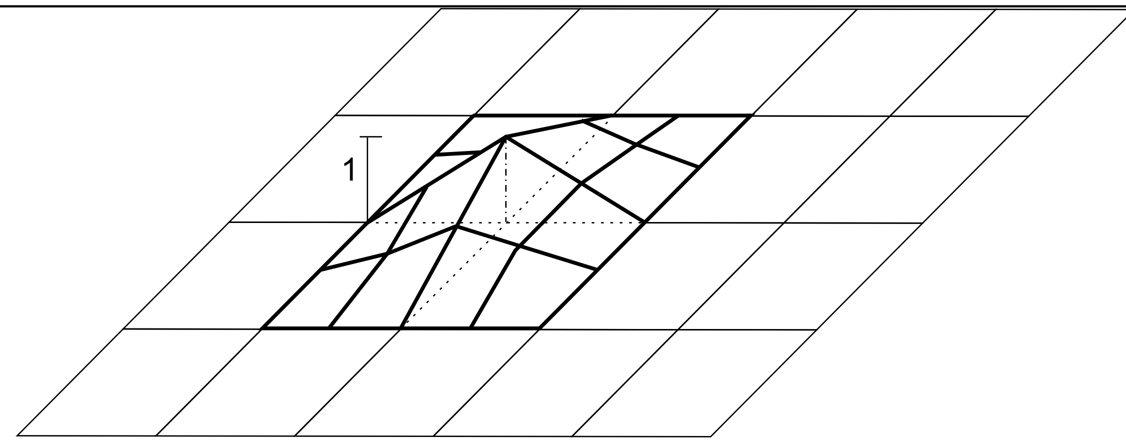
Domací úkol 3*. Odvoďte matici tuhosti a vektor zobecněného zatížení pro trojrozměrnou úlohu pružnosti.

6 Princip metody konečných prvků

- Speciální případ Galerkinovy metody, šikovná volba bázových funkcí N_i
- Řešenou oblast rozdělíme na *n uzlových bodů*. Neznámé u_i, v_i a w_i mají nyní fyzikální význam posunů daných uzlových bodů
- Každému uzlovému bodu přísluší jedna bázová funkce, jejíž hodnota je v daném uzlu rovná jedné, zatímco v ostatních uzlech je nulová.

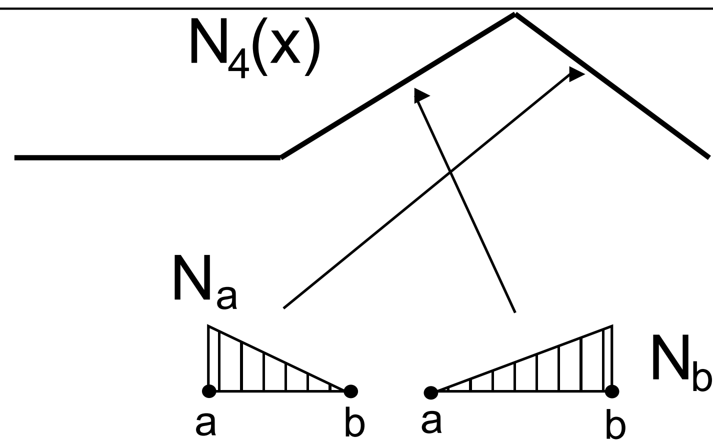
Jednorozměrná úloha	***Dvojrozměrná úloha***

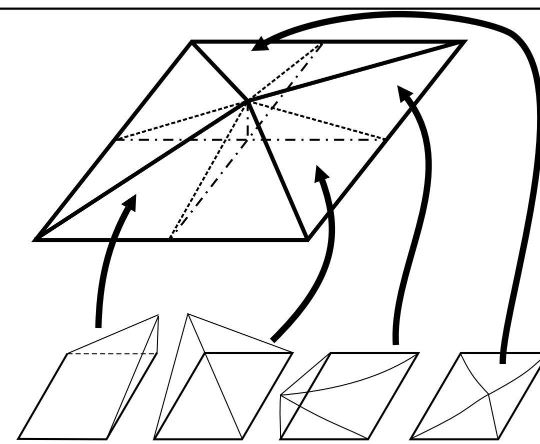




- Bázová funkce může být „vyskládána“ z příspěvků od ***jednotlivých prvků***.

Jednorozměrná úloha	***Dvojrozměrná úloha***





- Jednotlivé matice a vektory z rovnic (3)–(6) stačí určit pouze ***jednou*** pro daný typ prvku.
- Z fyzikálního hlediska mají úplně stejný význam jako v deformační metodě (koncové síly od posunů uzlů, koncové síly od zatížení a poklesu podpor)
- Zpětné „vyskládání“ zaručíme tzv. ***lokalizací*** příspěvků jednotlivých prvků

□

Prosba. V případě, že v textu objevíte nějakou chybu nebo budete mít námět na jeho vylepšení, ozvěte se prosím na `zemanj@cml.fsv.cvut.cz`.

Opravy verze -001: str. 12: integrace per partes, opraven člen $f(x)$ na $f'(x)$ (na chybu upozornila A. Kučerová)
Opravy verze 000: str. 8: doplněn vztah pro E_{oed}, str. 13, 16, 17, 18: oprava gramatiky, (na chyby upozornil J. Šejnoha), str. 8: opraven třetí řádek matice tuhosti, str. 10, jednorozměrná úloha, připsán člen $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$, str.17 opraveno w na δu, str.18: v první rovnici opraveno $+$ na $=$ (chyby nalezené v průběhu přednášky), doplněné citace
Opravy verze 001: str. 6: pro větší názornost doplněny podmínky rovnováhy v napětích (vylepšení navrhl P. Gruber)
Opravy verze 002: str. 14: opraven člen $\underline{\delta u}$ na f (na chybu upozornil J. Šejnoha)

Opravy verze 003: str. 10, 11, 14: opravena znaménka u $\overline{X}$ a $\overline{f}_x$. (na chyby upozornila J. Egrtová)
Opravy verze 004: Označeny důležité vztahy, opraveno označení pro řádkové matice z $\underline{\underline{A}}$ na $\underline{A}$. Doplněny vektorové verze obrázků.
Opravy verze 005: Opraveny překlepy na str. 16 a 19. (na chyby upozornil M. Jandera)

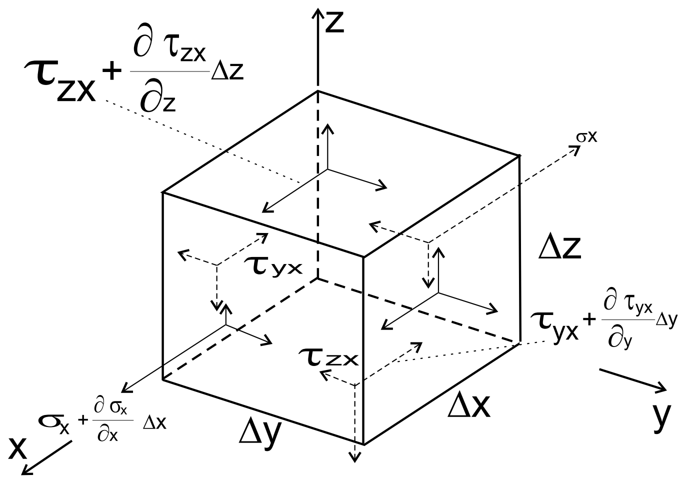
$\boxed{\text{Verze 006}}$

A Geometrické rovnice

Podrobné odvození viz [4, str. 9–11]

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x(\underline{x}) &= \frac{\partial u(\underline{x})}{\partial x} \\
\varepsilon_y(\underline{x}) &= \frac{\partial v(\underline{x})}{\partial y} \\
\varepsilon_z(\underline{x}) &= \frac{\partial w(\underline{x})}{\partial z} \\
\gamma_{yz}(\underline{x}) &= \frac{\partial v(\underline{x})}{\partial z} + \frac{\partial w(\underline{x})}{\partial y} \\
\gamma_{zx}(\underline{x}) &= \frac{\partial w(\underline{x})}{\partial x} + \frac{\partial u(\underline{x})}{\partial z} \\
\gamma_{xy}(\underline{x}) &= \frac{\partial u(\underline{x})}{\partial y} + \frac{\partial v(\underline{x})}{\partial x}
\end{aligned}
$$

B Statické rovnice



$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x(\underline{x})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}(\underline{x})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}(\underline{x})}{\partial z} + \overline{X}(\underline{x}) &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{xy}(\underline{x})}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y(\underline{x})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}(\underline{x})}{\partial z} + \overline{Y}(\underline{x}) &= 0 \\
\frac{\partial \tau_{zx}(\underline{x})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}(\underline{x})}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z(\underline{x})}{\partial z} + \overline{Z}(\underline{x}) &= 0
\end{aligned}
$$

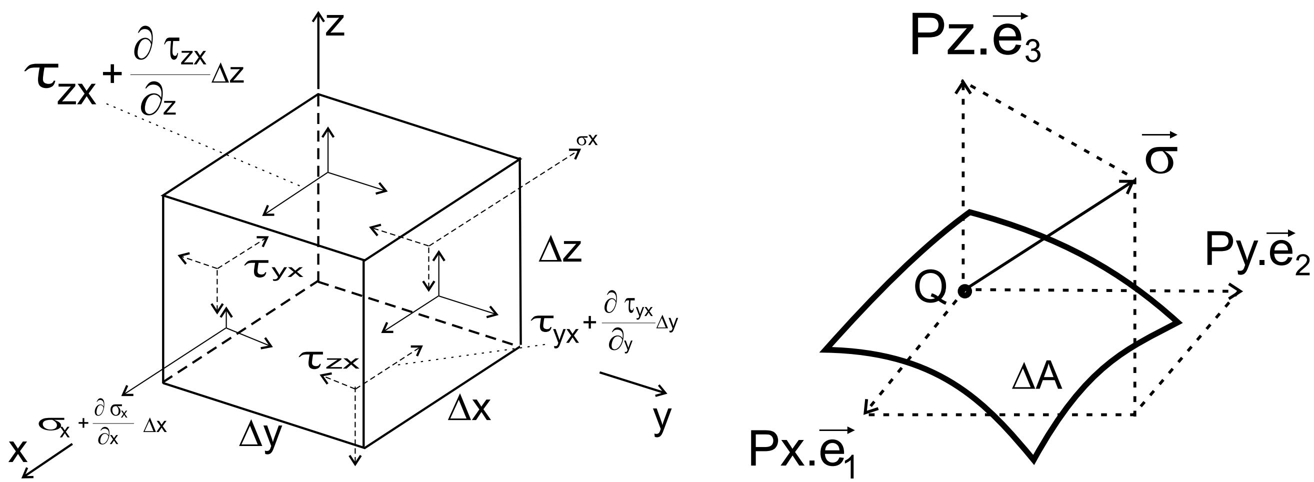
Podrobné odvození viz [4, str. 16–19]

C Konstitutivní rovnice

$$
\begin{aligned}
\sigma_x(\underline{x}) &= \frac{E}{(1+\nu(\underline{x}))(1-2\nu(\underline{x}))}\Big((1-\nu(\underline{x}))\varepsilon_x(\underline{x}) + \nu(\underline{x})(\varepsilon_y(\underline{x}) + \varepsilon_z(\underline{x})\Big) \\
\sigma_y(\underline{x}) &= \frac{E}{(1+\nu(\underline{x}))(1-2\nu(\underline{x}))}\Big((1-\nu(\underline{x}))\varepsilon_y(\underline{x}) + \nu(\underline{x})(\varepsilon_x(\underline{x}) + \varepsilon_z(\underline{x})\Big) \\
\sigma_z(\underline{x}) &= \frac{E}{(1+\nu(\underline{x}))(1-2\nu(\underline{x}))}\Big((1-\nu(\underline{x}))\varepsilon_z(\underline{x}) + \nu(\underline{x})(\varepsilon_x(\underline{x}) + \varepsilon_y(\underline{x})\Big) \\
\tau_{yz}(\underline{x}) &= \frac{E}{(1+\nu(\underline{x}))(1-2\nu(\underline{x}))}\Big(\frac{1-2\nu(\underline{x})}{2}\gamma_{yz}(\underline{x})\Big) \\
\tau_{zx}(\underline{x}) &= \frac{E}{(1+\nu(\underline{x}))(1-2\nu(\underline{x}))}\Big(\frac{1-2\nu(\underline{x})}{2}\gamma_{zx}(\underline{x})\Big) \\
\tau_{zx}(\underline{x}) &= \frac{E}{(1+\nu(\underline{x}))(1-2\nu(\underline{x}))}\Big(\frac{1-2\nu(\underline{x})}{2}\gamma_{zx}(\underline{x})\Big)
\end{aligned}
$$

Podrobné odvození viz [4, str. 28–32]

D Statické okrajové podmínky



$$\begin{aligned}
\sigma_x(\underline{x})n_x(\underline{x}) + \tau_{xy}(\underline{x})n_y(\underline{x}) + \tau_{zx}(\underline{x})n_z(\underline{x}) - \overline{p}_x(\underline{x}) &= 0 \\
\tau_{xy}(\underline{x})n_x(\underline{x}) + \sigma_y(\underline{x})n_y(\underline{x}) + \tau_{yz}(\underline{x})n_z(\underline{x}) - \overline{p}_y(\underline{x}) &= 0 \\
\tau_{zx}(\underline{x})n_x(\underline{x}) + \tau_{yz}(\underline{x})n_y(\underline{x}) + \sigma_z(\underline{x})n_z(\underline{x}) - \overline{p}_z(\underline{x}) &= 0
\end{aligned}$$

Podrobné odvození viz [4, str. 14–15]

Reference

[1] P. Brož and P. Procházka, *Metoda okrajových prvků v inženýrské praxi*, SNTL, Praha, 1987.

[2] R. Courant, *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*, Bulletin of the American Mathematical Society **49** (1943), 1–23.

[3] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin, and L. J. Topp, *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, Journal Aeronautical Science **23** (1956), 805–824.

[4] J. Šejnoha and J. Bittnarová, *Pružnost a pevnost 10*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997.

[5] ———, *Pružnost a pevnost 20*, Vydavatelství ČVUT, Praha, 1998.